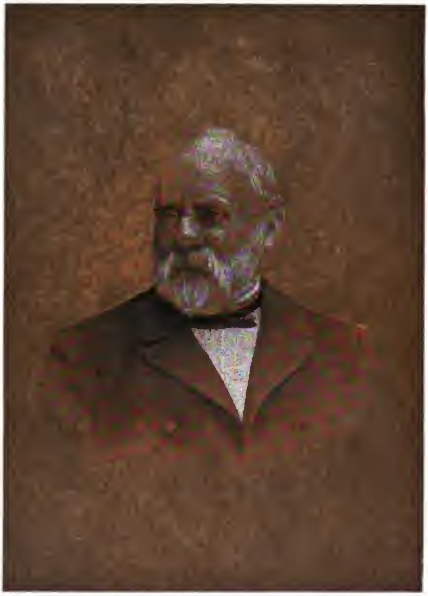
image
not
available



Friedr. Hultsch

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM

DRITTE FOLGE. ACHTER BAND.

[illegible] MIT [illegible] TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1907—1908



Friedr. Hultsch

BIBLIOTHECA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM.

DRITTE FOLGE. ACHTER BAND.

MIT DEM BILDNISSE VON FR. HULTSCH ALS TITELBILD,
SOWIE 7 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1907—1908.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Sach-Register.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

Geschichte der neueren Zeit.

Aktuelle Fragen.

Das 1. Heft dieses Bandes	(S. 1—112)	wurde	am	24. September	1907	ausgegeben.
„ 2. „ „ „	(S. 113—224)	„	„	28. Januar	1908	„
„ 3. „ „ „	(S. 225—320)	„	„	31. März	„	„
„ 4. „ „ „	(S. 321—442)	„	„	14. Juli	„	„

Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete.

Von G. Eneström in Stockholm.

So lange ein Forschungsgebiet nur von wenigen Personen bearbeitet wird, die außerdem nicht auf Grund ihres eigentlichen Berufes, sondern sozusagen zufälligerweise in diesem Gebiete tätig sind, lohnt es kaum der Mühe, auch nur einen Versuch zu machen, um planmäßige Arbeit zu bewirken; vielmehr ist es angebrachter, daß jedermann die Untersuchungen vornimmt, die ihn am meisten interessieren. Ist dagegen das Forschungsgebiet schon längere Zeit bearbeitet worden, und hat sich allmählich die Zahl der Teilnehmer vermehrt, so liegt darin ein Anlaß, um wenigstens in Erwägung zu ziehen, ob und auf welche Weise eine planmäßigere Arbeit erzielt werden könnte. Ein Forschungsgebiet der fraglichen Art ist nunmehr die Geschichte der Mathematik, und in diesem Artikel beabsichtige ich auseinanderzusetzen, inwieweit die Arbeit in diesem Gebiete meines Erachtens planmäßig geordnet werden kann. Freilich habe ich den nämlichen Gegenstand beiläufig in einigen früheren Leitartikeln berührt[1]), aber derselbe ist meines Erachtens so wichtig, daß es von besonderen Interesse ist darauf zurückzukommen.

Es dürfte von vorne herein klar sein, daß eine wirkliche planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Gebiete erst dann möglich wird, wenn man festgestellt hat, was eine Geschichte der Mathematik eigentlich enthalten soll. Ist man der Ansicht, die ich schon öfter ausgesprochen und begründet habe, nämlich, daß eine solche Geschichte wesentlich die Entwickelung der mathematischen Ideen zu schildern hat, und zieht man

1) Vgl. z. B. G. Eneström, *Über literarische und wissenschaftliche Geschichtsschreibung auf dem Gebiete der Mathematik;* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 2.

in Betracht, daß eine Gesamtgeschichte in diesem Sinne erst nach bedeutenden Vorarbeiten mit Erfolg in Angriff genommen werden kann, so liegt es am nächsten, den Fachgenossen die Bearbeitung historischer Monographien über einzelne Ideen oder über mehrere Ideen in einem beschränkteren Zeitraume zu empfehlen. Bei näherer Untersuchung stellt es sich indessen heraus, daß zur Zeit auch nicht solche Monographien immer mit wirklichem Erfolg in Angriff genommen werden können.

Zieht man zuerst in Betracht die ältere Mathematik, so kommt es oft vor, daß man, um der Entwickelung einer gewissen Idee zu folgen, solche Hilfsmittel zur Verfügung haben muß, die nur ausnahmsweise einem Mathematiker zugänglich sind; es kommt auch vor, daß nicht einmal diese Hilfsmittel genügen, sondern daß ganz spezielle bibliographische, literarische oder philologische Vorarbeiten nötig sind, bevor man den Entwickelungsgang der fraglichen Idee genau feststellen kann. Aber überdies ist es nicht selten unmöglich zu entscheiden, welche Vorarbeiten nötig sind, denn tatsächlich haben zufällige Entdeckungen rein literarischer Art veranlaßt, daß die früheren Ansichten über die Entwickelung gewisser mathematischer Theorien wesentlich modifiziert werden mußten.[1])

In betreff der neueren Mathematik liegt die Sache etwas anders, aber auch hier ist es in vielen Fällen sehr schwierig, einen Überblick des ganzen Entwickelungsganges einer mathematischen Idee zu erzielen, weil die betreffende Literatur zum Teil schwer zugänglich ist und man oft nicht weiß, wo man das Material zu suchen hat.

Aus dem vorangehenden folgt, daß es zwar angebracht sein kann, die Fachgenossen zur Bearbeitung der Geschichte der einzelnen mathematischen Ideen anzuregen, daß es aber noch zu früh ist, auf diesem Wege eine wirklich planmäßige Arbeit zur Herstellung einer Gesamtgeschichte der Mathematik anzuordnen. Vielmehr müssen zuerst bedeutende Vorarbeiten vorliegen, und diese gehören hauptsächlich der literarischen Geschichte der Mathematik an. Die erste Frage wird also sein, inwieweit auf diesem Gebiete eine planmäßige Arbeit erzielt werden kann, und hier muß man, wie schon oben angedeutet wurde, besonders die ältere Mathematik in Betracht ziehen.

Hinsichtlich der Mathematik im Altertum ist es natürlich in erster Linie von Belang, gute Ausgaben nebst Übersetzungen der Werke der wichtigsten Mathematiker, sowie gute Monographien in betreff der übrigen Mathematiker zu haben. In dieser Hinsicht ist ja schon viel geleistet worden, das meiste freilich von Philologen, die sich die nötigen mathe-

1) Als Beleg meiner Behauptung genügt es auf die sogenannte Heron-Frage hinzuweisen.

matischen Kenntnisse verschafft haben, und da es immer gewöhnlicher wird, daß jüngere Philologen Arbeiten über griechische Mathematiker veröffentlichen, so ist es zu hoffen, daß die noch vorhandenen Lücken [1]) allmählich ausgefüllt werden. Jedenfalls ist dies wesentlich eine Sache der Philologen.

In betreff der morgenländischen Mathematik im Altertum und Mittelalter sind die Verhältnisse zur Zeit weniger günstig. Die Schriften der morgenländischen Mathematiker sind nämlich noch zum größten Teil unediert und die Handschriften oft den europäischen Forschern unzugänglich; überdies gibt es teils wenige Orientalisten, die sich für Mathematik interessieren, teils nur ausnahmsweise Mathematiker, die orientalische Sprachen studiert haben. Auch hier muß die weitere Arbeit in erster Linie den betreffenden Philologen überlassen werden.

Die mathematische Literatur des christlichen Mittelalters ist meistens nur handschriftlich vorhanden, und ein großer Teil derselben ist noch nicht näher untersucht; hierzu kommt, daß es oft unmöglich ist, ohne eingehende Nachforschungen zu entscheiden, ob eine Originalabhandlung oder lediglich eine Übersetzung vorliegt [2]), sowie im ersten Falle wer der Verfasser der Abhandlung [3]) ist. Um das handschriftlich vorhandene Material zugänglich zu machen, sind größere philologische Kenntnisse nicht nötig, wohl aber Handschriftenkunde, die allerdings nur in einzelnen Fällen umfassendere Studien zu erfordern braucht, und in solchen Fällen dürfte der Mathematiker ohne allzu große Schwierigkeit einen Handschriftenkenner zu Rate ziehen können. In erster Linie sollte ein Verzeichnis der handschriftlichen mathematischen Literatur des christlichen Mittelalters hergestellt werden, [4]) dann sollten teils die wichtigsten noch unedierten Texte herausgegeben, teils über die übrigen genaue Berichte veröffentlicht werden.

---

1) So z. B. fehlt es noch an einer vollständigen Ausgabe von Ptolemaios Werken nebst Übersetzung derselben; die von Heiberg in Angriff genommene Ausgabe enthält bekanntlich nur den griechischen Text.

2) Ich verweise beispielsweise auf die noch nicht endgültig entschiedene Frage, ob der von Boncompagni (1851) herausgegebene „Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabula" eine Übersetzung oder eine Bearbeitung von Alkhwarizmis Algebra ist (vgl. A. A. Björnbo, *Gerhard von Cremonas Übersetzung von Alkhwarizmis Algebra und von Euklids Elementen*; Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 239—241).

3) Vgl. G. Eneström, *Über den Bearbeiter oder Übersetzer des von Boncompagni (1857) herausgegebenen „Liber algorismi de pratica arismetrice"*; Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 114.

4) Vgl. A. A. Björnbo, *Über ein bibliographisches Repertorium der handschriftlichen mathematischen Literatur des Mittelalters*; Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 326—333.

Mit der Erfindung der Buchdruckerkunst verändern sich die Verhältnisse insofern, als die schon im Druck vorliegenden Schriften wesentlich genügen, um eine literarische Geschichte der neueren Zeit fertig zu stellen. Aber unter diesen Schriften gibt es viele, nicht nur aus dem 15. und 16., sondern auch aus dem Anfange des 17. Jahrhunderts, die wegen ihrer Seltenheit fast ebenso schwer zugänglich sind als Handschriften, und gewisse Arbeiten oder Aktenstücke harren noch einem kompetenten Herausgeber. Die sehr seltenen Schriften gehören freilich nicht den wichtigsten Arbeiten an, so daß man vorläufig von einer Neuausgabe absehen könnte, aber jedenfalls ist es von Belang, daß ihr wesentlicher Inhalt durch Monographien zugänglicher gemacht wird, sofern solche noch nicht vorhanden sind.[1]) Auch kritische Ausgaben der gesammelten Werke gewisser hervorragender Mathematiker des 16. und des Anfanges des 17. Jahrhunderts wären erwünscht.[2])

Mit Descartes beginnt auch vom literarischen Gesichtspunkte aus eine neue Periode, weil von ihm an die mathematischen Quellenschriften zum größten Teil ziemlich leicht zugänglich sind, so daß man hier eine direkte Behandlung der Geschichte der mathematischen Ideen empfehlen könnte. Indessen muß auch die literarische Geschichte der Mathematik nach Descartes weiter bearbeitet werden. Erfreulicherweise sind gesammelte Werke vieler Mathematiker des 17. und 18. Jahrhunderts schon herausgegeben und auch wichtige Sammlungen von Briefen sind veröffentlicht worden. Auf der anderen Seite gibt es noch in dieser Hinsicht viele Lücken, die auszufüllen sind; so z. B. fehlt es bekanntlich an einer Ausgabe von Leonhard Eulers Werken und von seinem Briefwechsel ist bisher nur ein unbedeutender Teil publiziert worden. Eine andere nützliche Arbeit wäre es, Berichte über den mathematischen Inhalt gewisser weniger leicht zugänglicher Zeitschriften des 17. und 18. Jahrhunderts zu bringen, die mehr beiläufig mathematische Artikel enthalten, und deren Inhalt darum leicht der Aufmerksamkeit der mathematisch-historischen Forscher entgeht.[3])

1) Vgl. z. B. G. Wertheim, *Die Logistik des Johannes Buteo;* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 213—219. — H. Bosmans, *Le „De arte magna" de Guillaume Gosselin;* Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 44—66.

2) So z. B. fehlt es noch an einer vollständigen Ausgabe von Viètes Werken; die alte Ausgabe von F. van Schooten (1646) ist bekanntlich nicht vollständig (der *Canon mathematicus seu ad triangula cum adpendicibus* fehlt) und auch sonst genügt die Ausgabe jetzt kaum den Anforderungen der Kritik.

3) Vgl. z. B. G. Loria, *Il „Giornale de' letterati d'Italia" di Venezia e la „Raccolta Calogerà" come fonti per la storia delle matematiche nel secolo XVIII;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 9, 1899, S. 241—274.

Mit dem Beginn des 19. Jahrhunderts mehrt sich sowohl die Zahl der Mathematiker als die Durchschnittszahl ihrer Schriften. An Ausgaben der gesammelten Werke der meisten dieser Mathematiker ist es noch zu früh zu denken, aber da ihre Abhandlungen in einer großen Anzahl von Zeit- oder Sammelschriften zerstreut sind, so ist es schon aus diesem Grunde von Interesse, gute Monographien mehr literarischer Art zu bekommen, um bei den Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen im 19. Jahrhundert benutzt zu werden. Aus verschiedenen Gründen ist es im allgemeinen angebracht, für jeden besonderen Mathematiker, der zu den Fortschritten seiner Wissenschaft beigetragen hat, eine solche Monographie zu bearbeiten. Teils ist es viel leichter, unter den Fachgenossen Bearbeiter solcher Monographien zu finden, teils können sich die Verfasser derselben gewöhnlich ohne Schwierigkeit das nötige Material fast vollständig verschaffen; ganz besonders angebracht ist das Verfahren, wenn es sich um Mathematiker handelt, deren Muttersprache nicht eine Kultursprache ist, und die sich in ihren Abhandlungen wenigstens teilweise jener Sprache bedient haben. Auf der anderen Seite ist es gewiß sehr zu empfehlen, schon jetzt Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen im 19. Jahrhundert zu bearbeiten; von solchen Darstellungen gibt es ja eine nicht unbedeutende Anzahl,[1]) aber die meisten können keinen Anspruch darauf machen, das ganze Material benutzt zu haben.

Ich habe bisher eigentlich nur von der Herausgabe mathematischer Quellenschriften und Monographien gesprochen, aber natürlich ist es auch von Belang, Übersichten des wesentlichen Inhalts der mathematischen Literatur eines gewissen Zeitraumes[2]) oder einer größeren Abteilung der Mathematik[3]) zu bekommen, noch bevor das ganze für diesen Zweck nötige Material leicht zugänglich gemacht worden ist. Solche Übersichten könnten natürlich auf verschiedene Weise bearbeitet werden. Man kann sich z. B. darauf beschränken, in chronologischer Ordnungsfolge über die betreffenden Schriften zu berichten, und wenn eine solche Arbeit bis auf unsere Tage, oder wenigstens bis zum Jahre 1868, mit dem das Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik beginnt, fortgesetzt

1) Bekanntlich sind auf Anregung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung viele Darstellungen dieser Art in Angriff genommen oder veröffentlicht worden; vom historischen Gesichtspunkte aus sind diese von sehr verschiedenem Wert; einige behandeln die Entwickelung nur im Vorübergehen und beschränken sich hauptsächlich auf den gegenwärtigen Stand der betreffenden Theorie.

2) Vgl. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Herausgegeben von M. Cantor. IV (Leipzig 1907); für den Zeitraum 1759—1799.

3) Vgl. z. B. A. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I—II (Leipzig 1900—1903).

wäre, so hätte man dadurch ein mathematisch-historisches Nachschlagebuch bekommen, das vorläufig den Forschern gute Dienste leisten könnte. Wertvoll sind zuweilen auch Sammlungen von Ergänzungen und Berichtigungen schon erschienener mathematisch-historischer Arbeiten[1]) sowie Hinweise auf die Lücken, die noch von der Forschung auszufüllen sind.[2]) Für die Geschichte der älteren Mathematik sind Übersichten der neuesten Errungenschaften auf diesem Gebiete besonders empfehlenswert, weil die betreffenden Schriften oft in philologischen Zeitschriften, die den Mathematikern schwer zugänglich sind, veröffentlicht werden.[3])

In nahem Zusammenhange mit der literarischen Geschichte der Mathematik steht die mathematische Bibliographie. Leider fehlt es uns noch an einer vollständigen Bibliographie dieser Art,[4]) und darum können bibliographische Spezialuntersuchungen, besonders wenn sie die Angaben viel benutzter mathematisch-historischer Arbeiten berichtigen oder ergänzen, sehr dankenswert sein.[5]) Dasselbe gilt in gewissen Fällen von rein biographischen Untersuchungen und noch mehr von Beiträgen zur Geschichte des mathematischen Unterrichtes.[6]) Wenn man für jede wichtigere Universität eine solche Geschichte bekommen könnte, so würde dadurch die mathematisch-historische Forschung sehr erleichtert werden.

Endlich ist es auch angebracht, von Zeit zu Zeit den Fachgenossen eine gedrängte Übersicht der literarischen Resultate der mathematisch-historischen Forschung mit Verweisen auf die Quellenschriften und die Monographien zu bieten.[7])

1) Vgl. die „Kleinen Bemerkungen" zur letzten Auflage von Cantors *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* in der dritten Folge der Bibliotheca Mathematica.

2) Vgl. die „Anfragen" der Bibliotheca Mathematica.

3) Vgl. z. B. J. L. Heiberg, *Mathematik, Mechanik und Astronomie*; Die Altertumswissenschaft, herausg. von W. Kroll, I (1905), S. 129—143. — K. Tittel, *Mathematik, Mechanik und Astronomie* 1902—1905; Jahresber. für Altertumswiss. **129**, 1906, S. 113—219.

4) Es ist noch unbekannt, wann Herr G. Valentin die Bearbeitung des ihm seit 22 Jahren gesammelten bibliographischen Materials beenden wird, so daß der Druck seiner allgemeinen mathematischen Bibliographie beginnen kann.

5) Zu welchen unrichtigen Folgerungen ungenaue bibliographische Aufschlüsse zuweilen führen können, habe ich in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 277 durch ein Beispiel gezeigt.

6) Vgl. z. B. C. H. Müller, *Studien zur Geschichte ... des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **18**, 1904, S. 51—143.

7) Ein Versuch in dieser Richtung sind z. B. die *Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie bis zum Jahre 1500, mit Hinweis auf die Quellen-Literatur* (Leipzig 1892) von Felix Müller. Im Gebiete der elementären Mathematik kann J. Tropfkes *Geschichte der Elementar-Mathematik* (I—II, Leipzig 1902—1903) für den fraglichen Zweck benutzt werden.

Wenn also noch sehr viel auf dem literarischen Gebiete zu tun ist,[1]) bevor eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik mit Erfolg bearbeitet werden kann, so bedeutet dies, wie ich schon im vorhergehenden angedeutet habe, gar nicht, daß man vorläufig die Bearbeitung der Entwickelungsgeschichte ganz beiseite lassen soll. Nicht nur für den Zeitraum, der mit DESCARTES beginnt, sondern auch für die ältere Zeit ist es nützlich, daß Einzeldarstellungen dieser Art in Angriff genommen werden,[2]) und auch Versuche, auf Grund des schon vorhandenen Materials die ganze Entwickelungsgeschichte der Mathematik zu schildern, sind mit Freuden zu begrüßen.[3]) In diesem Zusammenhange erlaube ich mir auch hier auf den großen Nutzen hinzuweisen, die die mathematisch-historische Forschung davon haben kann, daß größere mathematische Unternehmungen (z. B. Enzyklopädien) auch den Entwickelungsgang der mathematischen Theorien berücksichtigen.[4])

Für eine planmäßige mathematisch-historische Arbeit ist es indessen von Belang, nicht nur daß die schon angegebenen Untersuchungen oder Arbeiten ausgeführt werden, sondern auch daß ihre Resultate in formeller Hinsicht den Anforderungen der Wissenschaft genügen. In erster Linie müssen natürlich die Angaben zuverlässig sein und im Bedarfsfalle durch genaue Zitate oder Verweise belegt werden.[5]) Dies bedeutet freilich nicht,

---

1) Wenn K. TITTEL (a. a. O. S. 118) bemerkt: „Dagegen kann ENESTRÖM in der literarischen Forschung nur eine Tätigkeit von untergeordneter Bedeutung sehen, da er als Spezialist eine Darstellung der Entwickelung sämtlicher mathematischer Theorien fordert, die zum großen Teile nur für den Mathematiker von Fach verständlich sein werden. Von diesem Standpunkt kommt er dazu, CANTOR als einen Forscher zu bezeichnen, der nur als Kulturhistoriker wirken kann, und die Mitarbeit der Historiker und Philologen nicht sehr hoch zu schätzen", so hat er mich durchaus mißverstanden. Schon vor vielen Jahren (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 2) habe ich ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, wie wichtig eingehende mathematisch-literarische Untersuchungen sind, und ich weiß nicht, wie Herr TITTEL dazu gekommen ist, mir die Ansicht zuzuschreiben, die literarische Tätigkeit sei von untergeordneter Bedeutung. Möglicherweise hat er eine Bemerkung von mir, daß „bei der kulturhistorischen Behandlung gewisse Fragen in den Vordergrund treten müssen, die für die Geschichte der mathematischen Ideen von untergeordneter Bedeutung sind" mißverstanden.

2) Die oben (S. 5, Anm. 3) zitierte Arbeit von BRAUNMÜHL ist zum Teil dieser Art.

3) Vgl. H. G. ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Leipzig 1903).

4) Vgl. G. ENESTRÖM, *Ein neues literarisches Hilfsmittel zur Verbreitung mathematisch-historischer Kenntnisse;* Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 398—406.

5) Ein abschreckendes Beispiel in betreff unzuverlässiger und unvollständiger Angaben hat uns Herr MAX SIMON durch seine Arbeit *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert* (Leipzig 1906) zur Verfügung gestellt.

daß nur Tatsachen aber keine Annahmen erwähnt werden dürfen; zu welchem unfruchtbaren Resultate eine Beschränkung auf nackte Tatsachen führen würde, ersieht man am leichtesten, wenn man einige von Boncompagnis Abhandlungen[1]) studiert. Dagegen sollen die Annahmen, die nötig sind, um den gegebenen Stoff zu bearbeiten, immer mit Vorsicht und Sparsamkeit angewendet werden, und als solche hervorgehoben werden.[2])

Bei den literarischen Untersuchungen über ältere mathematische Arbeiten ist es sehr wünschenswert, daß nicht nur über den hauptsächlichen Inhalt derselben berichtet, sondern auch darauf Bezug genommen wird, ob in den Arbeiten etwas vorkommt, daß als Vorbereitung neuer Theorien betrachtet werden kann. Für die Entwickelungsgeschichte können solche Sachen von großem Interesse sein, auch wenn sie nur beiläufig in den betreffenden Arbeiten vorkommen, und darum von den Verfassern selbst nicht hervorgehoben worden sind; zuweilen können sogar unrichtige Sätze verdienen, besonders notiert zu werden, weil sie die Anfänge neuer Theorien enthalten.[3]) Dagegen ist es natürlich unangebracht, in ältere Arbeiten Methoden oder Sätze hineinzulegen, nur weil sie bei flüchtigem Einsehen einer Arbeit dort vorzukommen scheinen, obgleich es sich bei näherer Untersuchung ergibt, daß der Wortlaut auf eine ganz andere Weise aufzufassen ist.[4])

Bei den entwickelungshistorischen Untersuchungen ist natürlich besonders die Berücksichtigung des Zusammenhangs der mathematischen Ideen zu empfehlen. Dieser Zusammenhang kann entweder ein äußerer oder ein rein innerer sein. Ein äußerer Zusammenhang findet statt, wenn die Entdeckungen eines Mathematikers nachweislich durch die Vorarbeiten eines Vorgängers angeregt oder veranlaßt worden sind, ein innerer Zusammenhang dagegen, wenn eine Abhängigkeit nicht anzunehmen oder wenigstens nicht nachzuweisen ist, aber die späteren Entdeckungen von methodischem Gesichtspunkte aus als eine unmittelbare Fortsetzung älterer

1) Siehe z. B. die Abhandlung *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* Atti dell' accad. pontif. de' Nuovi Lincei 16, 1863, 1—64, 101—228, 301—364, 389—452, 503—630, 683—842, 909—1044.

2) Vgl. G. Eneström, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 1—8.

3) Vgl. meine Bemerkung über Albertus de Saxonia und Konvergenzbedingungen in der Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 381—382.

4) Vgl. z. B. meine Bemerkung über das angebliche Vorkommmen des Satzes $u_{x+2} = u_x + 2\Delta u_x + \Delta^2 u_x$ bei Nikomachos (Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 379) und des Satzes von der Gleichungskonstante bei Cardano (Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 212—213).

Untersuchungen betrachtet werden können. Auch auf das Vorkommen der zweiten Art von Zusammenhang mathematischer Ideen aufmerksam zu machen ist meines Erachtens von großen Interesse.[1])

In zweiter Linie erlaube ich mir zu bemerken, daß allzu breite Darstellungen, wenn irgend möglich, vermieden werden sollten. Unter Umständen kann es ja nützlich sein, ausführliche Auskunft über gewisse ältere Schriften oder über die Geschichte einer Theorie zu bekommen, aber wenn die Darstellung zu ausführlich ist, werden viele Leser leicht abgeschreckt, davon Kenntnis zu nehmen.[2]) Natürlich ist die Ausführlichkeit oft eine Geschmackssache, und das Urteil darüber von der Abschätzung der Bedeutung des behandelten Gegenstandes abhängig.

Ich habe schon oben betont, das in betreff der Geschichte der Mathematik im Altertum und zum Teil auch im Mittelalter die Herbeischaffung des Quellenmaterials wesentlich eine Aufgabe der Philologen ist. Die übrige Arbeit liegt natürlich in erster Linie den eigentlichen mathematisch-historischen Forschern ob, und es ist klar, daß diese besonders geeignet sind, die vorzugsweise literarischen Untersuchungen auszuführen. Dagegen könnte es scheinen, als ob man das beste Resultat erzielen würde, wenn man imstande wäre produktive Mathematiker zu bewegen, Einzeldarstellungen der Entwickelung der mathematischen Ideen zu bearbeiten. In der Tat ist ein solches Verfahren meines Erachtens in betreff der Geschichte des 19. und eines Teiles des 18. Jahrhunderts zu empfehlen, aber weniger angebracht hinsichtlich der älteren Zeit. Der produktive Mathematiker interessiert sich nämlich im allgemeinen nur für die Geschichte seines Gebietes und er bekümmert sich weniger um die älteren Untersuchungen auf diesem Gebiete, die vielleicht jetzt einen vollständig überwundenen Standpunkt repräsentieren.[3]) Freilich hat es produktive Mathematiker gegeben, die zugleich wirkliche Historiker waren, und auch jetzt gibt es ausnahmsweise solche, aber mit der Entwickelung der Geschichte der Mathematik

---

1) Vgl. z. B. meine Bemerkung über die WAESSENAER-NEWTONsche Methode zur Auffindung der rationalen Wurzeln einer Gleichung (Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, S. 94).

2) Vgl. z. B. die noch nicht beendete Arbeit von H. BURKHARDT, *Entwicklungen nach oscillirenden Functionen und Integration der Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (Jahresber. d. deutschen Mathem.-Verein. **10**), deren schon erschienene Hefte zusammen etwa *vierzehnhundert* Druckseiten enthalten.

3) Vgl. C. H. MÜLLER, *Mathematik;* Mitteil. d. Gesellsch. für deutsche Erziehungs- und Schulgeschichte **15**, 1905, S. 1 des Sonderabzuges. Als charakteristisch für die Auffassung in gewissen Kreisen von Mathematikern verdient der folgende Ausspruch eines englischen Mathematikers zitiert zu werden: „Si vous étudiez l'histoire des sciences mathématiques, vous resterez sans faire des progrès" (L'enseignement mathém. **9**, 1907, S. 307).

zu einer wirklichen Wissenschaft, die eine ganz besondere Schulung und umfassende Kenntnisse erfordert, werden Mathematiker dieser Art immer seltener werden. Für die Bearbeitung der Entwickelungsgeschichte der Mathematik vor der Mitte des 18. Jahrhunderts müssen also die eigentlichen Historiker Sorge tragen.[1]) Dagegen gibt es eine Weise, wodurch die produktiven Mathematiker der jetzigen und der künftigen historischen Forschung besonders nützlich sein können, nämlich durch Veröffentlichungen wissenschaftlicher Biographien kürzlich verstorbener Mathematiker.

Bei den vorangehenden Ausführungen habe ich vorausgesetzt, daß der Endzweck der mathematisch-historischen Forschung ist, zuletzt eine Geschichte der Entwickelung der mathematischen Ideen zu bringen. Indessen ist es klar, daß auch wer die Geschichte der Mathematik lediglich als eine Geschichte der mathematischen Literatur, also als einen Zweig der allgemeinen Literaturgeschichte betrachtet, ein nützlicher Teilnehmer an der von mir oben empfohlenen planmäßigen Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete sein kann, denn ein großer Teil dieser Arbeit, z. B. die Herausgabe der gesammelten Werke von Mathematikern bezieht sich auf die Geschichte der mathematischen Literatur. Dasselbe gilt auch von denen, die in der Geschichte der Mathematik wesentlich eine Geschichte der mathematischen Charakterzüge des Kulturlebens[2]) sehen wollen, denn um eine solche Geschichte zu bearbeiten, müssen ja zuerst die Schriften, die diese Charakterzüge enthalten, zugänglich gemacht und planmäßig untersucht werden, etwa auf die von mir oben vorgeschlagene Weise.

---

1) Wenn J. Tropfke in seinem Artikel *Mathematik* (Jahresber. über das höhere Schulwesen **20**, 1905, S. 13 des Sonderabzuges) sagt: „Der letztere [Eneström] zielt darauf hin, daß dem produktiven Mathematiker das historische Material immer schön gesichtet zur Hand liegt", so schreibt er mir eine Ansicht zu, die ich nur zum Teil billigen kann. Meines Erachtens ist es von großem Belang, daß das historische Material schön gesichtet zur Hand liegt, aber nicht nur um von den produktiven Mathematikern benutzt zu werden. Noch weniger kann ich die Ausführungen des Herrn Tropfke gutheißen, wenn er zuerst M. Cantor und mich als Vertreter zwei verschiedener Arten der mathematischen Geschichtsschreibung nennt, und dann hinzufügt: „Cantor . . . legt Wert auf die Herausarbeitung des eigentlichen Ideengehaltes", woraus man folgern muß, daß ich nur geringen Wert darauf lege. Im Gegenteil lege ich das größte Gewicht gerade auf die Entwickelung der mathematischen Ideen. Herr Tropfke beruft sich freilich auf den oben (S. 9, Anm. 3) zitierten Artikel von C. H. Müller, scheint aber ein paar darin vorkommende Bemerkungen mißverstanden zu haben.

2) Diese Definition entnehme ich dem Artikel von M. Cantor: *Wie soll man die Geschichte der Mathematik behandeln?* (Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, S. 115.

Dagegen ist vor einigen Jahren eine besondere Auffassung der Geschichte der Mathematik in die Öffentlichkeit gelangt[1]) nach welcher, soviel ich sehen kann, eine ganz andere Art von planmäßiger Arbeit erforderlich sein würde. Nach dieser Auffassung sollte es die Aufgabe der mathematischen Geschichtsschreibung sein, die folgende Frage zu beantworten: „Was bedeutet und was hat zu den verschiedenen Zeiten die Mathematik für die Kultur bedeutet?". Zieht man hier zuerst in Betracht die materielle Kultur, so scheint es, als ob es eigentlich nur nötig wäre, die Entwickelung und den gegenwärtigen Stand der technischen Mathematik zu schildern, um die Frage genügend zu beantworten. Geht man dann zu der geistigen Kultur über, so wäre es wohl zwecklos, die ganze mathematische Literatur durchzuforschen, um ausfindig zu machen, was die Mathematik für diese Kultur bedeutet hat, denn es scheint mir offenbar, daß viele mathematische Ideen keinen merkbaren Einfluß auf dieselbe gehabt haben können. Oder darf man wirklich behaupten, daß z. B. das Fundamentaltheorem der Algebra und die verschiedenen Beweise desselben eine nachweisliche Bedeutung für die Kultur haben? Jedenfalls ist die fragliche Auffassung der Geschichte der Mathematik wesentlich von der diesem Artikel zugrunde liegenden verschieden[2]), und von der Seite der Vertreter jener Auffassung ist kaum eine Teilnahme an einer planmäßigen mathematisch-historischen Arbeit auf die von mir angegebene Weise zu erwarten.

Zuletzt fasse ich den wesentlichen Inhalt dieses Artikels in folgende Punkte zusammen:

1. Eine planmäßige mathematisch-historische Arbeit muß in erster Linie darauf hinzielen, die großen noch vorhandenen Lücken auf dem literarischen Gebiete auszufüllen; an dieser Arbeit ist die Teilnahme der Literar- und Kulturhistoriker sehr willkommen, die der Philologen sogar notwendig.

2. Gleichzeitig mit dieser Arbeit sollen die Historiker der Mathematik, sofern das schon herbeigeschaffte Material nicht zu unvollständig ist, die

1) Siehe S. 53 der S. 6, Anm. 6 zitierten Abhandlung von C. H. Müller; da Herr Müller hervorhebt, daß er Herrn F. Klein eine große Reihe von Gesichtspunkten und Auffassungen verdankt, so kann ich nicht entscheiden, ob diese Auffassung von C. H. Müller selbst oder von F. Klein herrührt.

2) Meiner Ansicht nach kann man von einem gewissen Standpunkt sehr gut sagen, daß es die Aufgabe der Geschichte *des mathematischen Unterrichts* in letzter Linie ist, die Frage zu beantworten: „Was hat zu verschiedenen Zeiten der mathematische Unterricht für die Kultur bedeutet?". Dagegen ist es mir noch nicht recht verständlich, wie man die Geschichte der *Mathematik* behandeln soll, wenn man für dieselbe eine entsprechende Definition aufstellt.

Geschichte der einzelnen mathematischen Ideen vorzugsweise bis gegen das Ende des 18. Jahrhundert bearbeiten und wenn irgend möglich die produktiven Mathematiker anregen, bei der Behandlung der Geschichte der folgenden Zeit behilflich zu sein.

3. Bei den literarischen Untersuchungen soll, so weit möglich, darauf Bezug genommen werden, daß das Material, das zugänglich gemacht wird, in letzter Linie für eine Entwickelungsgeschichte der Mathematik benutzt werden wird.

Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes.

Von FERDINAND RUDIO in Zürich.

Ums Jahr 434 hat ANAXAGORAS im Gefängnis „die Quadratur des Kreises gezeichnet“. So berichtet PLUTARCH, ohne freilich mitzuteilen, worin diese Zeichnung bestanden hat. Ungefähr um jene Zeit haben auch ANTIPHON und HIPPOKRATES ihre Aufsehen erregenden Untersuchungen angestellt und dadurch die Aufmerksamkeit weitester Kreise auf das Problem von der Kreisquadratur gelenkt. Diese Untersuchungen wurden allerdings, wie es scheint, weniger ihrer selbst willen so viel besprochen als wegen der Sophismen, die man dahinter zu entdecken glaubte.

Als Beweis dafür, daß gegen das Ende des fünften Jahrhunderts das Problem von der Quadratur des Kreises bereits eine große Popularität erreicht habe, wird gewöhnlich geltend gemacht, daß ARISTOPHANES in seinem Lustspiele „Die Vögel“[1]) das Problem auf die Bühne gebracht habe. In diesem Lustspiele läßt ARISTOPHANES den Geometer METON[2]) auftreten und mit PEITHETÄROS ein Gespräch führen, in dem sich die folgende Stelle[3]) findet (AR. *Av.* 1001—1009):

ΜΕΤΩΝ.

....

1001 .... *προσθεὶς οὖν ἐγὼ*
τὸν κανόν', ἄνωθεν τουτονὶ τὸν καμπύλον
ἐνθεὶς διαβήτην — μανθάνεις;

ΠΕΙΘΕΤΑΙΡΟΣ

οὐ μανθάνω.

---

1) Zuerst aufgeführt in Athen an den großen Dionysien im März des Jahres 414.

2) Der bekannte Astronom, der ums Jahr 433 den Athenern einen neuen Kalender gab, durch Einführung des nach ihm benannten Mondzirkels von 19 Jahren.

3) Ich zitiere sie nach der Ausgabe von TH. KOCK (1864). Ihr ist auch die Lesart *Πειθέταιρος* entnommen statt der in den Hds. überlieferten *Πεισθέταιρος*.

ΜΕΤΩΝ.

ὀρθῶς[1]) μετρήσω κανόνι προστιθείς, ἵνα
ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος, κἀν μέσῳ
ἀγορά, φέρουσαι δ'ὦσιν εἰς αὐτὴν ὁδοὶ
ὀρθαὶ πρὸς αὐτὸ τὸ μέσον, ὥσπερ δ'ἀστέρος
αὐτοῦ κυκλοτεροῦς ὄντος ὀρθαὶ πανταχῇ
ἀκτῖνες ἀπολάμπωσιν.

ΠΕΙΘΕΤΑΙΡΟΣ.

ἅνθρωπος Θαλῆς.

Die Übersetzung der ganzen Stelle folgt später. Hier sei zunächst darauf aufmerksam gemacht, daß durch das Komma nach *κανόν'* (1002) die Worte *ἄνωθεν . . . καμπύλον* zu *ἐνθεὶς διαβήτην* gezogen sind. Die verschiedenen Ausgaben sind darin nicht einig, doch scheint mir die hier zu Grunde gelegte Lesart durchaus notwendig[2]). Wollte man *ἄνωθεν . . . καμπύλον* zum vorhergehenden *προσθεὶς . . . κανόν'* nehmen (also: „ich lege nun von oben her dies gebogne Lineal da an"), so würde — falls man der Stelle überhaupt einen Sinn beilegen will, worüber noch zu reden sein wird — das „gebogene Lineal" (dem dann nachher das „gerade Lineal" — *ὀρθῷ* [statt *ὀρθῶς*] *μετρήσω κανόνι* — entsprechen würde) doch notwendig auf eine Rektifikation des Kreises hinweisen. Von einer solchen ist aber hier ganz und gar nicht die Rede. Und auch selbst dann könnten die Worte *ἄνωθεν . . . καμπύλον* nur mit Gewalt zu *προσθεὶς . . . κανόν'* gezogen werden[3]): *κανών* bedeutet seiner Natur nach etwas Gerades — einen Rohrstab (*κάννα*), überhaupt einen geraden Stab,

1) In der Ausgabe von KOCK und allen andern, die ich kenne und noch zitieren werde, steht entsprechend der Mehrzahl der Hds. nicht *ὀρθῶς* sondern *ὀρθῷ*. Nach der Ausgabe von FR. H. M. BLAYDES (1882) kommt aber doch auch *ὀρθῶς* vor, und zwar in den beiden Hds. S. (= Ven. Bibl. Marc. 475) und B. (= Par. Bibl. Reg. 2715). Ich halte *ὀρθῶς* für die weitaus bessere Lesart.

2) Sie ist wohl zuerst von KOCK gewählt worden. Von den mir bekannten Herausgebern hat sie aber nur BLAYDES aufgenommen, und zwar mit der Begründung: „Neque enim *ἄνωθεν προσφέρεται ὁ κανών* (the rule) sed *ὁ διαβήτης* (the compasses); neque *καμπύλος* est ille, sed hic". Mit der Lesart von KOCK stimmen ferner überein die Übersetzungen von L. SEEGER (1846), J. G. DROYSEN (aber erst in der 2. Aufl., wohlfeile Ausg. v. 1871) und E. SCHINCK (Reclamausgabe).

Zu *προσθεὶς . . . κανόν'* sind die Worte *ἄνωθεν . . . καμπύλον* gezogen in allen von mir eingesehenen ältesten Ausgaben (z. B. der aldinischen von 1498 [editio princeps] und der Pariser von 1528), sodann bei PH. INVERNIZZI (1794), in der Tauchnitzausgabe (1812—14), bei J. BEKKER (1829), W. DINDORF (1846), A. MEINEKE (1860), TH. BERGK (1900), J. v. LEEUWEN (1902), sowie in den Übersetzungen von J. H. VOSS (1821), J. MINCKWITZ (1881) und J. G. DROYSEN (aber nur in der ersten Aufl. von 1835).

3) Siehe die in Anm. 2 zitierten Worte von BLAYDES.

einen Maßstab, ein Richtscheit, ein Instrument zum Abstecken gerader Richtungen (übertragen: Richtschnur, Regel, Vorschrift). Mit *καμπύλος*, gebogen, ist es schwer verträglich. Und was soll bei einer Zeichnung, die doch auf dem Boden, im Sande, ausgeführt wird, *ἄνωθεν* („von oben her" das Lineal anlegen) bedeuten? Alle diese Schwierigkeiten fallen sofort weg, wenn man *ἄνωθεν . . . καμπύλον* mit *ἐνθεὶς διαβήτην* verbindet: Der Zirkel, *διαβήτης*[1]), der wird von oben eingesetzt, und *καμπύλος* ist ein für *διαβήτης* geradezu typisches Epitheton. Die ältesten Zirkel in ihrer primitivsten Form waren sicherlich einfach durch Umbiegen (*κάμπτειν*) eines geeigneten Stabes hergestellt worden. Als Beleg dafür könnte man, abgesehen von bildlichen Darstellungen[2]), die auf uns gekommen sind, die viel besprochene Stelle in den „Wolken" des ARISTOPHANES (aufgeführt im Jahre 423) heranziehen (178):

„*κάμψας ὀβελίσκον, εἶτα διαβήτην*[3]) *λαβών,*
ἐκ τῆς παλαίστρας θυμάτιον[4]) *ὑφείλετο.*"

„Er [SOKRATES] bog ein klein Bratspießchen, nahm's als Zirkel und — stahl so sich aus der Ringschul ein Stück Opferfleisch." —

Wenden wir uns nun nach diesen Auseinandersetzungen zu dem eigentlichen Inhalte jener Stelle in den „Vögeln". Die Worte, die speziell als auf die Kreisquadratur bezüglich gedeutet werden, sind: „*ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος*" — angeblich: „auf daß der Kreis dir quadratisch (quadriert) werde".

Zu diesen Worten macht bereits der Scholiast (ed. FR. DÜBNER) die Bemerkung: „*Παίζει. ἀδύνατον γὰρ τὸν κύκλον γενέσθαι τετράγωνον*" — „Er scherzt. Denn es ist unmöglich, daß der Kreis viereckig werde". Diese Bemerkung bezieht sich natürlich nicht auf die Unmöglichkeit

1) Der „Ausschreiter". Die Bezeichnung rührt daher, daß der Zirkel beim wiederholten Abmessen immer einen Fuß vor den andern setzt, also ausschreitet wie der Mensch beim Gehen.

2) Man betrachte z. B. den Tasterzirkel mit gebogenen Armen, der p. 91 im 3. Bande des bekannten Werkes von H. BLÜMNER, *Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste bei Griechen und Römern,* abgebildet ist. Für weiteres über Zirkel im Altertume vergleiche man außer diesem Werke noch den Artikel *Circinus* von FR. HULTSCH in der Realenzyklopädie von PAULY-WISSOWA.

3) Diese Stelle, wie natürlich auch die in den „Vögeln", ist zugleich für die Geschichte der mathematischen Terminologie von Interesse. In seinen *Kulturhistorischen Beiträgen* (Erstes Heft, Leipzig 1906, § 45) führt MAX C. P. SCHMIDT als älteste Stelle für das Vorkommen von *διαβήτης* (und zwar in der Bedeutung von Bleiwage) PLAT. *Phileb.* 56 b an. Die Stellen bei ARISTOPHANES sind also wesentlich älter (vielleicht die ältesten, die wir besitzen) und belegen überdies die ursprüngliche Bedeutung des Wortes.

4) Überliefert ist bekanntlich *θοιμάτιον*, was aber keinen Sinn gibt.

einer Quadratur des Kreises, denn zu der Zeit, als die Scholien entstanden, wäre ein derartiges Urteil nicht denkbar gewesen. Die Bemerkung ist vielmehr eine rein naive: Ein Kreis kann doch nicht viereckig werden. Wir werden aber sehen, daß der Scholiast die Stelle trotzdem mißverstanden hat.

Und auch von den Geschichtsschreibern der Mathematik ist die Stelle bisher mißverstanden worden. So sagt MONTUCLA in seiner *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle* (p. 34): „ARISTOPHANE en saisissait l'occasion pour plaisanter dans sa comédie des *Oiseaux*: „Je vais, fait-il dire à un géomètre qu'il introduit sur la scène, la régle et l'équerre[1]) en main, vous quarrer le cercle". Le peuple d'Athènes avait probablement le même penchant que le vulgaire d'aujourd'hui, à donner à ces paroles un sens absurde, et le poète s'en prévalait pour l'exciter à rire. La note d'un scholiaste[2]) grec, qui sur cet endroit remarque savamment qu'il est impossible qu'un cercle soit quarré[3]), confirme le sens que je donne à ces paroles. Il est bien plus naturel que de penser qu'ARISTOPHANE eût en vue les fausses solutions des mauvais géomètres, et leurs erreurs déjà multipliées sur ce sujet; cela ne serait bon qu'auprès d'un peuple de mathématiciens".

Dazu macht der Herausgeber der neuen Auflage folgende Anmerkung: „MONTUCLA se donne ici une peine inutile pour établir un sens qui est tout-à-fait explicite dans ARISTOPHANE; le personnage ne dit point *quarrer le cercle;* mais faire *un cercle quarré.* La première expression serait peut-être trop savante, mais non pas ridicule; tandis que la seconde, dont les termes sont contradictoires, motive un peu la remarque du scholiaste....".

In seiner *Géométrie grecque* macht TANNERY die Bemerkung (p. 114n): „Dès le V[e] siècle, la quadrature du cercle était à Athènes un problème aussi célèbre que la duplication du cube; ARISTOPHANE (*Oiseaux*) met sur la scène l'astronome MÉTON proposant une solution (mécanique?)".

Und ALLMAN sagt in seinem Buche *Greek geometry from THALES to EUKLID* (p. 78): „That the problem was one of public interest at that time, and that, further, owing to the false solutions of pretented geometers, an element of ridicule had become attached to it, is plain from the reference which ARISTOPHANES makes to it in one of his comedies".

Es dürfte nun an der Zeit sein, wenn endlich auch in der mathematischen Literatur davon Notiz genommen würde, was von philologischer Seite längst ausgesprochen worden ist: nämlich daß es sich bei ARISTOPHANES

1) MONTUCLA hätte besser gesagt *le compas* (διαβήτης).

2) Siehe S. 15.

3) Das sagt der Scholiast eben nicht, auch ist „savamment" nicht am Platz.

gar nicht um eine Quadratur des Kreises handelt[1]), aber freilich auch nicht um einen Scherz im Sinne des Scholiasten. Liest man nämlich über die Stelle *ἵνα . . . τετράγωνος* hinaus, so erkennt man aus den Versen *κἀν μέσῳ ἀγορά . . . ἀπολάμπωσιν*, daß METON einen Städteplan entwickelt: Die kreisförmig begrenzte Stadt soll vom Mittelpunkte, dem Markte, aus, nach der Art des Hippodamos, durch gerade Straßenzüge durchschnitten werden. Von einem Quadrate ist ganz und gar nicht die Rede, vielmehr haben die mißverstandenen Worte *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος* den Sinn, daß der Kreis durch zwei aufeinander senkrechte Durchmesser in vier Quadranten zerlegt und in *diesem* Sinne also „vierwinklig“ werde. Gemeint sind dabei die vier rechten Zentriwinkel. Von dieser Erkenntnis aus ergibt sich dann aber ganz ungezwungen, daß dem Dichter eine durchaus richtige geometrische Konstruktion vorgeschwebt hat: Der Kreis ist gezeichnet, ich lege also das Lineal an — *προσθεὶς οὖν ἐγὼ τὸν κανόν'* — und ziehe, etwa von links nach rechts, einen Durchmesser. Nun soll der darauf senkrechte Durchmesser konstruiert werden. Dazu braucht man den Zirkel. Ich setze also von oben her den gebogenen Zirkel da ein — *ἄνωθεν τουτονὶ τὸν καμπύλον ἐνθεὶς διαβήτην* —, und zwar nacheinander in jedem der beiden Endpunkte des ersten Durchmessers, und schlage natürlich jedesmal den Bogen. Dann muß ich wieder das Lineal anlegen und richtig (*ὀρθῶς*) messen, um den Mittelpunkt mit dem Schnittpunkte der beiden Kreisbogen zu verbinden, wie sichs gehört — *ὀρθῶς*[2]) *μετρήσω κανόνι προστιθείς* —, damit der Kreis in vier Quadranten zerfalle — *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος*. Diese Konstruktion (EUKLID ed. HEIBERG I 11) war zur Zeit des ARISTOPHANES längst Gemeingut. Zum Überfluß könnte man dafür noch das Zeugnis des PROKLUS anrufen, der die Lösung ähnlicher Konstruktionen

1) Freilich sind auch bis heute noch die verschiedenen Bearbeiter und Übersetzer des ARISTOPHANES keineswegs einmütig in dieser Sache. Daß es sich nicht um eine Quadratur handelt, scheint zuerst J. G. DROYSEN (1835) erkannt zu haben. Er übersetzt *ἵνα . . . τετράγωνος* mit: „damit vier Zentriwinkel der Kreis Dir bildet“, wodurch die Sache ganz richtig bezeichnet wird. Dieser Auffassung schließt sich auch TH. KOCK an. Bei allen andern der von mir genannten Übersetzer oder Herausgeber kommentierter Ausgaben aber ist die Stelle als Kreisquadratur oder auch schlechtweg als absichtlicher Unsinn gedeutet: „daß der Zirkelschlag Dir werde viereckt“ (J. H. VOSS), „und bild' ein Viereck aus dem Kreis“ (L. SEEGER), „ita ut circulus exsistat tibi quadratus“ (W. DINDORF), „daß der Kreis ein Viereck bilde“ (J. MINCKWITZ), „damit ein Viereck werde aus dem Kreis“ (E. SCHINCK) usw. (Siehe ferner S. 18, Anm. 2.)

2) Mir scheint, daß *μετρήσω* geradezu *ὀρθῶς* fordere (s. S. 14, Anm. 1); *ὀρθῷ* gibt auch wirklich gar keinen rechten Sinn. Sehr wahrscheinlich ist aber die Lesart *ὀρθῷ κανόνι* dem *κανόν' . . . καμπύλον* zuliebe entstanden (gerades und krummes Lineal, s. S. 15).

(insbesondere Eukl. I 12) dem Önopides[1]) zuweist. Und Önopides war „um weniges jünger als Anaxagoras“ (500—428). Man müßte sich schließlich auch fragen, was denn eigentlich den Inhalt der „Elemente“ des Hippokrates gebildet haben sollte.

Daß freilich Peithetäros auf die Frage Metons erklärt, die Geschichte nicht zu verstehen, das ist in der Komödie ganz in der Ordnung. Die ganze Stelle wäre nun also etwa folgendermaßen zu übersetzen:

Meton.

Ich leg' das Lineal nun an
und setz' von oben den gebognen Zirkel ein —
verstehst Du, was ich will?

Peithetäros.

Nein ich verstehe nichts.

Meton.

Dann leg' ich an das Lineal und messe recht,
auf daß vierwinklig werde Dir der Kreis, und in
der Mitt' der Markt, und Straßen führen geradeswegs
auf ihn als Zentrum, just so wie von einem Stern,
mit rundem Kerne, Licht in geraden Linien rings
erstrahlt nach allen Seiten.

Peithetäros.

Der reinste Thalesmensch!

Wir kommen nun zu der grundsätzlichen Frage (S. 14), ob es überhaupt gerechtfertigt ist, der ganzen Stelle einen Sinn beizulegen, oder ob das nicht als eine Pedanterie bezeichnet werden muß, durch die die Komik der Situation beeinträchtigt oder geradezu aufgehoben wird. Die Komik könnte ja nach dem Plane des Dichters eben darin bestehen, daß Meton in scheinbar gelehrter Sprache zusammenhangslosen und schlechterdings unverständlichen Unsinn vorbringen soll.[2])

1) Diese Konstruktionen sind aber jedenfalls viel älter. Denn sie gehören zu den unentbehrlichsten Elementen der Reißkunst und müssen also schon den Ägyptern bekannt gewesen sein und daher sicherlich auch dem Thales.

2) Das ist, mehr oder weniger entschieden ausgesprochen, die Meinung von fast allen, die sich mit der Stelle beschäftigt haben. Voss sagt: „In der folgenden Messung ist Verworrenes und Unsinniges mit Fleiß gemischt“. In den Ausgaben von Invernizzi und Bekker finden sich die folgenden von L. Kuster und R. F. Ph. Brunck herrührenden Anmerkungen: „Serione haec an joco dicis, Comicorum lepidissime? Si serio, videtur quadratura circuli, tanto labore et studio a Mathematicis nostris quaesita, sed nondum inventa, seculo tuo non fuisse ignota. Sed absit ut haec credam. Notiores enim mihi sunt facetiae tuae et sales, quam ut risus gratia haec a te dici, latere

Nehmen wir die Sache, wie sie liegt. Sicher ist jedenfalls, daß METON einen Städteplan entwickeln und dabei die kreisförmig begrenzte Stadt durch zwei Durchmesser in vier Quartiere zerlegen will. Die Bemerkung „und in der Mitt' der Markt" sowie das Bild mit dem Stern und seinen Strahlen müßten die letzten Zweifel über die Deutung der Worte *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος* beseitigen. An und für sich also enthalten die Worte 1005—1009 des METON nicht das Allergeringste, was man als Unsinn bezeichnen könnte. Die Worte 1001—1004 sollen nun die Ausführung der Konstruktion andeuten. Zu dieser ist nötig, daß man ein Lineal anlege, sodann den Zirkel benutze und dann wieder ein Lineal anlege und richtig messe. Nun — genau das, und in derselben Reihenfolge, sagt auch METON, nicht mehr und nicht weniger. Man mag sich drehen und wenden, wie man will, man kann mit dem besten Willen seine Worte nicht als Unsinn deuten — solange nämlich die Interpunktion von KOCK gilt.

Will man nun aber trotzdem an der Stelle lieber einen Unsinn haben, in der Meinung, daß das der Komik besser entspreche, so hat ja schon BLAYDES (S. 18, Anm. 2) den Weg dazu bezeichnet: dann braucht man nur das Komma hinter *καμπύλον*, statt hinter *κανόν'*, zu setzen. Liest man dann noch *ὀρθῷ κανόνι* und übersetzt überdies *τετράγωνος* mit

mihi queat". (KUSTER.) — „Mathematicos salse irridet Comicus, Metonem introducens, ridicula et absurda de arte sua effutientem: talis est circulus ille quadratus ..." (BRUNCK.) SEEGER erklärt: „Das geometrische Geschwätz ist absichtlich Unsinn". MINCKWITZ urteilt: „Eine karikierte Messungsgeschichte". BLAYDES fügt seinen, S. 14, Anm. 2, zitierten Worten vorsichtig hinzu: „Nisi nugari METONEM statuas, quod confirmare videatur PEISETAERI responsum *οὐ μανθάνω*". Und LEEUWEN gibt zu den Worten 1002—1005 des METON die Erklärung: „METONIS haec verba intellegere velle, id est operam dare ut suo joco frustretur comicus; qui quomodo ea vellet accipi, PISETAERI verbulo „*οὐ μανθάνω*" aperte profecto significavit. Itaque non est aegre ferendum quod commemorantur nunc *incurvata regula* et *circulus quadratus*, sed consulto noster usus est verbis tam egregie absurdis ut ne eos quidem spectatores fallere possent qui cum ipso poeta ab arte METONIS essent alienissimi. Sic etiam hodie [s. dazu die Bemerkung von MONTUCLA, S. 16], si indicandum est studium insanum, aut *perpetuum mobile* aliquis quaerere jocose dici solet aut *circuli quadraturam* ..."

Dagegen geht aus den Anmerkungen der Ausgabe von KOCK hervor, daß dieser die Stelle ernsthaft nimmt und ihr den Sinn beilegt, der auch in unserer Übersetzung zum Ausdruck gekommen ist.

Bemerkenswert ist sodann die Haltung von DROYSEN der Stelle gegenüber: In der ersten Ausgabe, die noch das „gebogne Lineal" hatte, findet sich die Anmerkung: „Gewiß soll da keine ausführbare geometrische Konstruktion beschrieben sein". In der zweiten Auflage ist mit dem „gebognen Lineal" auch diese Anmerkung dahin gefallen und das „gerade Lineal" ist durch den „Quadranten" ersetzt. DROYSEN ist also offenbar zu der Überzeugung gekommen, daß der Stelle ein vernünftiger Sinn beigelegt werden muß.

„viereckig", so dürfte die Sinnlosigkeit wohl nichts mehr zu wünschen übrig lassen. Freilich stellt sich dann aber doch gleich eine gewisse Unbehaglichkeit ein, wenn man gewahr wird, daß der vermeintliche Unsinn schließlich zu einem ganz bestimmten, klaren Plane führt, dessen Darlegung dem ganzen Tone nach zum Vorhergehenden gar nicht recht passen will.

Ist das nun aber wirklich eine des ARISTOPHANES würdige Komik, wenn er den METON auftreten läßt, damit er Worte hinrede, die keinen Sinn und Verstand und auch keinen Zusammenhang haben? Ist das überhaupt komisch? Man ziehe etwa als Vergleich den übermütigen Unsinn heran, den SOKRATES in den „Wolken" bei der Erklärung von Donner und Blitz entwickelt. Das ist ja ganz gewiß toller Unsinn, und natürlich beabsichtigter Unsinn, aber doch schließlich Unsinn, der Methode hat, der in sich begründet ist und über den man noch lachen kann. Über METON aber, der dann mit seinem Unsinn zuletzt auch noch ganz entgleist, könnte man sich höchstens ärgern.

ARISTOPHANES hatte es übrigens auch gar nicht nötig, bei seinem METON zu so inferioren Mitteln zu greifen, um eine komische Wirkung zu erzielen. Der mit Instrumenten beladene Mathematiker, der ungerufen und sehr überflüssigerweise plötzlich erscheint und seine Pläne auseinandersetzt, ist an und für sich eine komische Figur, und er wirkt ganz gewiß um so komischer, je ernsthafter und wissenschaftlicher er seine Sachen vorbringt. Dazu kommt noch, daß METON durch seine Kalenderreform (aber auch durch sein politisches Verhalten) eine stadtbekannte Persönlichkeit war, an die sich so wie so mancher Witz angeknüpft haben mag. Immerhin dürfen wir doch wohl annehmen, daß ARISTOPHANES nicht den METON selbst hat lächerlich machen wollen, so wenig wie in den „Wolken" den SOKRATES. In beiden Fällen galt sein Spott der Afterwissenschaft, den Auswüchsen der Gelehrsamkeit, die sich allenthalben breit machten.

Man könnte nun aber trotzdem finden, es dürfte doch vielleicht in den Worten des METON noch irgend ein Scherz versteckt sein. Damit komme ich zu dem Ausgangspunkte meiner Arbeit und zu dem eigentlichen Thema zurück.

Wenn die Worte des METON, insbesondere *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος*, sich nicht auf eine Kreisquadratur beziehen, so würde unsere Untersuchung damit zu dem Ergebnis führen, daß der Name ARISTOPHANES aus der Geschichte der Kreismessung zu streichen sei. Es scheint mir aber, daß ein Umstand dabei bisher nicht beachtet worden ist: Um zu sagen, daß der Kreis in vier Quadranten zerlegt, also gevierteilt werden solle, bedient sich ARISTOPHANES des Ausdrucks *„ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος"* — „auf daß vierwinklig (wörtlich!) werde Dir der Kreis".

Das ist eine ganz ungewöhnliche und im höchsten Grade auffallende Ausdrucksweise. Es ist kein Wunder, daß sie irre geführt hat. Hätte ARISTOPHANES den Kreis nur schlechtweg vierteilen wollen, so hätte er *τετραχίζειν* sagen können oder er hätte nach Analogie von *τριχοτομεῖν* ein neues Wort gebildet. *τετράγωνον γενέσθαι* ist aber dafür, zunächst wenigstens, gar kein passender Ausdruck. Das Wort *τετράγωνος* hatte zur Zeit des ARISTOPHANES bereits seine fertige Bedeutung „viereckig", insbesondere „quadratisch". Machen, daß eine Figur *τετράγωνος* (oder besser ein *τετράγωνον*) werde, war ein fertiger, technischer Ausdruck, der eben „quadrieren" d. h. „ein inhaltsgleiches Quadrat herstellen" bedeutete. Auch existierten schon die dazu gehörigen termini *τετραγωνισμός* und *τετραγωνίζειν*. Das alles dürfen wir mit Sicherheit aus dem Referate des EUDEMUS über die Quadraturen des HIPPOKRATES schließen. Wenn also der sprachgewandte ARISTOPHANES, der Meister im Wortspiel, für seine Zwecke die Ausdrucksweise *ἵνα ὁ κύκλος γένηταί σοι τετράγωνος* gebrauchte, so konnte das nur in einer bestimmten Absicht geschehen, denn er mußte sich der Zweideutigkeit bewußt sein. Diese Absicht liegt nun aber jetzt klar zutage: er wollte eben einen Scherz machen, ein Wortpiel. Ganz wörtlich heißt ja *τετραγωνίζειν* „vierwinklig (*γωνία*) machen". ARISTOPHANES kannte vom Hörensagen das Problem von der Quadratur des Kreises. Er wußte, daß es den Mathematikern nicht gelingen wollte, den Kreis „vierwinklig" zu machen, und er löste nun die schwere Aufgabe auf seine Art, indem er durch zwei Durchmesser die vergeblich gesuchten vier Winkel um den Mittelpunkt versammelte. Der Scherz ist nicht schlecht und des ARISTOPHANES nicht unwürdig. Und es hat auch nichts unwahrscheinliches an sich, daß ARISTOPHANES diesen Scherz, der sich ihm gelegentlich aufgedrängt haben mag, auf die Bühne brachte. Des Lacherfolges durfte er zum voraus sicher sein: Bei den Kundigen selbstverständlich, und bei den Unkundigen erst recht. Denn die konnten über den verrückten Mathematiker lachen, der darauf ausging, den Kreis viereckig zu machen, und von dem sie auch schon gehört hatten, daß er die ganze Zeitrechnung in Unordnung gebracht habe[1]). —

Für die Geschichte der Mathematik dürfte sich nun aus unserer Untersuchung das folgende Resultat ergeben:

ARISTOPHANES bringt in den „Vögeln" nicht die Kreisquadratur auf die Bühne, sondern die Zerlegung des Kreises in vier Quadranten durch Konstruktion von zwei aufeinander senkrechten Durchmessern[2]).

---

1) Darüber scherzt ja auch ARISTOPHANES in den Wolken 607—626.

2) Daß diese Konstruktion zur Zeit des ARISTOPHANES (mehr als ein Jahrhundert

ARISTOPHANES bedient sich dabei einer Ausdrucksweise, die eine wohlbeabsichtigte und scherzhafte Anspielung auf das Problem von der Kreisquadratur enthält. Die Stelle ist daher, wenn auch in anderem Sinne, als man bisher glaubte, in der Tat ein Beleg dafür, daß das Problem von der Quadratur des Kreises gegen das Ende des fünften Jahrhunderts bereits eine große Popularität erreicht hatte.

---

vor EUKLID) bekannt war, wissen wir zwar längst aus andern Quellen (z. B. PROKLUS). Da aber die Berichte über die Entwickelung der Geometrie vor EUKLID nur sehr spärlich sind, so ist auch dieser Beleg aus ARISTOPHANES willkommen.

Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Das Ms. Gol. 14 der Universitätsbibliothek in Leiden[1]) enthält Abschriften von ältern Manuskripten, die der berühmte Orientalist Jac. Golius durch einen Derwisch Aḥmed in Aleppo und einen in Amsterdam wohnenden christlichen Araber in den Jahren 1627 u. ff. für seinen Gebrauch ausführen ließ. Die 29 Abhandlungen sind zum größten Teile mathematischen Inhaltes; unter denselben befinden sich zwei sehr wichtige: Nr. 1, die Übersetzung des 5.—7. Buches der Kegelschnitte des Apollonius durch Ṭâbit b. Qurra (p. 1—163) und Nr. 2, die Algebra des 'Omar b. Ibrâhîm el-Chaijâmî (p. 175—218). Auch die Abhandlung Nr. 15 (p. 300—314) von el-Bîrûnî[2]): „fi tasṭîḥ el-ṣuwar we tabṭîḥ el-kuwar" (über die Ausbreitung [Projektion] der Sternbilder und Länder, d. h. über Himmels- und Erdkarten) mag von größerem Interesse sein, leider fehlen im Texte die Figuren; ich werde vielleicht später über dieselbe einige Notizen veröffentlichen. Überhaupt sind die für Golius gemachten Abschriften nicht frei von Lücken, Wiederholungen, falscher Schreibweise von Wörtern, schlechten Figuren, aber im ganzen recht deutlich geschrieben, so daß das Lesen gar keine Mühe macht. Im folgenden gebe ich den Inhalt einiger kleineren, in verschiedener Richtung interessanten, geometrischen Abhandlungen teils in wörtlicher, teils in gekürzter Übersetzung wieder.

---

1) Auch für Überlassung dieses Mss. für längere Zeit spreche ich der Verwaltung der Universitätsbibliothek in Leiden meinen verbindlichsten Dank aus.

2) Diese Abhandlung ist anonym; nach dem Verzeichnis der Schriften el-Bîrûnîs (vergl. *Chronologie oriental. Völker von Albêrûnî, herausgeg. von E. Sachau*, Leipzig 1878, p. XLIII, und H. Suter, *Nachträge und Berichtigungen* etc., in Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften, 14, 1902, p. 171) und der Widmung der Abhandlung an den Malik el-'Âdil Chwârezmschâh ist aber kein Zweifel möglich, daß sie von el-Bîrûnî stamme; der Katalog von Leiden enthält hierüber keine Angabe.

I. Verdeutlichung des Beweises zur Rechnung der beiden Fehler, in der Verbesserung des Abû Sa'îd Ǧâbir b. Ibrâhîm el-Ṣâbî.[1])

Diese Abhandlung mit dem Kommentar von AḤMED B. EL-SURRÎ[2]) bildet die Nummern 3 und 4 des Ms. Gol. 14 (p. 218—223); Nr. 4 enthält nämlich nicht nur, wie der Verfasser des Kataloges annimmt[3]), den Kommentar, sondern die Fortsetzung des Textes mit Glossen untermischt, so daß also unsere Abhandlung erst p. 223 schließt. Nach dem Titel zu schließen, müssen vor ǦÂBIR B. IBRÂHÎM schon ein oder mehrere Beweise zur Regel der beiden Fehler vorhanden gewesen sein, die aber den Sabier nicht befriedigt haben; in der Tat hatte schon QOSṬÂ B. LÛQÂ eine Abhandlung hierüber unter dem Titel „über den Beweis zur Regel der beiden Fehler“ verfaßt.[4]) Diese Abhandlung ist in der Bibliothek des India Office (Nr. 1043,12°) noch vorhanden, war mir aber leider nicht zugänglich. Der Verfasser des Katalogs, O. LOTH, bemerkt hierzu (p. 299): „A revised edition of this treatise by JÂBIR B. IBRÂHÎM ṢÂBÎ seems to be contained in Cat. Lugd. III. 59“. Ob aber unsere Abhandlung sich an diejenige QOSṬÂS anlehne, ergibt sich keineswegs aus derselben, der letztere Name wird darin nicht erwähnt, überhaupt ist gar kein Vorgänger genannt.

Da der Beweis selbst etwas verfehlt ist, so wäre es eine unnütze Mühe, eine vollständige wörtliche Übersetzung desselben geben zu wollen; ich kürze also wesentlich ab und bediene mich so oft als möglich unserer heutigen Darstellungsweise.

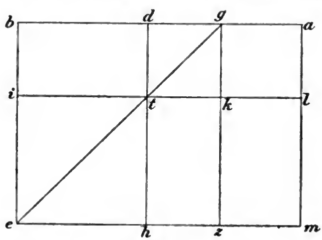


Fig. 1.

ǦÂBIR EL-ṢÂBÎ geht von dem richtigen Satze aus, daß, wenn eine Strecke ab in drei beliebige Teile ag, gd, db geteilt ist, dann die Gleichung besteht:

$$ab \,.\, gd + ag \,.\, bd = ad \,.\, bg.$$

1 Vergl. SUTER, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* etc., in den Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften 10, 1900, p. 69. Der arabische Titel heißt: "Îḍâḥ el-burhân 'alâ ḥisâb el-chaṭâ'ain".

2) Vergl. l. c. p. 120; EL-SURRÎ muß es wohl heißen (nicht "el-Surâ" und nicht "el-Serî") nach dem Buche SOJÛṬIS, *De nominibus relativis*, herausgeg. von P. J. VETH, Leiden 1840, p. 136. b. (= ben) fehlt wohl irrtümlich im Ms.

3) *Catal. cod. orient. bibl. acad. Lugd. Batav.* Vol. III, p. 59.

4) Vergl. SUTER, *Die Mathem. u. Astronom.* p. 41.

Ob dieser Satz griechisches oder arabisches Eigentum sei, können wir nicht entscheiden, bei EUKLID findet er sich unseres Wissens nicht. EL-ṢÂBÎ gibt folgenden Beweis davon: Man beschreibe [Fig. 1] über bg das Quadrat bz, ziehe seine Diagonale eg, mache $bi = dg$, ziehe $il \parallel ab$, und durch den Punkt t $dh \parallel be$, und vervollständige das Rechteck $abem$, so ist, da dk ein Quadrat, auch ih ein solches; es ist nun bekanntlich:

$$\text{Rechteck } bk = \text{Rechteck } gh$$
$$\text{,, } az = \text{,, } az$$

$$\text{Addiert: Gnomon } bamzki = \text{Rechteck } ah$$
$$\text{oder: } ab \,.\, bi + mz \,.\, kz = ad \,.\, dh$$
$$\text{oder: } ab \,.\, gd + ag \,.\, bd = ad \,.\, bg \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nun setzt ǦÂBIR ag gleich der ersten Annahme α_1 der regula falsi, und gd gleich dem ersten Fehler $f(\alpha_1)$, ferner $ab = \alpha_2$ und $bd = f(\alpha_2)$, dann erhält er aus obiger Gleichung für die unbekannte Größe ad den Ausdruck:

$$ad = x = \frac{\alpha_1 f(\alpha_2) + \alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_1) + f(\alpha_2)}$$

der richtig ist in dem Falle, wo die Fehler $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ verschiedene Vorzeichen haben, hier aber absolut genommen werden.

ǦÂBIR scheint aber nicht erkannt zu haben, daß dieser Beweis nur für einen ganz speziellen Fall zutrifft, nämlich für den Fall, wo $f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$ genau gleich $bg = \alpha_2 - \alpha_1$ ist. Das hat auch der Glossator AḤMED B. EL-SURRÎ eingesehen, indem er bemerkt, daß es hier zur Berechnung der Unbekannten ja gar keiner Multiplikation und Division bedürfe, denn x wäre ja einfach $= ag + dg = \alpha_1 + f(\alpha_1)$, oder $= ab - bd = \alpha_2 - f(\alpha_2)$. Ein anderer Fehler, den der Glossator dem Verfasser vorwirft, ist aber unbegründet, er scheint übersehen zu haben, daß ǦÂBIR EL-ṢÂBÎ bei der Anwendung seines geometrischen Satzes auf die Regel der beiden Fehler andere Buchstaben annimmt als in der Beweisfigur, und scheint auch den Sinn einiger allerdings undeutlicher Stellen nicht richtig aufgefaßt zu haben; wir wenigstens haben keinen andern Fehler als den eben besprochenen gefunden, auch nicht in der Fortsetzung der Abhandlung, wo der Verfasser die Beweise für die Fälle gibt, wo die Fehler $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ beide gleiches Zeichen haben, also α_1 und α_2 entweder beide größer oder beide kleiner als ad sind; auf diese Beweise treten wir hier aber nicht mehr ein, sie sind leicht aus dem ersten abzuleiten.

Ein bedeutender mathematischer Kopf kann ǦÂBIR allerdings nicht gewesen sein, sonst hätte er seinen Fehler erkannt und sich leicht zu helfen gewußt, er hätte seinen Beweis in folgender Weise verallgemeinern können:

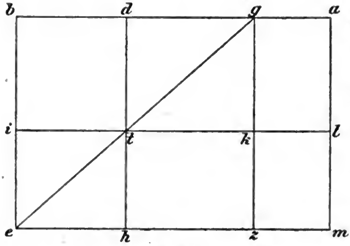


Fig. 2.

Es sei [Fig. 2] $ag = kl$ wieder $= \alpha_1$ und $gk = bi = f(\alpha_1)$ ferner wieder $ab = li = \alpha_2$ und $ie = kz = f(\alpha_2)$, dann ist wieder, ohne daß bz, dk und ih Quadrate zu sein brauchen:

Gnomon $bamzki$ = Rechteck ah

oder: $ab \cdot bi + kl \cdot kz = ad \cdot dh$,

$$\text{oder: } \alpha_2 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_2) = ad\,[f(\alpha_1) + f(\alpha_2)]$$

also:

$$ad = x = \frac{\alpha_2 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_2)}{f(\alpha_1) + f(\alpha_2)}$$ [1])

Dies hat auch der Glossator AḤMED B. EL-SURRÎ nicht erkannt. Es bliebe uns immerhin noch ein Weg übrig, die Ehre ǦÂBIRS zu retten, wenn wir nämlich annehmen wollten, er habe wohl gewußt, daß die Strecken $bd = \alpha_2 - x$ und $gd = x - \alpha_1$ nicht die Fehler $f(\alpha_2)$ und $f(\alpha_1)$ selbst, sondern nur ihnen proportionale Größen seien, und daß man unbeschadet der Richtigkeit des Resultates auch diese dafür setzen könne, sagt er doch nie: „so ist gd der erste Fehler", sondern nur: „so nennen wir gd den ersten Fehler"; aber in diesem Falle hätte er seiner Abhandlung den Satz beifügen müssen, daß die Fehler der Resultate den Differenzen $x - \alpha_1$ und $\alpha_2 - x$ proportional sind.

Wir ersehen aus dieser Darstellung, daß bei den arabischen Mathematikern Versuche gemacht worden sind, die Regel der beiden Fehler auf geometrischem Wege zu beweisen; vielleicht ist auch der richtige Beweis später noch gefunden worden, wir wissen es nicht. Aber wir verstehen nun die Bemerkung IBN EL-BENNÂS in seinem *Talchîṣ*, daß die Methode der Wagschalen auf Geometrie beruhe; den Beweis gab er aber nicht, und wollte auch mit seiner Figur keineswegs etwa an denselben erinnern, wie vermutet worden ist.[2]) In diesem Sinne sind also die Erörterungen M. Cantors[3]) über diese Frage zu berichtigen.

Man entschuldige uns, wenn wir hier folgende Bemerkung nicht unterlassen können. In der Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, p. 419 führt G. ENESTRÖM eine Stelle aus einem Briefe G. WERTHEIMS v. J. 1900 an, die lautet: „überhaupt ist die Erfindung des doppelten falschen Ansatzes

1) Dieses Resultat ergibt sich bekanntlich einfacher aus der Ähnlichkeit der Dreiecke gtk und eit.

2) Vergl. MATTHIESSEN, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra* etc., 2. Ausg. Leipzig, 1896, p. 924—926.

3) *Vorlesungen über Geschichte der Mathem.* I², p. 760 f.

nach meiner Ansicht erst im 12. Jahrh. erfolgt". Diese Ansicht wird nun wohl durch die obige Abhandlung endgültig widerlegt sein; sie hätte aber auch nie aufgestellt werden sollen, wenn man erstens den Titel der jedenfalls im 12. Jahrh. ins Lateinische übersetzten Abhandlung „Liber augmenti et diminutionis, etc." und ihren Inhalt genauer studiert hätte, und zweitens berücksichtigt hätte, daß in dem vor 990 geschriebenen *Fihrist* an drei Stellen Abhandlungen „über die beiden Fehler" genannt werden (vergl. Suter, *Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist* etc., in den Abhandlungen zur Gesch. d. Mathem. **6**, 1892, p. 37).

II. Eine Aufgabe der Höhenmessung von Abû 'Alî b. el-Haiṯam.

Diese Aufgabe befindet sich in Nr. 8 unseres Codex (p. 236—237); sie stammt von dem bedeutenden ägyptischen Mathematiker Ibn el-Haiṯam (Alhazen)[1]), und findet sich in der Tat auch im Verzeichnis seiner Schriften erwähnt. Da sie von nicht gewöhnlichem Interesse ist, gebe ich hier ihre wörtliche Übersetzung.

„Abhandlung des Schaich Abû 'Alî b. el-Haiṯam über die Kenntnis der Höhe der aufrechtstehenden Gegenstände, der Berge und der Wolken. Wir setzen voraus [Fig. 3], daß *ab* die Höhe eines Berges oder andern Gegenstandes sei, die wir kennen wollen. Wir stellen in einem Punkte des Erdbodens einen Gegenstand (Stab) senkrecht auf, es sei dieser *de*, dann gehe der Beobachter von demselben aus vorwärts und wieder rückwärts, bis er die Spitze des Berges und die Spitze des Stabes als *einen* Punkt[2]) sieht; der Ort des Auges sei *g*, der Sehstrahl sei *gea*, und es werde *bdg* als gerade Linie

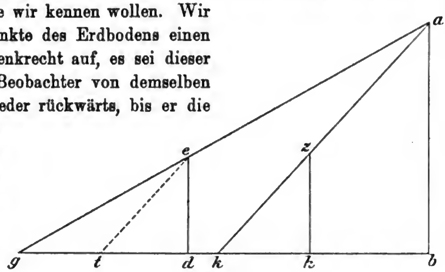


Fig. 3.

auf der Oberfläche der Erde vorausgesetzt, so ist $gb : ab = gd : de$[3]); hierauf stelle man den Stab *de* an einem dem Berge näher gelegenen Orte *h* auf, es sei also der Stab (in neuer Stellung) *hz*, und der Beobachter gehe wieder vorwärts und rückwärts, bis er die Spitze des Berges und

---

1) Suter, *Die Mathem. und Astron. d. Araber* etc. in den Abhandlungen zur Gesch. d. mathem. Wissensch. **10**, 1900, p. 91—95.

2) Wörtlich „zusammen".

3) Die Proportionen gebe ich auch in der wörtlichen Übersetzung in heutiger Form.

des Stabes als *einen* Punkt sieht, der Ort des Auges sei in diesem Falle k, und der Sehstrahl sei kza, dann ist $ab : bk = zh : hk$, und weil die Linie bk kleiner als bg ist, ist auch hk kleiner als gd, also schneiden wir von gd ein Stück gleich hk ab, es sei dies dt, dann ist $dt : de = hk : hz$, aber es ist auch $gb : ab = gd : de$, und ebenso $ab : bk = de : dt$, da $de = zh$ und $dt = kh$ ist; also ist auch $gd : dt = gb : bk$, mithin auch durch Trennung (Zerlegung)[1]) $gt : dt = gk : bk$; aber es ist $dt : de = bk : ab$, also auch $gt : de = gk : ab$, folglich $gk \cdot de = gt \cdot ab$; wird nun also das bekannte gk mit dem bekannten de multipliziert und das Produkt durch das (bekannte) gt dividiert[2]), so ergibt sich das (gesuchte) ab, w. z. b. w. Beendigt ist die Abhandlung, Lob sei Gott etc.".

Am Schlusse der Abhandlung steht noch, von wem hinzugefügt wissen wir nicht: „Es sagt der gelehrte, vortreffliche SA'D EDDÎN AS'AD B. SA'ÎD EL-HAMADÂNÎ[3]): Man multipliziere die Entfernung der beiden Standorte mit dem Maßstab und teile das Produkt durch den Unterschied der beiden Schatten (Cotangenten) an den beiden Standorten (d. h. $gd - kh$), so erhält man die gesuchte Höhe des Gegenstandes".

Vergleicht man diese Lösung mit der heutigen trigonometrischen

$$ab = \frac{gk \,.\, \sin akb \,.\, \sin agb}{\sin gak}$$

so sieht man, daß jene wesentlich einfacher ist; die heutige erfordert (ohne Logarithmen) zwei Multiplikationen und eine Division, diejenige der Araber nur eine Multiplikation und eine Division; berücksichtigt man noch, daß die trigonometrischen Funktionen bei den Arabern in Sexagesimalbrüchen ausgedrückt wurden, so wird die Vereinfachung noch bedeutender; auf Genauigkeit aber kann das arabische Verfahren natürlich keinen Anspruch machen. Daß IBN EL-HAIṮAM nicht einen kürzern Beweis für seine Lösung gefunden hat, ist auffallend und uns nicht recht erklärbar, hat er sich doch in seinen bis jetzt bekannten Schriften als einen tüchtigen Geometer erwiesen; der einfachste Beweis ist jedenfalls folgender:

Dreieck get[4]) $\sim$ Dreieck gak, ebenso Dreieck $edt \sim$ Dreieck abk, also: $gt : gk = te : ka = de : ab$ und hieraus:

---

1) el-tafṣîl (= Trennung, Zerlegung) nennen die arab. Mathematiker die Herleitung der Proportion $a - b : b = c - d : d$ aus $a : b = c : d$.

2) Hier ist vergessen hinzuzufügen, wieso gt bekannt sei, es ist gleich $gd - kh$.

3) Dieser Gelehrte ist wahrscheinlich ein Zeitgenosse von AḤMED B. EL-SURRÎ, denn dieser erwähnt einen Ausspruch des ersteren über die Regel der beiden Fehler in seinen Glossen zur Abhandlung des ĞÂBIR B. IBRÂHÎM EL-ṢÂBÎ und fügt zu seinem Namen hinzu: adâma allâhu 'uluwwahu = Gott erhalte seine Größe!

4) Die Linie et ist allerdings in der Figur des Mss. nicht gezogen.

$$ab = \frac{gk \,.\, de}{gt}$$

Die trigonometrische Formel läßt sich übrigens leicht in diejenige der Araber überführen, es ist:

$$ab = \frac{gk \,.\, \sin akb \,.\, \sin agb}{\sin gak} = \frac{gk}{\cot agb - \cot akb}$$

$$= \frac{gk}{\frac{gd}{de} - \frac{kh}{de}} = \frac{gk \,.\, de}{gd - kh} = \frac{gk \,.\, de}{gt}.\text{[1]}$$

Nach einer mündlichen Mitteilung des indischen Gelehrten ZIA UDDÎN AḤMED, von dem nächstens eine Arbeit über den MES'ÛDischen Kanon des BÎRÛNÎ erscheinen wird, kannte dieser arabische Mathematiker auch die trigonometrische Lösung unserer Aufgabe. Die Lösung IBN EL-HAIṬAMS befindet sich nun auch in andern mathematischen Schriften, und zwar habe ich sie bis jetzt an vier Orten gefunden: erstens bei den Indern BRAHMAGUPTA und BHÂSKARA (s. COLEBROOKE, p. 318); zweitens in der sog. Geometrie GERBERTS, und zwar an zwei verschiedenen Stellen: Kap. 27—28 und 35 der Ausgabe von OLLERIS, Kap. XIV und XX der CURTZEschen Ausgabe in den Abhandlungen zur Gesch. der Mathem. 7, 1895 (p. 90 und 93), hier ist sie etwas, aber nicht wesentlich, anders gelöst; drittens in der von CURTZE herausgegebenen[2]) *Practica geometriae* eines Anonymus (HUGO PHYSICUS?) aus dem 12. Jahrhundert, hier ist nur das Verfahren beschrieben, aber keine Lösung angegeben; viertens in der ebenfalls von CURTZE veröffentlichten[3]) *Practica geometriae* des LEONARDO MAINARDI (oder vielmehr DE'ANTONII) DA CREMONA, mit einem aus der lateinischen Ausgabe hinübergenommenen fehlerhaften Beweis. Welche Schlüsse soll man hieraus ziehen? Bei HERON[4]) und den römischen Agrimensoren findet sich diese Lösung nicht, dagegen bei dem Inder BRAHMAGUPTA (c. 600 n. Chr.); es ist also ziemlich wahrscheinlich, daß sie dieser aus verloren gegangenen griechischen Schriften über praktische Geometrie, die nach HERON aus Alexandrien nach Indien gedrungen sein möchten, entlehnt hätte; von den Indern kam sie zu den Arabern (wir glauben nicht, daß diese sie direkt aus den griechischen Quellen entnommen haben), und von diesen nach dem christlichen Abendlande, und zwar schon ziemlich früh, jedenfalls vor der großen Übersetzertätigkeit des 12. Jahrh. Dies ist unsere Ansicht; wir wollen damit keineswegs diejenige CANTORS als unmöglich hinstellen, daß

1) Man vergleiche hiermit den oben gegebenen Zusatz des SA'D ED-DÎN AS'AD.

2) Monatshefte f. Mathem. 8, 1897, p. 20.

3) Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 13, 1902, p. 360—361.

4) HERON bestimmt die Höhe eines Gegenstandes mit der Dioptra auf andere Weise, s. Ausgabe v. SCHÖNE, *Heronis opera* III, p. 228—231.

nämlich GERBERT diese und andere Aufgaben, über praktische Geometrie seiner Zeit im Kloster Bobbio aus jetzt nicht mehr vorhandenen Schriften griechisch-römischer Feldmesser geschöpft haben könnte. Daß die genannte Aufgabe aber auch indischen Ursprungs sein könnte, ist keineswegs ausgeschlossen, wenn auch nicht zu verkennen ist, daß sie dem Charakter der älteren indischen Geometrie etwas ferne steht.

III. Drei Aufgaben von Aḥmed b. el-Surrî.

Der Katalog der Leidener Bibliothek (Vol. III p. 59) verzeichnet unter Nr. 10 des Ms. Gol. 14 nur zwei Abhandlungen von ABÛ'L-FUTÛḤ B. EL-SURRÎ[1]), nämlich: 1. in einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten zusammen gleich dem Durchmesser des Kreises seien, 2. über die genaue Ausmessung der Kugel; der Verfasser des Kataloges hat übersehen, daß noch eine weitere Abhandlung den beiden genannten sich anschließt, nämlich: 3. in ein gleichseitiges Dreieck ein ebensolches zu zeichnen, das zum ersteren in einem gegebenen Verhältnis stehe. Von diesen drei Aufgaben, die die Seiten 241—245 unseres Kodex einnehmen, verdient die zweite kaum eine Besprechung, sie ist auch anonym, und es ist daher zweifelhaft, ob sie von demselben Autor stamme, wie die erste und dritte. Die Darstellung ist am Schlusse mangelhaft, aber man erkennt, daß Oberfläche und Inhalt nach den Formeln $4r^2\pi$ und $\frac{4r^3\pi}{3}$ berechnet werden, und daß das wesentliche hierbei die Bestimmung des Kugeldurchmessers sei, dessen direkte Messung den Arabern, wie es scheint, Schwierigkeiten machte. Derselbe wird dadurch gefunden, daß man [Fig. 4] von einem Punkte a auf der Kugel aus mit einer Zirkelöffnung ab einen beliebigen Kreis zieht, dessen Durchmesser gb mißt, aus dem hierdurch bestimmten Dreieck abg ad erhält, hierauf $de = \frac{gd^2}{ad}$ berechnet, und dann durch Addition von ad und de $2r$ bekommt.

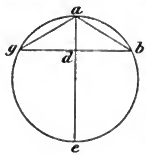


Fig. 4.

Die erste und dritte Aufgabe gehören zum Übungsmaterial unserer heutigen Mittelschulen und bieten auch kein besonderes Interesse dar. Ich gebe im folgenden eine kurze Darstellung ihrer Lösungen.

1. Figur und Text der Lösung sind mangelhaft, besonders erstere ist

---

1) Es ist derselbe Mathematiker, der auch den Kommentar zu der Abhandlung des ǦÂBIR B. IBRÂHÎM über die Regel der beiden Fehler verfaßt hat; vergl. Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 120, No. 287.

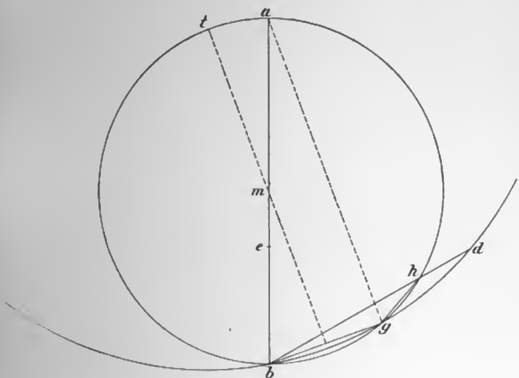


Fig. 5.

ganz verfehlt. Der Durchmesser des gegebenen Kreises [Fig. 5] sei ab, der Mittelpunkt m; man nehme einen beliebigen Teil be des Durchmessers und mache die Sehne bg gleich demselben, zeichne über bg einen Kreisbogen, der als Peripheriewinkel die Hälfte des Winkels bag fasse (sein Mittelpunkt ist t), zeichne in diesen Kreis von b aus die Sehne $bd = ae$, dieselbe schneide den gegebenen Kreis in h, so ist bhg das verlangte Dreieck; denn $bg = be$, und weil Winkel $bhg = 2$. Winkel bdg, ist $hd = hg$, also $bh + hg = bd = ae$, mithin $bg + bh + hg = ab$, w. z. b. w.

3. Einleitend bemerkt Aḥmed b. el-Surrî, er sei auf das nähere Studium dieser Aufgabe geführt worden durch die Behauptung eines Handwerkers (oder Künstlers, Konstrukteurs), daß die Seite desjenigen eingezeichneten Dreiecks, das gleich der Hälfte des größeren ist, die Seite dieses letzteren im Verhältnis 1 : 5 teile; er wolle nun zeigen, daß dies unrichtig sei, werde aber zuerst die Aufgabe für einen Fall lösen, der innerhalb der Grenzen ihrer Möglichkeit liege, denn das kleinste Dreieck, das man in ein gegebenes gleichseitiges zeichnen könne, habe zu diesem das Verhältnis 1 : 4. Er stellt nun zuerst folgende zwei Hilfsätze auf: 1. Zeichnet man in ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis und ebenso um dasselbe einen solchen, so stehen die beiden Kreisflächen zueinander im Verhältnis 1 : 4. 2. Man soll zu einem gegebenen Kreis einen zweiten finden, so daß beide zueinander in gegebenem Verhältnis stehen. Der Beweis zu 1. ist sehr einfach mit Benutzung des Satzes, daß zwei Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Die Aufgabe 2

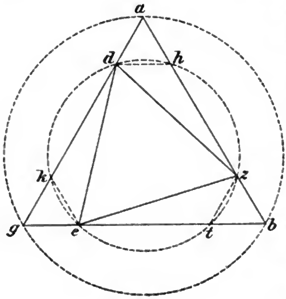


Fig. 6.

wird so gelöst: Das gegebene Verhältnis sei $e:d$, der Durchmesser des gegebenen Kreises ab; man zeichnet eine Strecke z, nach der Proportion $e : d = ab : z$; dann konstruiert man die mittlere Proportionale zwischen ab und z, sie sei ht, so ist dies der Durchmesser des gesuchten Kreises, wie leicht zu beweisen ist. Dann löst er die Aufgabe, in ein gleichseitiges Dreieck ein anderes solches zu zeichnen, das halb so groß wie das gegebene ist, auf folgende Weise: Man zeichne [Fig. 6] zu dem gegebenen Dreieck den umbeschriebenen Kreis, konstruiere um denselben Mittelpunkt nach der vorigen Aufgabe einen zweiten Kreis, dessen Fläche zu der des ersteren das Verhältnis 1 : 2 habe, wo dieser Kreis die Seiten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks schneidet, sind die Ecken des gesuchten Dreiecks. Der Beweis gründet sich auf XII, 1 Eukl., daß in Kreise eingeschriebene ähnliche Polygone sich verhalten wie die Quadrate der Durchmesser. Nun kommt er zum Beweise, daß $ah : ab$ nicht gleich $1 : 5$ sei, wie behauptet worden sei; da derselbe ohne algebraische Hilfsmittel geführt wird, ist er von Interesse und ich gebe denselben daher in gekürzter Form wieder: Man zieht die Sehnen dh, zt und ek; nun nehmen wir zuerst an, es sei $ah = \frac{1}{4} ab$; dann hat man, weil die kleinen Dreiecke adh, bzt und gke dem Ganzen ähnlich sind, die Proportion: $adh : abg = ah^2 : ab^2$, aber $ah = \frac{1}{4} ab$, also $\triangle adh = \frac{1}{16} \triangle abg$; so verhält es sich auch mit den übrigen kleinen Dreiecken, also

$$\triangle adh + \triangle bzt + \triangle gke = \tfrac{3}{16} \triangle abg$$

nun ist nach unserer Voraussetzung $hz = \frac{1}{2} ab = 2\, ah$, also $\triangle dhz : \triangle adh = 2 : 1$, mithin $\triangle dhz = \frac{2}{16} \triangle abg$, ebenso verhält es sich mit den Dreiecken etz und dke, also:

$$\triangle dhz + \triangle etz + \triangle dke = \tfrac{6}{16} \triangle abg$$

folglich alle sechs kleinen Dreiecke zusammen $= \frac{9}{16} \triangle abg$, also wäre $\triangle dez = \frac{7}{16} \triangle abg$, dies ist aber ein Widerspruch, da ja $\triangle dez = \frac{1}{2} \triangle abg$ ist; also kann ah nicht gleich $\frac{1}{4} ab$ sein. Ganz auf die gleiche Weise wird gezeigt, daß ah nicht gleich $\frac{1}{5} ab$ sein kann; es muß nun kleiner als $\frac{1}{4}$ und größer als $\frac{1}{5}$ von ab sein, die beiden Strecken ah und ab sind also inkommensurabel, weil zwischen 4 und 5 keine ganze Zahl liegt, sie verhalten sich also nicht wie eine (ganze) Zahl zu einer (ganzen) Zahl, w. z. b. w.

Aḥmed b. el-Surrî konnte also das richtige Verhältnis von ah zu ab $\left(= \frac{3-\sqrt{8}}{6} : 1\right)$ nicht finden; auch irrt er sich, wenn er meint, das Verhältnis sei irrational, weil zwischen 4 und 5 keine ganze Zahl liege; nach seinem Beweise könnte es z. B. ganz wohl $= \frac{7}{30}$ sein, denn diese Zahl liegt zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$. Es scheinen also diesem Mathematiker die Hilfsmittel nicht mehr zu Gebote gestanden zu haben, die der ca. 250 Jahre früher lebende ägyptische Gelehrte Šoǵâʿ b. Aslam besessen hat, wie man aus seiner Schrift „Über das Fünfeck und das Zehneck"[1]) schließen kann; um so merkwürdiger ist, daß nach ihm noch ein Mann als Gelehrter mathematischer Richtung auftreten konnte, der seine Wissenschaft so sehr beherrscht hat wie Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî.

IV. Eine arabische Aufgabe über Flächenteilung von El-Moẓaffar b. Muḥ. b. el-Moẓaffar el-Ṭûsî.[2])

Diese Aufgabe bildet Nr. 17 des Ms. Gol. 14 und umfaßt darin die Seiten 322—327 (oben). Wegen der dabei angewandten sonderbaren Lösungsart muß ich dieselbe ziemlich ausführlich wiedergeben, allerdings mit Hinzuziehung neuerer Bezeichnungsweisen.

Die Figur ist mangelhaft ausgeführt, der Text weist Fehler in den Buchstaben und Zahlen auf, so daß die Richtigstellung nicht geringe Mühe bereitet hat. Nach der Anrufung Gottes etc. folgt:

„Es ist dies eine Aufgabe, deren Lösung Šems ed-dîn, der Emîr der Niẓâmîschen (?) Emîre von dem berühmten, einzigen, gelehrten Imâm Šaraf ed-dîn el-Moẓaffar b. Muḥ. b. el-Moẓaffar el-Ṭûsî verlangt hat, in der Stadt Hamadân im Jahre 606 d. H. (1209/10), nämlich ein gegebenes Quadrat in vier Teile zu teilen, so daß der in der Mitte ein Rechteck und die drei es begrenzenden Trapeze seien, und die vier Flächen zueinander in gegebenem Verhältnis stehen.

„Die Quadratseite [Fig. 7] sei 10 und die vier Figuren $gtxy$, $abxt$, $atgc$ und $cdyg$ sollen sich verhalten wie $1:2:3:5$. Man verlängert ab, nimmt auf der Verlängerung einen beliebigen Punkt e an, macht $e\mu = 9\,be$, verbindet μ mit d und zieht durch e die Parallele ew zu ud (dann ist also $bw = 1$)[3]), nun mache man $b\eta = 55$ (beliebige) Teile und $\eta\vartheta = 45$[4])

1) Festschrift zum achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneiders, Leipzig, 1896, p. 169—194.

2) Vergl. H. Suter, *Die Mathem. und Astron. d. Araber*, etc. in Abhandl. z. Gesch. der mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 134.

3) Das Eingeklammerte hier und im folgenden steht nicht im Text.

4) Im Text steht beide mal 54.

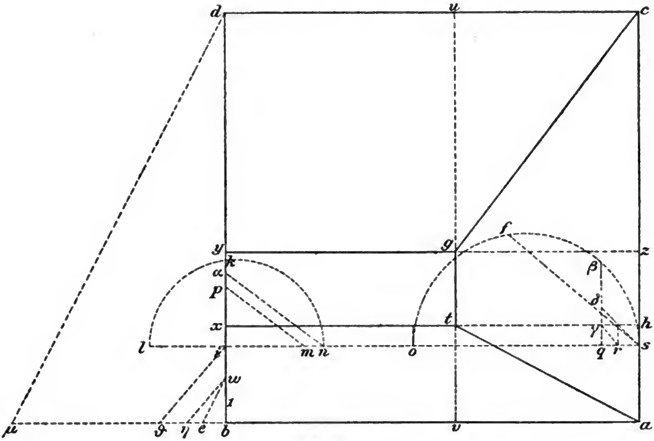


Fig. 7.

solcher, verbinde η mit w und ziehe durch ϑ die Parallele ϑi zu ηw (so ist also $wi = {}^9/_{11}\ bw$, mithin $bi = 1\,{}^9/_{11}$). Dann ziehe man durch i die Parallele is zu ab, verlängere sie über i hinaus und mache $il = 1\,{}^3/_4$ und $im = 2$; dann mache man $ip = 3025$ [1]) (beliebige) Teile und $p\alpha = 725$ [2]) solcher, ziehe pm und durch α die Parallele αn dazu (so verhält sich $im : in = 3025 : 3750$, also ist $in = 2\frac{1450}{3025}$). Hierauf beschreibe man über nl einen Halbkreis (der bd im Punkte k schneidet, so ist $ik^2 = il \cdot in = 4\frac{1025}{3025}$), mache $os = 5\frac{5}{11}$, beschreibe darüber einen Halbkreis, mache die Sehne $sf = 2\,ik$, halbiere den Bogen sf in β und ziehe βq senkrecht auf os (so ist $\beta q = \frac{1}{2}\,sf = ik$, also $\beta q^2 = oq \cdot qs = 4\frac{1025}{3025}$); nun macht man $q\gamma = 3$ (beliebige) Teile und $\gamma\delta = 4$ solcher, zieht δs und durch γ die Parallele γr dazu (so ist $rs = \frac{4}{7}\,qs$, also $oq \cdot rs = \frac{4}{7}\,oq \cdot qs = \frac{4}{7} \cdot 4\frac{1025}{3025} = 2\frac{1450}{3025}$); jetzt mache man $sh = rs$, ziehe hx parallel zu si und errichte in r eine Senkrechte, so ist rh ein Quadrat. Dann mache man $dy = 2\frac{1}{2}\,bx$, ziehe yz parallel zu ab, mache dann ferner $av = 1\frac{1}{2}\,bi + 3\frac{1}{2}\,rs$ und ziehe uv parallel zu bd, verbinde noch g mit c und t mit a, so ist das Quadrat in der verlangten Weise geteilt.“

1) Im Ms. steht 3024.

2) Im Ms. steht 1725.

Den weitschweifigen Beweis gebe ich sehr verkürzt und in moderner Form:

Es ist Rechteck $hv = av \cdot ah = (1\frac{1}{2}\, bi + 3\frac{1}{2}\, rs)\ (bi + rs)$

$$= (1\tfrac{1}{2} \cdot 1\tfrac{9}{11} + 3\tfrac{1}{2}\, rs)\ (1\tfrac{9}{11} + rs) = \tfrac{600}{121} + 9\tfrac{1}{11}\, rs + 3\tfrac{1}{2}\, rs^2.$$

Ferner Rechteck $hi = rh + r\gamma + o\gamma + ox$

$$= rs^2 + \tfrac{3}{4}\, rs^2 + oq \cdot rs + oi \cdot rs$$

$$= 1\tfrac{3}{4}\, rs^2 + 2\tfrac{1450}{3025} + 4\tfrac{6}{11}\, rs = \tfrac{300}{121} + 4\tfrac{6}{11}\, rs + 1\tfrac{3}{4}\, rs^2$$

also ist $hi = \frac{1}{2}\, hv$, mithin Rechteck $hi =$ Dreieck aht.

Es ist aber $hb - hi = bs$ und $hb - aht = abxt$, also $bs = abxt$, oder:

$$\text{Trapez } abxt = ab \cdot bi = 1\tfrac{9}{11}\ ab = \tfrac{200}{11} = \tfrac{2}{11}\square\ abcd.$$

Nun hat man die Proportion:

$$\text{Trapez } abxt : \text{Trapez } cdyg = bx : dy = 2 : 5$$

$$\text{also Trapez } cdyg = \tfrac{5}{11}\square\ abcd.$$

Ferner hat man: Dreieck avt : Dreieck $cug = vt : gu = 2 : 5$

$$\text{also Dreieck } cug = 2\tfrac{1}{2} \text{ Dreieck } avt,$$

also: Dreieck avt + Dreieck $cug = 3\frac{1}{2}$ Dreieck $avt = 3\frac{1}{2}\ hi = 3\frac{1}{2}\ ac \,.\, rs$,

und Rechteck $au = ac \,.\, av = ac\,(1\frac{1}{2}\, bi + 3\frac{1}{2}\, rs)$,

das obere vom unteren subtrahiert, bleibt:

$$\text{Trapez } atgc = 1\tfrac{1}{2}\ ac \,.\, bi = 1\tfrac{1}{2}\ bs = 1\tfrac{1}{2}\ abxt$$

$$\text{also Trapez } atgc = \tfrac{3}{11}\ \square\ abcd;$$

also bleibt für das Rechteck $xygt$ noch $\frac{1}{11}\ \square\ abcd$,

mithin hat man die Proportion:

$$xygt : abxt : atgc : cdyg = 1 : 2 : 3 : 5, \text{ w. z. b. w.}$$

Diese merkwürdige Konstruktion veranlaßt uns zu folgenden Bemerkungen: In erster Linie fallen die großen Verhältniszahlen 55 : 45 und 3025 : 725 auf, die ja auf 11 : 9 und 121 : 29 hätten reduziert werden können; aber auch diese wären nicht notwendig gewesen, zur Konstruktion genügt eine Streckenteilung in zehn und eine solche in sieben gleiche Teile. Auch wird man leicht einsehen, daß die Konstruktion bedeutend einfacher geworden wäre, wenn er die Seite des Quadrates 11 statt 10 angenommen hätte; vielleicht war ihm aber die Seitenlänge vorgeschrieben, ich erinnere daran, daß die arabischen Mathematiker bei algebraischen und geometrischen Aufgaben mit Vorliebe die Zahl 10 als Normalzahl wählten.[1]) Ferner muß der eigentümliche Weg auffallen, auf dem er βq erhält, er hätte ja nur durch k eine Parallele zu ab ziehen müssen, da $\beta q = ki$. Da eine

1) Vergl. die Aufgaben in der Algebra des Muḥ. b. Mûsâ el-Chwârezmî (ed. Rosen), und in der oben zitierten Abhandlung von Šoǵâ' b. Aslam über das Fünfeck und Zehneck.

Analysis fehlt, so können wir nicht erkennen, auf welche Weise der Verfasser auf diese Lösung gekommen ist; unser moderner Weg führt auf quadratische Gleichungen, und zwar findet man leicht, wenn die Quadratseite mit a bezeichnet wird:

$$bx = \frac{2a}{7}\left(\frac{13-\sqrt{15}}{11}\right), \quad xy = \frac{a}{11}\left(\sqrt{15}-2\right), \quad xt = \frac{a}{11}\left(\sqrt{15}+2\right).$$

Die Konstruktion wird dann am besten so ausgeführt, daß man zuerst a in 10 gleiche Teile teilt, dann $\sqrt{15} = \sqrt{3.5}$ sucht, hierauf xy konstruiert nach der Proportion $11 : a = \sqrt{15} - 2 : xy$, hierauf vom Reste $a - xy$ zwei Siebentel nimmt, so hat man bx, die andern fünf Siebentel sind dy.

Es will uns scheinen, als wenn jene großen Zahlen und die eigentümliche Art der Konstruktion zu dem Zwecke gewählt worden wären, die Lösung um so schwieriger und die Leistung des Mathematikers deshalb um so großartiger erscheinen zu lassen, und um ja nicht andere auf die Spur des Gedankenganges zu bringen, der zur Auflösung geführt hat. Ja nicht einmal nachmachen können sollte man die Konstruktion, denn wer wird eine Streckenteilung im Verhältnis 3025 : 725 ausführen! Übrigens muß Moẓaffar el-Ṭûsî die mathematischen Kenntnisse seiner Zeitgenossen auch gar gering geschätzt haben, wenn er nicht einmal den Einwand erwartet oder gefürchtet hat, man könne ja 3025 : 725 mit 25 abkürzen. Daß Moẓaffar selbst das letztere und überhaupt die Vereinfachung der Konstruktion nicht eingesehen habe, wird wohl niemand behaupten wollen. Eine solche absichtlich und zwar auf so plumpe Art komplizierter gemachte Lösung einer Aufgabe war nur möglich zur Zeit des Niederganges der Wissenschaft, zu einer Zeit, da selbst hochgestellte Persönlichkeiten keine Spur mehr von mathematischer Bildung besaßen, wo die Vertreter dieser Wissenschaft gleichsam als Wundermenschen angestaunt wurden, und selbstverständlich nicht darnach trachteten, die Meinung, die man von ihnen hatte, zu zerstören.

Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen.

Von PAUL STÄCKEL in Hannover.

1.

In dem Verzeichnisse EULERscher Abhandlungen, das NICOLAUS FUSS der Gedächtnisrede auf seinen Großvater beigefügt hat[1]), wird eine Abhandlung: *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres* angeführt, die in dem Journal littéraire de l'Allemagne, Mois de Janvier et Février 1751 erschienen sein sollte. Als sechzig Jahre später NICOLAUS FUSSENS Sohn PAUL HEINRICH v. FUSS die Herausgabe der *Opera minora* EULERS in Angriff nahm, die über die 1849 veröffentlichten *Commentationes arithmeticae* hinauszuführen ihn leider die Ungunst der Zeiten und ein früher Tod verhindert haben, da konnte er sich diese seltene Zeitschrift auf keine Weise verschaffen. Schließlich wandte er sich am 19. April 1844 an GAUSS, der ihn im vorhergehenden Jahre in Göttingen freundlich aufgenommen hatte[2]), „in der Hoffnung auf die so reiche und vollständige Göttinger Bibliothek". Wie die beiden langen Briefe an FUSS vom 8. und 15. Mai 1844 zeigen, hat sich GAUSS der Anfrage aufs sorgfältigste angenommen; war er doch, wie er am 16. September 1849 nach Empfang der *Commentationes* an FUSS schreibt, der Überzeugung, daß „das Studium aller EULERschen Arbeiten die beste durch nichts anderes zu ersetzende Schule für die verschiedenen mathematischen Gebiete bleiben wird"[3]).

1) *Éloge de M. LÉONARD EULER, lu a l'Académie Imperiale des Sciences, dans son Assemblée du 23 octobre 1783, avec une liste complette des Ouvrages de M. EULER,* Nova Acta Petrop. 1, ad annum 1783 [1787]; Histoire S. 159—212; auch besonders erschienen Petersburg 1783, deutsche Ausgabe Berlin 1786. NICOLAUS FUSS (1755—1826) hatte eine Tochter des ältesten Sohnes von LEONHARD EULER, JOHANN ALBRECHT EULER (1734—1800), geheiratet.

2) Schon NICOLAUS FUSS hatte mit GAUSS in Beziehungen gestanden; im besonderen hat er mit GAUSS über dessen Berufung nach Petersburg verhandelt. P. H. v. FUSS hatte im Februar 1843 an GAUSS die von ihm herausgegebene *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIième siècle,* 2 Teile (Petersburg 1843) gesandt; das GAUSS-Archiv in Göttingen besitzt 6 Briefe von ihm an GAUSS.

3) Die drei genannten Briefe von GAUSS an P. H. v. FUSS hat kürzlich ein Neffe von diesem, Herr Geheimrat VIKTOR FUSS in Petersburg, dem GAUSS-Archiv als Geschenk überwiesen; vgl. meine Note: *Vier neue Briefe von GAUSS* in den Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1907, S. 372.

GAUSS stellte fest, daß die Göttinger Bibliothek die ganze Folge der Zeitschrift besitzt, die vierzig Jahre hindurch unter zweimaligem Wechsel von Titel und Verlagsort erschienen ist, nämlich 1720—1741 als Bibliothèque germanique zu Amsterdam (50 Tomes), 1741—1743 als Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord zu Haag (2 Tomes zu je 2 Parties) und 1746—1760 als Nouvelle bibliothèque germanique wieder zu Amsterdam (26 Tomes). Den Inhalt der 78 Tomes bilden im wesentlichen Berichte über neu erschienene Bücher und Akademieschriften. Eine Abhandlung des angegebenen Titels ist darin nicht zu finden, wohl aber enthält die 1. Partie des Tome II des Journals, die die Jahreszahl 1743 trägt, auf S. 115—127 einen kleinen mathematischen Originalaufsatz mit der Überschrift:

Démonstration de la somme de cette Suite

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

Der Verfasser ist nicht angegeben; er fehlt auch in dem am Schlusse des Bandes stehenden Inhaltsverzeichnis. Daß jedoch die Abhandlung von EULER herrührt, „erhellet", wie GAUSS bemerkt, „sogleich aus den Anfangsworten 'la méthode que j'ai donnée dans les Commentaires de l'Académie de Pétersbourg, pour trouver la somme de cette suite, lorsque l'exposant n est un nombre pair

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

a quelque chose d'extraordinaire usw.' in Verbindung mit der späterhin vorkommenden näheren Bezeichnung des betreffenden Bandes als T. VII, in welchem Bande sich wirklich die bezogene Abhandlung unter EULERS Namen befindet"[1]).

So hatte GAUSS statt der gesuchten eine bisher unbekannte Abhandlung EULERS entdeckt. Welches Interesse er daran nahm, zeigt der Umstand, daß er die Mühe nicht gescheut hat, die Abhandlung für FUSS eigenhändig abzuschreiben, damit sie „in der neuen Ausgabe reproduciert werde". „Ein gewöhnlicher Abschreiber", äußert er sich in dem Brief vom 15. Mai 1844, „würde allerdings nicht wohl dazu befähigt sein, oder

1) Der erst 1740 erschienene Band VII der Comment. Petrop. für 1734/35 enthält S. 123 EULERS Abhandlung: *De summis serierum reciprocarum;* man ersieht hieraus, wie irreführend es ist, wenn J. G. HAGEN in dem *Index Operum* LEONHARD EULERI (Berlin 1896), S. 11 diese Abhandlung unter der Jahreszahl 1734/35 anführt. Übrigens findet sich, was GAUSS entgangen zu sein scheint, in dem Journal doch ein Hinweis auf EULERS Autorschaft, denn in dem am Schlusse des Bandes befindlichen alphabetischen Verzeichnis der im Text vorkommenden Personennamen wird EULER mit der Seitenzahl 115 angeführt.

er müßte Zeile um Zeile gleichsam ein fac simile davon nehmen. Der Aufsatz wimmelt nämlich von barbarischen Druckfehlern, die allerdings ein Sachverständiger gleich als solche erkennt" [1]).

Die Irrtümer in der Angabe von NICOLAUS FUSS suchte GAUSS dadurch zu erklären, daß jener „nur aus dem Gedächtnisse oder noch wahrscheinlicher nach der Gedächtnisangabe eines Dritten citiert habe". Daß es sich so verhält, ist um so wahrscheinlicher als, nach C. G. J. JACOBI, EULER am 22. Juni 1747 der Berliner Akademie eine Abhandlung des Titels: *Découverte d'une loi extraordinaire des nombres* vorgelegt hat, die jedoch in deren Memoiren nicht aufgenommen worden ist; aus einer im Archiv der Berliner Akademie vorhandenen Abschrift hat sie FUSS in den *Commentationes arithmeticae*, T. II, S. 639, veröffentlicht [2]).

2.

Es kann kaum Wunder nehmen, daß die Abhandlung EULERS, die anonym in einer wenig verbreiteten holländischen Literaturzeitung erschienen war, unter den Mathematikern keine Beachtung gefunden hat. „PFAFF, hätte er sie gekannt," bemerkt GAUSS an FUSS, „würde er sie gewiß in seiner Schrift von 1788 nicht unerwähnt gelassen haben"; dieser *Versuch einer neuen Summationsmethode nebst anderen analytischen Bemerkungen* (Berlin 1788) bezieht sich auf die Summation der Reihen

$$S_{2r} = 1 + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \frac{1}{4^{2r}} + \frac{1}{5^{2r}} + \cdots$$

und enthält auch einige geschichtliche Notizen. Aber auch den späteren Autoren, die sich mit den Summen der reziproken Potenzen der natürlichen Zahlen beschäftigt haben, scheint EULERS Abhandlung entgangen zu sein. Sie fehlt in R. REIFFS *Geschichte der unendlichen Reihen* (Tübingen 1889) und wird auch nicht in M. CANTORS *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3^2, Leipzig 1901, Kapitel 110—113, S. 666—773

1) In der Vorrede zu den *Commentationes arithmeticae*, T. I, S. XXIV hat sich P. H. v. FUSS über die Entdeckung der Abhandlung im Journal durch GAUSS so geäußert: „Commentatio haec nomine auctoris caret. Cl. GAUSSIUS, qui humanissime in se susceperat in bibliotheca Göttingensi inquirere, ubinam librorum reperiretur alia quaedam EULERI Commentatio (cf. supra p. XVIII) ex occasione in hanc ipsam incidit. Sed cum erroribus scateat typographicis, vir summus non recusavit eam sua manu describere et ad nos in usum editionis transmittere".

2) In betreff der Herausgabe der Werke EULERS hat zwischen P. H. v. FUSS und C. G. J. JACOBI ein umfangreicher Briefwechsel stattgefunden, der sehr wertvolle Vorarbeiten für dieses schwierige Unternehmen enthält; so sandte zum Beispiel JACOBI an FUSS Auszüge aus den Protokollen der Berliner Akademie, die ergeben, wann EULER die einzelnen Abhandlungen vorgelegt hat. In Gemeinschaft mit Herrn W. AHRENS werde ich diesen Briefwechsel demnächst in der Bibliotheca Mathematica veröffentlichen.

angeführt. Auch G. ENESTRÖM hat sie in seiner *Note historique sur la somme des valeurs inverses des nombres carrés* (Biblioth. Mathem. 4_2, 1890, S. 22) und in dem *Briefwechsel zwischen* LEONHARD EULER *und* JOHANN *I.* BERNOULLI (Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 249) nicht herangezogen[1]).

Als ein kleiner Beitrag zu der Feier der zweihundertsten Wiederkehr des Geburtstages von LEONHARD EULER möge es aufgefaßt werden, wenn im folgenden seine vergessene *Démonstration* wieder abgedruckt wird. Vorher aber möge dargelegt werden, welche Stellung diese Abhandlung in der Geschichte der unendlichen Reihen einnimmt. Es erscheint das um so mehr angebracht, als die Geschichte der Summen S_{2r} bisher noch nicht in zusammenhängender Weise behandelt worden ist und die zerstreuten Notizen, die man darüber in den historischen Werken findet, manche Irrtümer und Lücken aufweisen. Dabei soll nur die Zeit bis 1755 berücksichtigt werden; in der Tat ist seitdem nichts Wesentliches hinzugekommen.

3.

In dem ersten Teile seiner *Propositiones arithmeticae de seriebus infinitis eorumque summa finita* (Basel 1689)[2]) beschäftigt sich JAKOB BERNOULLI unter anderem auch mit der Summation von unendlichen Reihen, deren Glieder Brüche mit dem Zähler Eins sind, während die Nenner aus figurierten Zahlen oder aus den Differenzen dieser Zahlen und einer bestimmten von ihnen bestehen. Er erkennt, daß die Summe der reziproken Werte der natürlichen Zahlen selbst unendlich ist, dagegen gelingt es ihm, die endlichen Summen der unendlichen Reihen zu bestimmen, bei denen die Nenner Dreieckszahlen, die Differenzen der Dreieckszahlen und einer bestimmten Dreieckszahl, die Differenzen der Quadratzahlen und einer bestimmten Quadratzahl sind. „Sind die Nenner jedoch reine Quadrate, wie bei der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ etc., so ist merkwürdigerweise die Erforschung der Summe schwieriger als man erwarten sollte; daß die Summe endlich ist, erschließen wir aus der anderen

---

1) Wie ENESTRÖM erwähnt hat (Biblioth. Mathem. 3_2, 1889, S. 4; 4_2, 1890, S. 24) gibt es eine historische Monographie von J. MELDERCREUTZ, *De summatione seriei reciprocae e quadratis numerorum naturalium* (Holmiae 1755), die unter dem Präsidium des Verfassers in Upsala von C. A. BERGSTRÖM verteidigt wurde. ENESTRÖM hatte die Freundlichkeit, mir diese Dissertation zugänglich zu machen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle bestens danken möchte.

2) Wiederabgedruckt *Opera*, Genf 1744, T. I, S. 373—402. — Nach der oben zitierten Abhandlung von J. MELDERCREUTZ (S. 6) hat schon J. WALLIS in seiner *Arithmetica infinitorum* (Oxford 1655) die unendliche Reihe der reziproken Quadratzahlen erwähnt.

[Summe der Dreieckszahlen $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots$], da sie augenscheinlich kleiner als diese ist. Sollte jemand das, was unseren Anstrengungen bis jetzt entgangen ist, finden und uns mitteilen, so werden wir ihm sehr dankbar sein[1]).

Diese Aufforderung hatte insofern Erfolg, als JAKOB BERNOULLIS jüngerer Bruder JOHANN BERNOULLI sich mit der Frage beschäftigte. „Je vois déjà la route de trouver la somme $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc. ce que nous ne pouvions pas autrefois", schreibt er, wieder einmal etwas voreilig, am 22. Mai 1691 an seinen Bruder[2]); ohne Zweifel hat er bald entdeckt, daß er sich geirrt hatte.

Später hat FONTENELLE in seiner *Géométrie de l'infini* (Paris 1727) einige Sätze über die Summe der reziproken Quadratzahlen aufgestellt, die jedoch, wie MACLAURIN in der „Introduction" zu seinem *Treatise of fluxions* (Edinburg 1742) bemerkt hat, unrichtig sind. Ferner fand STIRLING in der *Methodus differentialis* (London 1730), S. 28 mittels seiner Summationsmethode den Näherungswert

$$1{,}644\,934\,066,$$

der von dem wahren Werte 1,644 934 064 8 .... erst in der neunten Dezimalstelle abweicht[3]). Auch in dem Briefwechsel zwischen DANIEL

---

1) Diese entscheidende Stelle ist M. CANTOR entgangen, der vielmehr sagt, in der zweiten Abhandlung JAKOB BERNOULLIS über Reihen vom Jahre 1692 (*Opera* T. I, S. 517—542) sei auch „erstmalig die Reihe der reziproken Quadratzahlen allerdings erfolglos in Angriff genommen" (a. a. O. 3^2, S. 96). Von einer solchen erfolglosen Bemühung habe ich in der zweiten Abhandlung nichts finden können; die Summe S_2 tritt darin allerdings auf, aber nur als Hilfsgröße bei der Umformung anderer unendlicher Reihen, ohne daß sie selbst untersucht würde. Möglicherweise bezieht sich die Angabe CANTORS auf die dritte Abhandlung vom Jahre 1698, wo (siehe *Opera* T. II, S. 759) JAKOB BERNOULLI die Summierung der Reihe auf die Quadratur einer gewissen Kurve reduziert hat. Nebenbei sei noch bemerkt, daß es S. 658 bei der Erwähnung von S_2 statt JOHANN BERNOULLI heißen muß JAKOB BERNOULLI.

2) Mitteilung von ENESTRÖM aus einem noch nicht veröffentlichten Briefe JOHANN BERNOULLIS an JAKOB BERNOULLI, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 249.

3) Diese Angaben sind der Dissertation von MELDERCREUTZ entnommen. Dieser weist auch darauf hin, daß EULER in den Petersburger Commentarii 6, 1732/33, gedruckt 1738 (gemeint ist die Abhandlung *Methodus generalis summandi progressiones*, S. 68—97, § 12) die Reihe mit dem allgemeinen Gliede $x^n : (an + b)^m$ mittels eines bestimmten Integrals summiert hat, die für $a = 1$, $b = 0$, $m = 2$, $x = 1$ in die Summe der reziproken Quadratzahlen übergehen würde; man findet so die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \int_0^1 \frac{ln(1-x)}{-x}\,dx;$$

freilich setzt EULER selbst nur $m = 2$, $x = 1$, aber beschäftigt sich nicht mit dem

BERNOULLI und GOLDBACH tritt sie auf (Briefe vom 29. August 1728 und 31. Januar 1729); im besonderen zeigt GOLDBACH wie man durch einfache Überlegungen beweisen könne, daß die Summe zwischen 1,644 und 1,645 liegt[1]).

Da die eben erwähnten Briefe aus der Zeit stammen, in der DANIEL BERNOULLI mit EULER zusammen in Petersburg lebte (1727—1733), so ist es wahrscheinlich, daß das reizvolle, aber schwierige Problem der Summation der Reihe der reziproken Quadratzahlen auch zwischen diesen beiden Mathematikern besprochen worden ist, und diese Vermutung gewinnt dadurch fast den Grad einer Gewißheit, daß EULER von seiner Entdeckung des genauen Wertes der Summe zuerst DANIEL BERNOULLI Kenntnis gegeben hat.

Leider ist der Brief, in dem EULER die Formel

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \cdot\cdot = \frac{\pi^2}{6}$$

angab, bis jetzt nicht wieder aufgefunden worden. Wir wissen davon nur aus der Antwort DANIEL BERNOULLIS vom 12. September 1736. Hier heißt es: „Das theorema summationis seriei

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \text{ etc.} = \frac{pp}{6} \quad \text{und} \quad 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} \text{ etc.} = \frac{p^4}{90}$$

ist sehr merkwürdig. Sie werden ohne Zweifel a posteriori darauf gekommen sein. Ich möchte die Solution gern von Ihnen sehen"[2]).

Die Formel $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ hat JOHANN BERNOULLI durch seinen Sohn DANIEL erfahren[3]) und sofort versucht, seinerseits einen Beweis dafür zu finden. Es ist erstaunlich, daß er genau die kühne Methode wiedergefunden hat, deren sich EULER bedient hatte. Sie besteht darin, daß der Satz: „Bei einer algebraischen Gleichung, deren absolutes Glied den Wert Eins hat, ist der Koeffizient des Gliedes mit der ersten Potenz der Unbekannten gleich der negativen Summe der reziproken Werte der Gleichungswurzeln" auf die Gleichung „unendlich hohen Grades":

$$1 - \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{5!} - \frac{z^3}{7!} + \cdot\cdot = 0$$

Falle $a = 1$, $b = 0$ und versucht auch nicht den Wert des Integrales zu ermitteln. Vergl. auch EULERS nachgelassene Abhandlung: De summatione serierum in hac forma contentarum: $\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \ldots$; Mém. de l'acad. d. sc. de St.-Pétersbourg 3, 1809/10 (1811), S. 26, sowie den Brief an NICOLAUS BERNOULLI vom 1. September 1742, L. EULER: *Opera postuma*, Petersburg 1862, I, S. 521.

1) *Corresp.* II, S. 263, 281.

2) *Corresp.* II, S. 435. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906, S. 127 setzt den Brief EULERS vermutungsweise in den August 1736.

3) Vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 253.

angewandt wird, die durch die Substitution $x^2 = z$ aus der Gleichung $\frac{\sin x}{x} = 0$ hervorgegangen ist; es ist klar, daß diese Gleichung die Wurzeln $z = n^2 \pi^2$ hat, wo n irgend eine positive, von Null verschiedene ganze Zahl bedeutet.

Ein Vorzug der Methode ist, daß sie sofort noch weitere Summationsformeln liefert, die sich aus dem bekannten Zusammenhange zwischen den Koeffizienten der Gleichung und den Summen der Produkte der reziproken Wurzeln zu je zwei, drei, vier, ... ergeben. Aus diesen Formeln findet man, wie EULER und BERNOULLI sofort erkannten, vermöge der GIRARD-NEWTONschen Relationen zwischen den Summen der Potenzen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung nach und nach die Werte der Summen $S_4, S_6, S_8, \ldots$.[1]) EULER hat übrigens statt der Gleichung $\sin x = 0$ auch allgemeiner die Gleichung $\sin x = a$ betrachtet, wo a eine Konstante bedeutet, der er verschiedene geeignete Werte gibt, zum Beispiel den Wert Eins; er gelangt auf diesem Wege nicht nur zu den Summen S_{2r}, sondern auch zu weiteren Summen, auf die jedoch hier nicht eingegangen werden kann.

4.

In gewisser Beziehung war JOHANN BERNOULLI über EULER hinausgegangen, er erhob nämlich (Brief vom 2. April 1737 an EULER) gegen die soeben auseinandergesetzte Methode den Einwand, sie beruhe auf der unbewiesenen Voraussetzung, daß die Gleichung $\sin x = 0$ keine imaginären Wurzeln besitze und überhaupt keine anderen, als die, die den unzählig vielen, zu dem Werte Null des Sinus gehörigen Bogen entsprechen. Dafür, daß es sich so verhalte, habe er eine Art von Beweis, der ihm die Sache jedoch nur wahrscheinlich mache [2]).

In seiner Antwort vom 27. August 1737 erkennt EULER an, daß dieses Bedenken von großem Gewichte sei; freilich scheine es nicht leicht zu sein, zu beweisen, daß die Gleichung $\sin x = 0$ keine imaginären Wurzeln habe. Jedoch könne als Bestätigung seiner Methode der Umstand dienen, daß die dadurch gefundenen Werte der Summen S_{2r} mit den durch numerische Summation gefundenen gut übereinstimmten [3]).

1) Obwohl EULERS Abhandlung *De summis serierum reciprocarum* bereits 1740 erschienen war, hat JOHANN BERNOULLI doch 1742 seine Herleitung der Summen S_2, S_4, S_6 in den vierten Band der *Opera omnia* aufgenommen, der die *Anecdota* enthält (S. 20—25).

2) Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 253 -255.

3) In dem vorher angeführten Briefe an NICOLAUS BERNOULLI vom 1. September 1742 bemerkt EULER, er habe seine Methode erst veröffentlicht, nachdem er sich von dieser Übereinstimmung überzeugt hatte. Die Zahlenwerte von S_2 bis S_{16}, auf 16 Dezimalstellen berechnet, hat er in den *Institutiones calculi differentialis*, P. II, Petersburg 1755, S. 456 mitgeteilt.

Außerdem habe er aber den Wert $\frac{\pi^2}{6}$ für S_2 auf einem ganz anderen Wege wiedererhalten, und nun deutet Euler gerade die Methode an, die in dem Journal littéraire durchgeführt ist. Er geht aus von der Reihe für arc sin x:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots$$

und bildet mit ihrer Hilfe die Gleichung

$$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2 = \int_0^x \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \dots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Auf der rechten Seite wird gliedweise integriert und dann $x = 1$ gesetzt. So kommt:

$$\frac{\pi^2}{8} = \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{5}\int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{1}{7}\int_0^1 \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} + \dots$$

Es ist aber

$$\int_0^1 \frac{x^{n+2} dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{n+1}{n+2}\int_0^1 \frac{x^n dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

wie sich durch partielle Integration ergibt[1]). Mithin erhält man

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots,$$

woraus der Wert von S_2 leicht hergeleitet werden kann. Er zweifele nicht daran, meinte Euler am Schluß des Briefes, daß auch die Summen $S_4, S_6, \dots$ durch eine ähnliche Analyse gefunden werden könnten[2]).

Johann Bernoulli (Brief vom 5. Nov. 1737) erklärt Eulers Darlegungen für sehr schön und seines Scharfsinns würdig; die neue Herleitung von S_2 sei schlüssig und der alten bei weitem vorzuziehen. Er habe nach ihrem Muster die Reihenformel

$$\frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} + \frac{2.4}{3.5}\cdot\frac{1}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\cdot\frac{1}{8} + \dots$$

---

1) Auf diese Rekursionsformel ist Euler später zurückgekommen und hat untersucht, wie man die Funktion v von x wählen müsse, damit eine Relation der Form

$$\int_0^1 x^n dv = \frac{\beta n + b}{\alpha n + a}\int_0^1 x^{n-1} dv + \frac{\gamma n + c}{\alpha n + a}\int_0^1 x^{n-2} dv$$

besteht (*Methodus inveniendi formulas integrales quae certis casibus datam inter se teneant rationem, Opuscula analytica*, Petersburg 1785, t. II, S. 178—216; wiederabgedruckt *Institutiones calculi integralis*, T. IV, S. 378—415).

2) Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 257—259.

gefunden [1]); wie JOHANN BERNOULLIS *Opera omnia*, T. IV (Basel 1742), S. 24—25 zeigen, hatte er diese Formel erhalten, indem er statt des arc sin x den arc tg x nahm. Sie ergibt sich aber auch, wie EULER in seiner Antwort vom 10. Dezember 1737 sagt, wenn man in der Entwickelung der Funktion (arc sin $x)^2$ nach Potenzen von x, nämlich

$$(\text{arc sin } x)^2 = \frac{1}{1}\frac{x^2}{1} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{2} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \cdots$$

$x = 1$ setzt [2]).

Merkwürdigerweise findet sich diese Potenzreihe für (arc sin $x)^2$ bereits bei dem japanischen Mathematiker SEKI (1642—1708) [3]), und es war daher von Wichtigkeit, festzustellen, wann sie in dem Abendlande zuerst auftritt. Wir wissen, daß sie EULER schon im Jahre 1737 bekannt gewesen ist; sein Brief an JOHANN BERNOULLI ist jedoch erst im Jahre 1904 von G. ENESTRÖM veröffentlicht worden. Fragt man aber, wann die Reihe zuerst im Drucke vorkommt, so wurden bis jetzt die *Mélanges d'analyse algébrique* von J. DE STAINVILLE angeführt, die 1815 zu Paris erschienen sind [4]). Um so überraschender ist es, daß EULER bereits 1743 in dem Journal litteraire die Herleitung der Potenzreihe für (arc sin $x)^2$ ausführlich angegeben hat. Diese Reihe wird nämlich in recht eleganter Weise mittels der Methode der unbestimmten Koeffizienten aus der linearen Differentialgleichung

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 1$$

gewonnen, der die Funktion (arc sin $x)^2$ bei der Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ genügt.

In dem Journal verwendet EULER die Reihe für (arc sin $x)^2$ dazu, um einen zweiten Beweis für die Formel $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ zu geben, von dem sich in den Briefen an JOHANN BERNOULLI nichts findet. Es ist nämlich

$$\frac{1}{6}(\text{arc sin } x)^3 = \int_0^x \left(\frac{1}{1}\frac{x^2}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{8} + \cdots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Auf der rechten Seite wird wieder gliedweise integriert, nach der In-

1) Biblioth. Mathem. 5_3, S. 266—267.

2) Ebenda, S. 270.

3) Vgl. P. HARZER, *Die exakten Wissenschaften im alten Japan;* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **14**, 1905, S. 318.

4) Dieses seltene Werk scheint in Deutschland nur auf der Universitätsbibliothek zu *Breslau* vorhanden zu sein. Die Potenzreihe für (arc sin $x)^2$ ist wohl erst dadurch allgemein bekannt geworden, daß sie CAUCHY, unter Berufung auf STAINVILLE, in seine *Analyse algébrique*, Paris 1822, S. 550 aufgenommen hat; vgl. auch das Zitat bei J. G. HAGEN, *Synopsis der höheren Mathematik*, Bd. I (Berlin 1891), S. 113.

tegration $x = 1$ gesetzt und auf die einzelnen Integrale die Reduktionsformel angewandt. Auf diese Weise ergibt sich

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{2^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6^2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8^2}\frac{\pi}{2} + \dots,$$

woraus durch Division mit $\frac{\pi}{8}$ die Formel für S_2 hervorgeht.

5.

Es liegt nahe zu vermuten, daß EULER 1737 gehofft hatte, mittels der Reihenentwickelungen der Potenzen des arc sin x die Formeln für die Summen S_{2r} zu erhalten. Jedenfalls war er jedoch, als er die Abhandlung in dem Journal niederschrieb, zu der Überzeugung gelangt, daß eine solche Hoffnung trügerisch sei.

Wann aber hat EULER die *Démonstration* verfaßt? Gewisse Anhaltspunkte für die Bestimmung der Zeit werden sich ergeben, wenn wir den Gang seiner weiteren Untersuchungen über die Summen S_{2r} betrachten.

Zunächst ist eine erst im Jahre 1750 veröffentlichte Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes* zu nennen, die sich in dem T. XII der Petersburger Kommentarien für das Jahr 1740, S. 53, befindet, die aber, wie sich herausstellen wird, spätestens 1741 entstanden sein muß. Die GIRARD-NEWTONschen Relationen hatten es zwar ermöglicht, Schritt für Schritt die Werte der Summen S_2, S_4, S_6, $S_8, \dots$ zu berechnen, allein die Berechnung wurde mit wachsendem Exponenten $2r$ immer mühsamer, und man mußte wünschen, einen bequemeren Weg zu finden. Dies gelang EULER durch folgende Überlegung. Bei der Gleichung

$$1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma x^3 + \delta x^4 - \dots = 0$$

seien die Summen der reziproken Potenzen der Wurzeln der Reihe nach $A, B, C, D, \dots$ Dann besteht vermöge der GIRARD-NEWTONschen Relationen die Identitität:

$$\frac{\alpha - 2\beta x + 3\gamma x^2 - 4\delta x^3 + \dots}{1 - \alpha x + \beta x^2 - \gamma y^3 + \delta x^4 - \dots} = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots;$$

dabei ist der Zähler des Bruches gleich der negativen Ableitung seines Nenners. Kann man also den Bruch nach Potenzen von x entwickeln, so hat man in den Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x die Summen der reziproken Wurzelpotenzen. Ist nun im besonderen die Gleichung

$$1 - \sin x = 0$$

vorgelegt, die die Doppelwurzeln $x = \frac{\pi}{2}, -3\frac{\pi}{2}, +5\frac{\pi}{2}, -7\frac{\pi}{2}, \dots$ besitzt, so hat man die Funktion

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

nach Potenzen von x zu entwickeln. Diese genügt aber der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(1 + y^2),$$

mit der Anfangsbedingung $x = 0, y = 1$, zu deren Integration nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten

$$y = 1 + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

angesetzt wird.

Die neue Methode benutzt EULER, um sogleich die Werte von S_2 bis S_{24} zu berechnen, und zwar erscheinen diese Werte in der Gestalt

$$S_{2r} = \frac{2^{2r-1}}{(2r+1)!} A_{2r} \pi^{2r},$$

wo die A_{2r} Brüche bedeuten, die nach keinem unmittelbar ersichtlichen Gesetze fortschreiten; es ist im besonderen

$$A_2 = \frac{1}{2},\ A_4 = \frac{1}{6},\ A_6 = \frac{1}{6},\ A_8 = \frac{3}{10},\ A_{10} = \frac{5}{6},\ A_{12} = \frac{691}{210}, \ldots\ldots$$

Die Koeffizienten A_{2r} stehen aber, wie EULER erkennt, im engen Zusammenhange mit den Koeffizienten, die bei seiner klassischen Summenformel aufgetreten waren; diese geht nämlich bei Benutzung der Zeichen A_{2r} über in die Gleichung:

$$\sum_0^n f(x) = \int_0^n f(x)\,dx - \frac{1}{2}[f(n) - f(0)] + \frac{1}{3!} A_2 [f'(n) - f'(0)]$$
$$- \frac{1}{5!} A_4 [f'''(n) - f'''(0)] + \frac{1}{7!} A_6 [f^{v}(n) - f^{v}(0)] - \ldots{}^{1)}$$

6

Die Abhandlung, über die im Vorhergehenden berichtet wurde, läßt sich als eine Ausgestaltung der Methode vom Jahre 1736 bezeichnen. Die Methode selbst erfuhr im Jahre 1741 heftige Angriffe. DANIEL BERNOULLI machte in einem Briefe an EULER vom 20. September 1741 dagegen geltend, daß „eine aequatio per series nicht die proprietates habe, als die aequationes algebraicae, in quibus coefficiens secundi termini est summa radicum; solches könnte ich mit gar vielen Argumenten beweisen. Wenn also Ew. ehemals gefunden, daß $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{1}{6} cc$, posita c = circumferentiae circuli, cujus diameter = 1, so halte ich dieses theorema nur

1) Wenn EULER am Schlusse seiner *Démonstration* sagt, er habe bereits zwei verschiedene Methoden zur Berechnung der Koeffizienten A_{2r} gegeben, so meint er damit wohl erstens die Methode der Reihenentwickelung von tg $\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$ und zweitens die Definition der Koeffizienten A_{2r} durch die Summenformel.

accidental, . . . allein applicieren Sie eben dieses raisonnement auf eine Ellipse cujus axis major $= m$, axis minor $= n$, circumferentia $= S$, so werden Sie finden, quod sit

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{mmSS}{6n^4},$$

quod foret absurdum. Diese letztere Observation hat auch Herr Prof. CRAMER aus Genf überschrieben"[1]). EULERS Antwort ist leider verloren, daß er jedoch die Einwendungen DANIEL BERNOULLIS als stichhaltig anerkannt hat, ergibt sich daraus, daß er am 16. Januar 1742 einem Neffen JOHANN BERNOULLIS, NICOLAUS BERNOULLI in Basel, eine strengere Begründung seiner Methode vom Jahre 1736 und eine ganz neue, auf der Anwendung bestimmter Integrale beruhende Herleitung der Summen S_{2r} mitgeteilt hat[2]). Daß EULER sich gerade an NICOLAUS BERNOULLI wandte, hängt wohl damit zusammen, daß dieser sich mit der Summation der Reihe der reziproken Quadrate beschäftigt hatte[3]).

Jene strengere Begründung besteht in dem Nachweise, daß die Gleichung $\sin x = 0$ nur die Wurzeln $x = n\pi$ hat, wo n irgend eine positive oder negative ganze Zahl mit Einschluß der Null bedeutet. Durch Verbindung der Gleichungen

$$\sin x = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$$

und

$$e^z = \lim_{n=\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

gewinnt EULER die Formel

$$\sin x = \frac{1}{2i}\lim_{n=\infty}\left\{\left(1 + \frac{ix}{n}\right)^n - \left(1 - \frac{ix}{n}\right)^n\right\}$$

1) *Corresp.* II, S. 477.

2) *Opera postuma* I, S. 519.

3) *Inquisitio in summam seriei* $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$ Comment. Petrop. **10**, ad annum 1738 [1747], S. 19—21. N. BERNOULLI zeigt hier, daß die Funktion

$$y = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \dots,$$

wenn die Koeffizienten A_n der Rekursionsformel genügen

$$A_n + (an[n+1] + bn + c) = A_n + \frac{1}{1}\,(e[n+1]n + f[n+1] + g)$$

einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt. Kann man also ein Integral dieser Gleichung finden, bei dem die Anfangsbedingung $x = 0$, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = A_1$ erfüllt ist, so liefern die Werte des Integrals für $x = 1$ die Summe der unendlichen Reihe $A_1 + A_2 + A_3 + \dots$. Die Schwierigkeit, diese Methode auf S_2 anzuwenden, besteht darin, daß N. BERNOULLI die zugehörige Differentialgleichung nicht integrieren konnte und daher aus S_2 durch recht umständliche Kunstgriffe eine andere Reihe herleitet, bei der die Integration durch Kreisfunktionen gelingt.

und zerlegt die Differenz der n-ten Potenzen nach Absonderung des Faktors $\frac{2ix}{n}$ in trinomische Faktoren. Der Übergang zur Grenze führt alsdann zu der berühmten Produktformel:

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2 \pi^2}\right),$$

die demnach dem Probleme, die Summe der reziproken Quadrate zu finden, ihre Entstehung verdankt[1]). Wenn man jetzt die Potenzreihe, die aus der Produktformel durch Ausmultiplizieren hervorgeht, mit der NEWTONschen Potenzreihe für $\sin x$ vergleicht, erhält man Relationen, aus denen sich die Summen S_{2r} bestimmen lassen.

NICOLAUS BERNOULLI meinte (Brief vom 13. Juli 1742), der letzte Schluß sei nur dann berechtigt, wenn man beweise, daß die NEWTONsche Reihe für jeden Wert von x konvergiere; denn der von CRAMER mitgeteilte Trugschluß erkläre sich daraus, daß die dabei benutzte Reihe bei wachsenden Werten des Ellipsenbogens divergent werde[2]). EULER, dem Betrachtungen über Divergenz und Konvergenz immer unbehaglich waren, hat, wie sein Brief an NICOLAUS BERNOULLI vom 10. November 1742 zeigt, diese für die damalige Zeit recht scharfsinnigen Betrachtungen nicht zu würdigen gewußt; das CRAMERsche Paradoxon, meint er, finde seine Auflösung darin, daß die betreffende Gleichung auch imaginäre Wurzeln besitze.

Die neue Herleitung gründet sich auf die Integralformel:

$$\text{(I)} \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} - x^{q-p-1}}{1 - x^q} = \frac{\pi}{q \operatorname{tg} \frac{p\pi}{q}},$$

in der p und q positive ganze Zahlen, p kleiner als q, bedeuten; sie ergeben sich durch Partialbruchzerlegung und Summation der durch die Integration entstehenden endlichen Reihen der Form

$$\sum_{\nu=1}^{n} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (a\nu + b).$$

Wenn man aber die Integranden nach steigenden Potenzen von x entwickelt und darauf gliedweise integriert, so gelangt man zu der unendlichen Summe

$$\frac{1}{p} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{p + nq} + \frac{1}{p - nq}\right)$$

1) Für die Gedanken, die EULER bei der Produktformel leiteten, vergleiche man die ausführlichen Darlegungen in dem langen Briefe an NICOLAUS BERNOULLI, *Opera postuma* I, S. 521—527.

2) *Correspond.* II, S. 683—684. — 3) *Opera postuma* I, S. 528.

und hat also für

$$\frac{p}{q} = s$$

die Identität

$$(T) \qquad \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi s} = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{s+n} + \frac{1}{s-n} \right).$$

Hierin bezeichnet s zunächst einen positiven echten Bruch, man darf aber, wie EULER sich ausdrückt, nach dem Gesetze der Stetigkeit s auch als eine stetig veränderliche Größe ansehen, nach der differentiiert werden kann. Wiederholte Differentation liefert die Identitäten

$$\frac{1}{(2r)!} \frac{d^{2r}}{ds^{2r}} \frac{\pi}{\operatorname{tg} \pi s} = \frac{1}{s^{2r}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{(s+n)^{2r}} + \frac{1}{(s-n)^{2r}} \right).$$

Wird hierin $s = \frac{1}{2}$ gesetzt, so gelangt man zu den Summen S_{2r}.

Eine Reihe ähnlicher Betrachtungen führt von der Integralformel

$$(\text{II}) \qquad \int_0^1 \frac{x^{p-1} + x^{q-p-1}}{1 + x^q} \, dx = \frac{\pi}{q \sin \frac{p\pi}{q}}$$

zu der Identität:

$$(S) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi s} = \frac{1}{s} + \sum_{n-1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{s+n} + \frac{1}{s+n} \right),$$

aus der man durch wiederholte Differentiation weitere Identitäten erhält. Auf diese Art findet EULER die Summen der unendlichen Reihen

$$1 - \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} - \frac{1}{7^{2r+1}} + \frac{1}{9^{2r+1}} - \cdots;$$

dagegen ist es weder ihm noch einem späteren Mathematiker gelungen, die Summen

$$S_{2r+1} = 1 + \frac{1}{2^{2r+1}} + \frac{1}{3^{2r+1}} + \frac{1}{4^{2r+1}} + \frac{1}{5^{2r+1}} + \cdots$$

in geschlossener Form darzustellen. Daß sie zu den entsprechenden Potenzen von π jedenfalls nicht in einfachen rationalen Verhältnissen stehen, hat schon EULER bemerkt; ob der von ihm vermutete Zusammenhang mit dem natürlichen Logarithmus von 2[1]) wirklich besteht, verdiente geprüft zu werden.

Auch zu der neuen Herleitung hat NICOLAUS BERNOULLI eine feine Bemerkung gemacht; es ist sehr zu bedauern, daß dieser hochbegabte Mann wegen seiner vielen Amtsgeschäfte als Professor der Jurisprudenz keine Zeit gefunden hat, sich mehr mit Mathematik zu beschäftigen. Zur Herleitung der Formeln, die hier mit (T) und (S) bezeichnet sind, bedürfe es, schreibt er, keines so großen Apparates, denn die Formel (T) folge

1) *Opera postuma* I, S. 521.

sofort aus der Produktdarstellung für $\sin \pi s$ durch logarithmische Differentiation und auf ähnliche Art könne man auch die Formel (S) finden[1]). Als EULER hierüber Aufklärung wünscht, antwortet er am 24. Oktober 1742, man brauche nur bei dem Quotienten $\frac{\sin \pi s}{\cos \pi s}$ in Zähler und Nenner die Produktdarstellungen einzusetzen und dann wieder logarithmisch zu differentiieren[2]). Wo sich diese eleganten Beweise für die Formeln (T) und (S) zuerst gedruckt finden, habe ich nicht ermitteln können. EULER scheint sie nicht benutzt zu haben; in der zusammenfassenden Darstellung seiner Untersuchungen über die Kreisfunktionen, *Introductio* (Lausanne 1748), T. I, Cap. 10, gibt er zwar eine elementare Herleitung dieser Formeln (§ 178), sie geschieht aber durch Umformungen im Sinne der sogenannten algebraischen Analysis.

7.

Bei seiner Einführung in die Berliner Akademie am 6. September 1742 hat EULER nicht weniger als sieben Abhandlungen zur Aufnahme in deren Schriften vorgelegt, von denen fünf sogleich in den Miscellanea Berolinensia gedruckt wurden, deren siebenten Band vom Jahre 1743 sie zieren. Den Gegenstand der dritten und vierten Abhandlung bilden die Untersuchungen, über die soeben berichtet wurde. In der Abhandlung *De inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur* (S. 129—171) findet sich die Herleitung der Integralformeln (I) und (II), und unmittelbar darauf folgt die Abhandlung *De summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum dissertatio altera* (S. 172—192)[3]). Wohl nicht ohne Absicht hatte sich EULER mit dieser Abhandlung in Berlin eingeführt, die einen Höhepunkt in seinen mathematischen Leistungen bedeutet. Wie fruchtbar der Gedanke war, die Kreisfunktionen als Produkte darzustellen, bei denen die Nullstellen in Evidenz gesetzt werden, hat sich später bei den elliptischen Funktionen gezeigt, und die Frage nach einer solchen Produktdarstellung der ganzen transzendenten Funktionen hat die Mathematiker bis zum Ende des 19. Jahrhunderts beschäftigt.

Wenden wir uns jetzt zurück zu EULERS Abhandlung in dem Journal

---

1) *Correspond.* II, S. 688—689.

2) Ebenda, S. 694.

3) EULERS *Opuscula analytica* t. II (Petersburg 1785), enthalten auf S. 257—274 eine Abhandlung *De seriebus potestatum reciprocis methodo nova ac facillima summandis.* Merkwürdigerweise ist diese neue Methode mit der alten vom Jahre 1742 durchaus identisch, so daß man annehmen muß, EULER habe bei der Abfassung der Abhandlung, die wahrscheinlich aus den letzten Jahren seines Lebens stammt, sich seiner früheren Untersuchungen nicht mehr erinnert.

littéraire vom Jahre 1743, so lassen sich für deren Abfassungszeit ziemlich enge Grenzen angeben. Da in ihr der T. VII der Petersburger Commentarii erwähnt wird, kann sie nicht vor 1740 geschrieben sein, und auf der anderen Seite zeigt der Briefwechsel zwischen EULER und NICOLAUS BERNOULLI, daß sie vor 1742 entstanden ist. Man wird demnach mit der Angabe 1740 bis 1741 das Richtige treffen. Die Bedeutung der *Démonstration* für die Geschichte der Summen S_{2r} läßt sich jetzt so kennzeichnen:

1) in ihr wurde die 1737 brieflich an JOHANN BERNOULLI mitgeteilte zweite Herleitung des Wertes der Summe der reziproken Quadrate zum ersten Male durch den Druck veröffentlicht. Diese Herleitung ist nicht nur, wie GAUSS sich ausdrückt, „recht artig", sondern genügt auch den Ansprüchen der modernen Strenge;

2) außerdem enthält die Abhandlung eine dritte bemerkenswerte Herleitung derselben Summe, die weder in Briefen an JOHANN BERNOULLI vorkommt noch sonst von EULER erwähnt worden ist;

3) bei dieser dritten Herleitung wird die Entwickelung der Funktion $(\arcsin x)^2$ in eine Potenzreihe, die EULER 1737 ohne Beweis an JOHANN BERNOULLI brieflich mitgeteilt hatte, vollständig durchgeführt. Sie ist darin im Abendlande zum ersten Male durch den Druck veröffentlicht, während bisher nur bekannt war, daß sie 1815 bei STAINVILLE auftritt.

Wenn zu Anfang bemerkt wurde, daß EULERS *Démonstration* unter den Mathematikern keine Beachtung gefunden habe, so gibt es doch vielleicht eine Ausnahme. In dem Werke: *The doctrine and application of fluxions*, das THOMAS SIMPSON im Jahre 1750 zu London erscheinen ließ, findet sich nämlich (S. 395) genau die Herleitung für die Summe der reziproken Quadratzahlen, die EULER dort angegeben hatte[1]), allerdings als Spezialfall einer Reihe für $\int \boldsymbol{H}(a - bz^n)^m \times z^{qn-1}\,dz$, wo $\boldsymbol{H}$ selbst ein Integral von der Form $\int (k + lz)^r \times z^{vn-1}\,dz$ ist. Ob es sich dabei um ein zufälliges Zusammentreffen handelt oder ob SIMPSON EULERS Abhandlung gelesen hat, das wird sich wohl jetzt nicht mehr aufklären lassen.

8.

Es sei gestattet, den Bericht noch ein wenig weiter zu führen, da sich so ein gewisser Abschluß erreichen läßt.

Die zusammenfassende Darstellung der Untersuchungen über die

1) Auf diesen merkwürdigen Umstand bin ich durch die Dissertation von MELDERCREUTZ aufmerksam geworden (S. 34—35), dem freilich die EULERsche *Démonstration* entgangen ist.

Kreisfunktionen in der *Introductio* (1748), auf die schon hingewiesen wurde, enthält in den Ergebnissen kaum etwas Neues. Nur eine Äußerung EULERS muß angeführt werden. Nachdem EULER aus der Produktdarstellung des Sinus eine Methode zur Bestimmung der Summen S_{2r} hergeleitet hat, gibt er (T. I, S. 131) die ausgerechneten Formeln bis zu $2r = 26$; nur wird jetzt

$$S_{2r} = \frac{2^{2r-2}}{(2r+1)!} C_{2r} \pi^{2r}$$

gesetzt, so daß $C_{2r} = 2A_{2r}$ ist. „Bis hierhin", sagt EULER, „hat man durch einen Kunstgriff, der an anderer Stelle erklärt werden wird, die Koeffizienten der Potenzen von π fortsetzen können. Ich habe diese Tabelle hier beigefügt, weil die beim ersten Anblick ganz regellose Reihe der Brüche 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{691}{105}$, $\frac{35}{1}$ usw. bei vielen Gelegenheiten sehr nützlich ist."

Welches sind die vielen Gelegenheiten? Die EULERsche Summationsformel ist schon erwähnt worden. Dazu kommen die Summen

$$1 - \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} - \frac{1}{4^{2r}} + \cdots = \frac{2^{2r}-1}{(2r+1)!} A_{2r} \pi^{2r},$$

die EULER wohl schon 1736 gefunden hatte und die auch in der *Introductio* wiederkehren. Genügt das, um von „vielen Gelegenheiten" zu sprechen? Man wird so zu der Vermutung gedrängt, daß EULER damals noch andere Eigenschaften jener Koeffizienten gekannt habe. Etwas darüber veröffentlicht hat er allerdings erst 1755 in den *Institutiones calculi differentialis*, denn hier wird (Pars II, Cap. 5, § 124 und folgende) eine neue Herleitung der Summen S_{2r} gegeben, bei der sich der Zusammenhang der Koeffizienten A_{2r} mit den sogenannten BERNOULLIschen Zahlen B_{2r} herausstellt[1]). EULER geht aus von der aus (T) folgenden Identität

$$\frac{1}{2u^2} - \frac{\pi}{2u} \operatorname{cotg} \pi u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - u^2}.$$

Werden auf der rechten Seite die Glieder nach steigenden Potenzen von u entwickelt, während links die von EULER bereits hergeleitete Potenzentwickelung eingesetzt wird, so entsteht die Formel:

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{2r-1}{(2r)!} B_{2r} u^{2r-2} = \sum_{r=1}^{\infty} S_{2r} u^{2r-2}.$$

---

1) Die Darstellung bei M. CANTOR, a. a. O. 3^2, S. 767 kann leicht zu Irrtümern Veranlassung geben. Wenn dieser sagt: „EULER nennt die Zahlen [B_{2r}] nach dem Namen ihres Erfinders, JAKOB BERNOULLI, die *BERNOULLIschen Zahlen*", so wird man dem ganzen Zusammenhange nach vermuten, das solle heißen, EULER habe an dieser Stelle der *Institutiones* den Namen *BERNOULLIschen Zahlen* zuerst eingeführt. EULER selbst schreibt jedoch: „numeri qui ab inventore JACOBO BERNOULLIO vocari solent BERNOULLIANI". In der Tat hatte schon A. DE MOIVRE in den *Miscellanea analytica*, London 1730 (Complementum S. 19, 20, 21) den Namen *BERNOULLIsche Zahlen* eingeführt.

Da EULER die ersten 15 BERNOULLIschen Zahlen berechnet hatte[1]), so waren damit die Summen der reziproken Potenzen bis $2r = 30$ bekannt. Vielleicht ist dieses Verfahren der in der *Introductio* erwähnte „Kunstgriff", vielleicht aber hat EULER damals auch an das Verfahren gedacht, das er in der Abhandlung *De seriebus quibusdam considerationes* entwickelt hatte; eine Verweisung auf diese Abhandlung war 1748 nicht möglich, da sie erst 1750 erschienen ist.

So hat EULER nicht nur zuerst die Summen der reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen bestimmt, sondern auch den Zusammenhang der dabei auftretenden Koeffizienten mit anderen wichtigen Formeln der Analysis nachgewiesen. Seine Untersuchungen über diesen Gegenstand gehören zu den schönsten und tiefsten, mit denen uns sein Genius beschenkt hat.

Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord.

Année 1743. Tome second. Première Partie.

(115) *Démonstration de la somme de cette Suite*

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

La méthode que j'ai donnée dans les *Commentaires de l'Académie de Pétersbourg*, pour trouver la somme de cette suite, lorsque l'exposant n est un nombre pair

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$$

a quelque chose d'extraordinaire, parcequ' elle est tirée d'un principe, dont on n'a pas encore fait beaucoup d'usage dans les recherches de cette nature. Elle est cependant aussi sûre et aussi fondée, que toute autre méthode, dont on se serve ordinairement, dans la sommation des Suites infinies: (116) ce que j'ai fait voir aussi par le parfait accord de quelques cas déjà connus d'ailleurs et par les approximations, qui nous fournissent une manière aisée d'examiner la vérité dans la pratique. Mais il semble aussi que cette méthode ait un très grand avantage, en ce qu'elle nous conduit en même tems à la connaissance d'une infinité d'autres Suites, dont les sommes ont été inconnües jusqu'à présent; pendant que les méthodes ordinaires ne nous découvrent presque rien sur ce genre de Suites. Plusieurs Géomètres ont honoré cette découverte de leur attention, en cherchant une démonstration du cas $n = 2$ auquel j'avois trouvé que la somme de cette suite

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

---

1) *Inst. Calc. diff.* Pars II, S. 420—421.

égaloit la sixième partie du quarré de la circonférence d'un cercle, dont le diamêtre est $= 1$. Ce cas leur sembloit d'abord d'autant plus remarquable que Feu Mr. JACQUES BERNOULLI, apres l'avoir cherché long tems en vain, l'avoit jugé d'une grande conséquence, pour perfectionner la Théorie des *séries infinies*.

Je communiquerai ici une méthode tout à fait différente de celle, par où j'y suis parvenu au commencement, (117) qui nous donnera par le moyen des intégrations la somme de la dite suite; mais qui ne peut être employé que dans ce seul cas; de sorte que la sommation des plus hautes puissances, selon toute apparence, ne peut etre achevée, que par ma première méthode générale. Cette méthode particulière, que je vais expliquer ici, pourra servir cependant tant pour confirmer d'avantage la générale, que pour faire voir la grande difficulté et presque l'impossibilité de traiter de la même manière les cas suivans, lorsque n est 4, ou 6 ou un autre nombre pair quelconq, si l'on voulait opérer selon les méthodes reçües dans la Theorie des suites.

Je considère un cercle, dont le rayon est $= 1$, duquel je prends un arc quelconq $= s$, dont le *sinus* soit $= x$: delà on aura par la nature du cercle $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ et $s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$. Si nous mettons à présent $x = 1$, l'arc s deviendra égal au quadrant du cercle, c'est à dire si nous exprimons la raison du diamêtre à la circonference par $1 : \pi$ l'arc s sera égal à $\frac{\pi}{2}$ au cas que $x = 1$. Il est clair que j'emploie la lettre π pour marquer le nombre de LUDOLF A KEULEN 3,14159265 etc. Soit maintenant proposée cette formule différen-(118)tielle $sds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ dont l'intégral sera $= \frac{ss}{2}$, et si l'on fait après l'intégration $x = 1$, l'intégral sera $= \frac{\pi\pi}{8}$. Cherchons à présent par la méthode ordinaire l'intégral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ et convertissons l'intégral $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ selon les règles connües dans une série infinie, et nous aurons:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = x + \frac{1}{2.3} x^3 + \frac{1.3}{2.4.5} x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} x^9 + \text{etc.}$$

Cette suite substituée à la place de $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ donnera

$$sds = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1}{2.3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3}{2.4.5} \frac{x^5 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \frac{x^7 dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$
$$+ \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9} \frac{x^9 dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \text{etc.}$$

De cette suite chaque terme est absolument intégrable; car l'intégral du premier terme est $1-\sqrt{(1-xx)}$ pris de cette façon, qu'il s'évanouisse en mettant $x=0$, ainsi que demande la (119) nature de la question par laquelle l'intégral de sds doit s'évanouir en faisant $x=0$. Le premier terme étant intégrable, tous les suivants le seront aussi, parceque l'intégration de chaque terme se réduit a l'intégration du précédent. On verra cela clairement, si l'on fait réflexion, qu'il y a généralement

$$\int\frac{x^{n+2}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}.$$

Mais comme nous cherchons seulement l'intégral de sds au cas $x=1$, faisons dans le membre $-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}$ qui est algébrique $x=1$, et nous aurons pour ce cas $x=1$ cette réduction générale

$$\int\frac{x^{n+2}\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}.$$

Delà nous tirerons les intégrals de tous les termes de notre suite pour le cas $x=1$, comme l'on verra dans cette table:

$$\begin{aligned}
&\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=1-\sqrt{(1-xx)}=1 \text{ (faisant } x=1)\\
&\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2}{3}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2}{3},\\
&\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{4}{5}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2.4}{3.5},\\
(120)\qquad&\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{6}{7}\int\frac{x^5\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2.4.6}{3.5.7},\\
&\int\frac{x^9\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{8}{9}\int\frac{x^7\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}=\frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Mais par la *série* donnée pour sds, nous avons l'intégration achevée,

$$\frac{ss}{2}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\frac{1}{2.3}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\frac{1.3}{2.4.5}\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\frac{1.3.5}{2.4.6.7}\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-xx)}}+\text{etc.}$$

$=\frac{\pi\pi}{8}$ après avoir fait $x=1$, auquel cas devient $s=\frac{\pi}{2}$, comme nous l'avons vû. Nous n'avons dont qu'à multiplier chaque intégral par son coefficient numérique, pour trouver cette *série*

$$\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{3.3}+\frac{1}{5.5}+\frac{1}{7.7}+\frac{1}{9.9}+\text{etc.}$$

qui ne contient dans les dénominateurs que les quarrés des nombres impairs, les numérateurs demeurant par tout égaux à l'unité. La somme de ces fractions à l'infini sera par conséquence égale à $\frac{\pi\pi}{8}$, qui est la même, que j'ai trouvée par ma méthode générale pour cette suite. Delà nous tirerons à présent aisément la somme de celle-ci

(121) $$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

de laquelle si l'on ôte son quart, qui est

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$$

tous les quarrés pairs s'en iront, et on aura celle-ci

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

qui contient par conséquent les trois quarts de l'autre

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

de sorte que nous avons pour la sommation de celle-ci

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

ainsi que j'avois trouvé par l'autre méthode générale expliquée dans les *Commentaires de l'Académie imp. de Pétersbourg au Tome VII.*

Comme nous sommes parvenu par le moïen de ce calcul à la suite des quarrés impairs

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}$$

de laquelle nous avons tiré d'abord par une juste conséquence la suite de tous les quarrés

(122) $$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \frac{1}{49} + \text{etc.},$$

je puis aussi par un calcul un peu différent immediatément trouver la somme celle-ci, dont celle-là comprendra trois quarts. Pour parvenir à ce but, je cherche une autre *série* commode qui m'exprimera l'intégral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ généralement pour toute valeur possible du sinus x. En cette vüe je pose $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ dont j'obtiens cette équation

$$dy\sqrt{(1-xx)} = dx\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$$

qui différentiée en mettant dx constant, donnera

$$ddx\,(1-xx) - xdxdy = dx^2.$$

Cette équation, quoique différentielle du second degré, est très commode pour exprimer la valeur de y par une *série*, qui procède selon les puissances d'x. Pour trouver cette *série* supposons connu d'ordinaire

$$y = \alpha xx + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10} + \text{etc.}$$

où nous commençons d'abord par le quarré d'x, parceque nous voïons de l'équation $dy = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ que mettant x infiniment (123) petit, dy devient égal à xdx et par conséquent $y = xx$. Ensuite nous faisons croitre par tant les exposans d'x de deux, parceque dans l'équation *différentio-différentielle*

$$ddy\,(1-xx) - xdxdy = dx^2$$

les x et dx remplissent par tout deux dimensions. De cette équation supposée nous tirons

$$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + 8\delta x^7 + \text{etc.}$$

et en différentiant la seconde fois posant dx constant

$$\frac{ddy}{dx^2} = 2\alpha + 3\,.\,4\beta x^2 + 5\,.\,6\gamma x^4 + 7\,.\,8\delta x^6 + \text{etc.}$$

Mais en divisant l'équation différentio-différentielle par dx^2, nous avons

$$\frac{ddy}{dx^2} - \frac{xxddy}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} - 1 = 0$$

qui substituant pour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{ddy}{dx^2}$ les valeurs trouvées donne

$$\left.\begin{array}{l} + 2\alpha + 3.4\beta x^2 + 5\,.\,6\gamma x^4 + 7\,.\,8\delta x^6 + \text{etc.} \\ \qquad - 2\alpha x^2 \;\; - 3\,.\,4\beta x^4 - 5\,.\,6\gamma x^6 - \text{etc.} \\ \qquad - 2\alpha x^2 \;\; - 4\beta x^4 \quad - 6\gamma x^6 - \text{etc.} \end{array}\right\} = 1$$

(124)

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} &&= \frac{1}{2} \\ \beta &= \frac{2.2.\alpha}{3.4} &&= \frac{2.2}{2.3.4} \\ \gamma &= \frac{4.4.\beta}{5.6} &&= \frac{2.2.4.4}{2.3.4.5.6} \\ \delta &= \frac{6.6.\gamma}{7.8} &&= \frac{2.2.4.4.6.6}{2.3.4.5.6.7.8} \\ \varepsilon &= \frac{8.8.\delta}{9.10} &&= \frac{2.2.4.4.6.6.8.8}{2.3.4.5.6.7.8.9.10} \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Aïant trouvé ces nombres, on aura

$$y = \frac{ss}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{6} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{8} + \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\frac{x^{10}}{10} + \text{etc.}$$

A présent cherchons par le moïen de cette suite en la multipliant par $ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ l'intégral de $\frac{ssds}{2}$ qui sera

$$\frac{s^3}{6} = \frac{1}{2}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2}{3.4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2.4}{3.5.8}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2.4.6}{3.5.7.8}\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \text{etc.}$$

et prenons ces intégrals seulement dans le cas $x = 1$ auquel nous aurons

$$s = \frac{\pi}{2} \text{ et } \frac{s^3}{6} = \frac{\pi^3}{48}.$$

Mais tous ces intégrals se réduisent par la réduction générale donnée à celle-ci (125) $\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ qui dans le cas $x = 1$ devient $= \frac{\pi}{2}$ et par conséquent les autres seront

$$\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{3}{3}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3}{2.4}\frac{\pi}{2}$$

$$\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{5}{6}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{\pi}{2}$$

etc.

Multiplions chaque intégral par son coefficient qui lui convient dans la *série* égale à $\frac{s^3}{6}$ ou dans notre cas à $\frac{\pi^3}{48}$ et nous aurons

$$\frac{\pi^3}{48} = \frac{1}{2.2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4.4}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{6.6}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{8.8}\frac{\pi}{2} + \text{etc.}$$

Divisons de part et d'autre par $\frac{\pi}{2}$ et multiplions par 4 ce qui donnera

$$\frac{\pi^3}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$$

de sorte que nous sommes parvenus à la somme de cette suite sans avoir eu besoin de la conclure de l'autre

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.}$$

(126.) Ces deux méthodes toutes faciles qu'elles sont, mériteroient une plus grande attention, si elles se pouvoient employer également pour trouver les sommes des plus hautes puissances paires, qui sont toutes comprises dans mon autre méthode générale tirée de la considération des racines d'une équation infinie. Mais malgré toute la peine que je me suis donnée pour trouver seulement la somme des biquarrés

$$\frac{1}{1^4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.}$$

je n'ai pas encore pu réussir dans cette recherche, quoique la somme par l'autre méthode me soit connue laquelle est $= \frac{\pi^4}{90}$. Par faciliter la peine, que d'autres peut-être se donneront, dans cette affaire, j'y joindrai les sommes de toutes les puissances paires, que j'ai trouvées par l'autre méthode:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{2}{1.2.3}\,\frac{1}{2}\,\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{2^3}{1.2.3.4.5}\,\frac{1}{6}\,\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{2^5}{1.2.3\ldots7}\,\frac{1}{6}\,\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{2^7}{1.2.3\ldots9}\,\frac{3}{10}\,\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{2^9}{1.2.3\ldots11}\,\frac{5}{6}\,\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{2^{11}}{1.2.3\ldots13}\,\frac{691}{210}\,\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \text{etc.} = \frac{2^{13}}{1.2.3\ldots15}\,\frac{35}{2}\,\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \text{etc.} = \frac{2^{15}}{1.2.3\ldots17}\,\frac{3617}{30}\,\pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \text{etc.} = \frac{2^{17}}{1.2.3\ldots19}\,\frac{43867}{42}\,\pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \text{etc.} = \frac{2^{19}}{1.2.3\ldots21}\,\frac{1222277}{110}\,\pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \text{etc.} = \frac{2^{21}}{1.2.3\ldots23}\,\frac{854513}{6}\,\pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \text{etc.} = \frac{2^{23}}{1.2.3\ldots25}\,\frac{1181820455}{546}\,\pi^{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \text{etc.} = \frac{2^{25}}{1.2.3\ldots27}\,\frac{76977927}{2}\,\pi^{26}.$$

La loi que ces expressions tiennent, est en partie si connüe qu'elle n'a pas besoin d'explication. La seule difficulté qui se trouve, est dans les fractions, qui sont représentées en des caractères différens

$$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{3}{10}\quad \frac{5}{6}\quad \frac{691}{210}\quad \frac{35}{2}\quad \text{etc.}$$

(127) mais j'ai déjà donné deux méthodes différentes pour trouver ces fractions encore plus loin.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3 : 12. Siehe die Bemerkung zu **1**^{2} : 12 (BM 1_3, 1900, S. 265).

1^3 : 15. Vgl. die Bemerkung zu **1**^{2} : 15 (BM 3_3, 1902, S. 323).

1^3 : 22. Mit einigem Staunen findet man, daß Herr Cantor als Beleg der Bemerkung: „Bis zur Million scheint die Zahlenschreibung der Keilschrift sich nicht erstreckt zu haben; zum mindesten sind keine Beispiele davon bekannt" nur eine im Jahre *1868*, also vor beinahe *vierzig* Jahren erschienene Arbeit anführt. Viel besser wäre es wohl gewesen, die ganze Bemerkung sowie etwa $^3/_4$ der Seite 23 zu streichen, wenn Herr Cantor keine wesentlich jüngere Quelle als Beleg zitieren konnte.

Nach den Untersuchungen von H. V. Hilprecht spielt die Zahl $60^4 =$ 12,960,000 in der babylonischen Arithmetik eine besonders hervorragende Rolle, und Hilprecht hat eine Tafel aufgefunden, wo gewiße Quotienten der Zahl 195,955,500,000,000 angegeben werden (siehe D. E. Smith, Bulletin of the American mathematical society 13_2, 1907, S. 396). G. Eneström.

1^3 : 51. Es ist mir unbekannt, aus welchem Grunde Herr Cantor die Bemerkung von Paul Tannery in der BM 1_3, S. 266 unberücksichtigt gelassen hat. Tannery hebt hervor, daß Perigenes sicherlich eine unrichtige Lesart statt Epigenes ist, der wahrscheinlich im 2. vorchristlichen Jahrhundert lebte, also zu einer Zeit, wo chaldäische Mathematik schon lediglich Astrologie bedeutete. Ferner bemerkt Tannery, daß Zeller gar nicht sagt, das Werk des Jamblichos von Chalcis enthalte auch Mathematisches. Unter solchen Umständen dürfte die Angabe: „Es muß wohl die Mathematik dort [= bei den Babyloniern] eine erzählenswerte Geschichte erlebt haben, wenn wir auch nur daraus schließen, daß sie alten Schriftstellern würdig däuchte, sich mit ihr zu beschäftigen" am besten gestrichen werden sollen. G. Eneström.

---

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

1^3 : 58. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 22 (BM 1_3, 1900, S. 265).

1^3 : 66. Hier wäre ein Hinweis auf 1^3 : 504 angebracht; siehe die Bemerkung zu 1^2 : 29 (BM 1_3, 1900, S. 266).

1^3 : 71. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 34 (BM 1_3, 1900, S. 266).

1^3 : 106. Vgl. die Bemerkung zu 1^2 : 64 (BM 3_3, 1902, S. 137).

1^3 : 146. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 135 (BM 1_3, 1900, S. 266).

1^3 : 152. Über den Ursprung des Satzes vom Hypotenusenquadrat kommen bis zur Zeit von Proklus 10 Zeugnisse in Betracht, die ich zusammengestellt und besprochen habe in § 8 meiner Abhandlung: *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* in der Festschrift: Novae Symbolae Joachimicae (Halle 1907). Cantor nennt nur 4 Zeugnisse und sagt, diese lauten bestimmt. Ich finde, diese 4 lauten nicht alle bestimmt und die 6 übrigen auch nicht alle. Cicero bezweifelt das Opfer entschieden, auch Porphyrius macht eine zweifelnde Bemerkung, Plutarch bezieht das Opfer auf einen anderen Satz und ebenso Diogenes I 25. Apollodors Verse, die von Plutarch, Athenäus und Diogenes zitiert werden, sagen nur, Pythagoras habe wegen einer geometrischen Figur ein Opfer gebracht. Athenäus und Diogenes fügen allerdings im Text hinzu, Apollodor erzähle von dem Opfer anläßlich des Satzes vom Hypotenusenquadrat. Bei Plutarch steht dies nicht. Da Plutarch und Diogenes das Opfer auch auf andere Sätze beziehen, so haben wahrscheinlich alle drei Schriftsteller nur Apollodors Verse vor sich gehabt, und die beiden späteren unter ihnen haben in ihrem Text ihre eigene Vermutung mit der Aussage Apollodors vermengt.

Das rechtwinklige Dreieck von den Seiten 3, 4, 5 wird bis zur Zeit von Proklus nur von Vitruv als Erfindung von Pythagoras bezeichnet.

G. Junge.

1^3 : 153. Selbst wenn man annimmt, daß Pythagoras die Theorie des Irrationalen gefunden hat — ich habe in der soeben zitierten Abhandlung eine Reihe von Bedenken dagegen vorgebracht — so folgt daraus doch nicht, daß Pythagoras den Satz vom Hypotenusenquadrat kannte. Wahrscheinlich ist das Irrationale am gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck entdeckt worden oder, was dasselbe ist, an der Diagonale des Quadrats. Man kann aber sehr wohl wissen, daß das Quadrat über der Diagonale die doppelte Fläche hat wie das Quadrat selbst, ohne darum den allgemeinen Satz vom Hypotenusenquadrat zu kennen!

Anm. 5). Über die letzten Pythagoreer s. Zeller, *Philosophie der Griechen* I^5 (1892), S. 339.

G. Junge.

1^3 : 155. Die Arithmetik, die Theon von Smyrna lehrt, ist vielfach nicht die altpythagoreische, wie Cantor annimmt, auch nicht die platonische, wie man nach dem Titel von Theons Werk glauben sollte, sondern neupythagoreisch. Theon behandelt, was Cantor nicht erwähnt, S. 25 und 26 die gerade-ungeraden und die ungerade-geraden Zahlen, deren Unterscheidung erst nacheuklidisch ist. Er gibt dem Worte „heteromek“ einen Sinn, der ebenfalls erst

nach-euklidisch ist. Auch seine Definition der vollkommenen Zahl ist vor EUKLID nicht nachweisbar, und nur in diesem Falle scheint THEON zu ahnen, daß seine Definition nicht die altpythagoreische ist. Vgl. unten die Bemerkungen zu 1^3: 159, 160, 168. G. JUNGE.

1^3: 157. Das Wort λογιστικός in der Bedeutung „Rechner" kommt bei PLATO noch im *Theätet* 145 A vor, λογιστική in der Bedeutung „Rechenkunst" sehr oft; s. AST, *Lexicon Platonicum*.

Anm. [4]). Über die pythagoreische Zahlenlehre spricht ZELLER a. a. O. hauptsächlich S. 343—448. G. JUNGE.

1^3: 158. Nach der eigenen Ansicht des ARISTOTELES ist die Eins *ἀρχή* der Zahlen, s. Metaph. X 1, 1052 b 23; V 15, 1021 a 12. (Der Index von BONITZ gibt unter *εἷς* zahlreiche Nachweise über Stellen verwandten Inhalts.) Die Eins ist nicht selbst Zahl, sondern sie ist das Maß, mit dem die Zahlen gemessen werden; s. Metaph. XIV 1, z. B. 1088 a 6: *διὸ καὶ εὐλόγως οὐκ ἔστι τὸ ἓν ἀριθμός· οὐδὲ γὰρ τὸ μέτρον μέτρα, ἀλλ' ἀρχὴ καὶ τὸ μέτρον καὶ τὸ ἕν.*

Diese Lehren waren vielleicht pythagoreischen Ursprungs, aber jedenfalls von den Griechen allgemein akzeptiert. Sie sind auch in EUKLIDS Elementen VII Def. 1, 2 zu erkennen.

Dagegen war es eine spezifisch pythagoreische Lehre, daß die Eins und die Zahlen Element und Prinzip der Dinge seien; s. ZELLER, a. a. O. S. 343—350. Nur hiervon ist an der von CANTOR zitierten Stelle, Metaph. XIII 8, die Rede, nämlich 1083 b 8—19.

Die von CANTOR angeführte Stelle aus THEON ist vielleicht unecht, da sie den Zusammenhang völlig unterbricht. HILLER bemerkt zu dem ganzen Satze „fort. del.". In demselben Satze wird übrigens gesagt, auch die unbestimmte Zweiheit sei keine Zahl. G. JUNGE.

1^3: 159. Das PHILOLAUS-Fragment in Anm. [1]) heißt vollständig: *ὅ γα μὰν ἀριθμὸς ἔχει δύο μὲν ἴδια εἴδεα, περισσὸν καὶ ἄρτιον, τρίτον δὲ ἀπ' ἀμφοτέρων μιχθέντων ἀρτιοπέρισσον. ἑκατέρω δὲ τῶ εἴδεος πολλαὶ μορφαί.* Unter dem *ἄρτιον* sind also wahrscheinlich nur die Potenzen von 2 zu verstehen, die anderen geraden Zahlen sind für PHILOLAUS das *ἀρτιοπέρισσον*; s. ZELLER, a. a. O. S. 350 Anm. 2 und besonders TANNERY, Bullet. d. sc. mathém. 8_2 (1884), S. 293. TANNERY gibt eine Übersicht über den Bedeutungswandel von *ἀρτιοπέρισσος* und verwandten Ausdrücken.

Zu den Potenzen von 2, den *ἀφ' ἑνὸς διπλασιαζόμενοι,* wie ARISTOTELES Metaph. XIII 8, 1084 a 6 sagt (EUKLID IX 32 sagt vorsichtiger *ἀπὸ δυάδος διπλ.*), gehört in gewissem Sinne auch die Eins, d. h. die Eins gehörte für PHILOLAUS zum *ἄρτιον*. Daher wohl die auf den ersten Blick verwunderliche Bemerkung von ARISTOTELES Metaph. I 5, 986 a 20, die Eins sei für die Pythagoreer sowohl gerade wie ungerade.

Jedenfalls war die pythagoreische Lehre vom Geraden und Ungeraden nicht so einfach wie es nach CANTORS Darstellung scheint. G. JUNGE.

1^3: 160. CANTOR beachtet nicht, daß das Wort „heteromek" die Bedeutung gewechselt hat. Bei PLATO (*Theätet* 147. 148) und ARISTOTELES (Anal.

post. I 4, 73 b 1 und in der Kategorientafel I 5, 986 a 26) heißen alle Nichtquadratzahlen „heteromek", bei Nikomachus und Theon dagegen allerdings die Zahlen von der Form $n(n+1)$. Vgl. Tannery, Ann. de la fac. des lettres des Bordeaux 6 (1884), S. 99; Bullet. des sc. mathém. 8_2 (1884), S. 297, und meine oben bei $1^3:152$ genannte Abhandlung § 6.

G. Junge.

$1^3:160$. Ich sehe keinen Anlaß, bei dem 3. Gegensatz der Kategorientafel, *ἓν καὶ πλῆθος*, an Prim- und zusammengesetzte Zahlen zu denken. Aristoteles spricht über diesen Gegensatz Metaph. X 3, 1054 a 20 und IV 2, 1004 a 10, aber von Prim- und zusammengesetzten Zahlen ist nirgends die Rede. Vielmehr ist offenbar der Gegensatz zwischen der Eins und den anderen Zahlen gemeint; s. oben die Bemerkung zu $1^3:158$. G. Junge.

$1^3:162$. Die Pythagoreer haben die Quadrat- und Gnomonzahlen wohl nicht durch aneinander gelegte Quadrate dargestellt, sondern durch nebeneinander gesetzte Punkte oder Steinchen, etwa wie Hankel, *Gesch. der Mathem.* S. 104 angibt; s. die Figur.



Die übrigen Vieleckszahlen nämlich außer den Quadratzahlen lassen sich überhaupt nicht anders als durch einzelne Punkte darstellen. Daß aber außer den Quadratzahlen wenigstens noch die Dreieckszahlen altpythagoreisch waren, schließe ich zwar nicht mit Cantor S. 159 aus ihrem Vorkommen bei Theon, aber ich halte es für wahrscheinlich, da Aristoteles die Dreieckszahlen erwähnt. Die Stelle ist gleichzeitig ein Beleg für das Steinchenlegen der Pythagoreer; es wird erzählt, wie ein pythagoreischer „Philosoph" Eurytus durch Steinchenlegen das Wesen der Dinge erforschen wollte. Metaph. XIV 5, 1092 b 10: . . . *καὶ ὡς Εὔρυτος ἔταττε τίς ἀριθμὸς τίνος, οἷον ὁδὶ μὲν ἀνθρώπου, ὁδὶ δε ἵππου, ὥσπερ οἱ τοὺς ἀριθμοὺς ἄγοντες εἰς τὰ σχήματα τρίγωνον καὶ τετράγωνον, οὕτως ἀφομοιῶν ταῖς ψήφοις τὰς μορφὰς τούτων* (das letzte Wort nach dem Vorschlag von Zeller, a. a. O. S. 395 Anm. 3).

G. Junge.

$1^3:163$—165. Die Timäus-Stelle enthält den Begriff des Irrationalen gar nicht. Es ist von geometrischen Mitteln die Rede. Wenn das geometrische Mittel zweier Zahlen *irrational wird*, wie wir sagen würden, so existiert es für Plato überhaupt nicht. Vgl. meine oben bei $1^3:152$ genannte Abhandlung und Cantor $1^3:912$. G. Junge.

$1^3:166$. Vgl. die Bemerkung zu $1^2:155$ (BM 3_3, 1902, S. 138).

$1^3:168$. Aristoteles (Metaph. I 5, 986 a 8) sagt ganz ausdrücklich, daß für die Pythagoreer 10 eine vollkommene Zahl sei. Theon erwähnt übrigens S. 46, daß die Zahl 10 von den Pythagoreern und daß auch die Zahl 3 vollkommen genannt wird, obgleich sie nach seiner, mit Euklid VII Def. 22 übereinstimmenden, Definition nicht vollkommen sind. Euklids und Theons Definition ist vor Euklid nicht nachweisbar. G. Junge.

$1^3:176$. Über den Bericht, Pythagoras habe von den Galliern gelernt, s. Zeller, a. a. O. S. 302. Zeller hält diesen Bericht für eine Erfindung und dadurch entstanden, daß Pythagoreer und Gallier den Seelenwanderungsglauben gemeinsam hatten. G. Junge.

1^3 : 180. Siehe die Bemerkung zu 1^3 : 152 (oben S. 62).

1^3 : 181. Vgl. die Bemerkung zu 1^2 : 169 (BM 3_3, 1902, S. 138).

1^3 : 182. ARISTOTELES sagt an *zwei* Stellen, die Diagonale eines Quadrats sei inkommensurabel mit der Seite, weil sonst Gerades und Ungerades gleich sein müßte. Die Stellen sind Anal. pr. I 23, 41 a 26; I 44, 50 a 37.

Dieser Satz, der EUKLID X 117 zu stehen pflegt, ist hier nach HEIBERG interpoliert; s. *EUCLIDIS Elementa* ed. HEIBERG V p. LXXXIV. Die Tatsache, daß der Beweis sehr alt ist, jedenfalls schon ARISTOTELES bekannt war, wird durch diese Feststellung natürlich nicht beeinflußt. G. JUNGE.

1^3 : 183. Siehe die Bemerkung zu 1^3 : 160 (oben S. 63—64).

1^3 : 203. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 190—191 (BM 7_3, 1906/7, S. 378).

1^3 : 213. Anm. [4]). Daß THEODOR mathematischer Lehrer PLATOS war, steht bei DIOGENES an zwei Stellen, nämlich außer II 103 noch III 6.

G. JUNGE.

1^3 : 225. ALLMAN (*Greek Geometry*, 1889, S. 126) hat schon vor langer Zeit darauf aufmerksam gemacht, daß CANTOR die Stelle der „Gesetze" 819, 820 (die pagina bei CANTOR ist falsch) mit Unrecht auf die Stereometrie deutet. Die Stelle geht vielmehr auf das Irrationale. Die geringe Pflege der Stereometrie beklagt PLATO im „Staat" VII 528.

Zu den „Gesetzen" 819, 820 s. übrigens RITTER, Komm. zu PLATOS Ges. (Leipzig 1896), S. 221 f., wo mit guten Gründen die Meinung vertreten wird, daß PLATO hier über die gegenseitige Meßbarkeit von Längen-, Flächen- und Raumgrößen spricht. G. JUNGE.

1^3 : 236. Siehe die Bemerkung zu 1^3 : 160 (oben S. 63—64).

1^3 : 245. Herr CANTOR erwähnt drei Stellen aus PAPPOS, und schließt aus denselben, daß ARISTAIOS teils eine Arbeit über Kegelschnitte in fünf Büchern, teils fünf Bücher körperlicher Örter verfaßt hat. Aber die zweite Stelle ist nach HULTSCH unecht, und diese Ansicht dürfte jetzt unter den Sachkundigen ziemlich allgemein angenommen sein (siehe z. B. J. L. HEIBERG, *Literargeschichtliche Studien über EUKLID*, Leipzig 1882, S. 85). Auch die erste Stelle ist nach HULTSCH eine Interpolation, und wenn sie wirklich beide echt wären, könnten sie sich sicherlich auf dieselbe Arbeit als die dritte Stelle, d. h. auf die fünf Bücher der körperlichen Örter beziehen. Daß ARISTAIOS ein Zeitgenosse des EUKLIDES war, hat HEIBERG (a. a. O. S. 85) aus der zweiten Stelle gefolgert, aber wenn diese Stelle unecht ist, so dürfte darauf kein besonderes Gewicht gelegt werden können.

Dass ARISTAIOS der Ältere die „Vergleichung der fünf regelmäßigen Körper" verfaßt hat, steht nicht bei HYPSIKLES (vgl. P. TANNERY, *La géométrie grecque* I, Paris 1887, S. 154), so daß der Verfasser dieser Schrift ebensogut der sonst durchaus unbekannte ARISTAIOS der Jüngere sein könnte.

G. ENESTRÖM.

1^3: 270. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 255 (BM 3_3, 1902, S. 238).

1^3: 287. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 272 (BM 4_3, 1903, S. 396) und BM 6_3, 1905, S. 322.

1^3: 297. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 283 (BM 1_3, 1900, S. 499) sowie BM 7_3 (1906/7), S. 328.

1^3: 298. Hinsichtlich der Definition: „Die Gerade ist die kürzeste Entfernung zweier Punkte“ sagt Herr Cantor, daß sie häufig als archimedisch genannt wird, und daß allerdings der darin enthaltene Satz bei Archimedes vorkommt, daß aber Archimedes keineswegs beabsichtigte, durch diesen Satz die Gerade zu erklären. Um seine Behauptung zu begründen, verweist Herr Cantor auf die bekannte Stelle des ersten Buches über Kugel und Zylinder. Auf der anderen Seite behauptete schon Proklos an einer ebensosehr bekannten Stelle seines Kommentars zum ersten Buche der Elemente, daß Archimedes die Gerade als die kürzeste Entfernung zweier Punkte *definiert* hat (*ὁ δ' αὖ Ἀρχιμήδης τὴν εὐθεῖαν ὡρίσατο γραμμὴν ἐλαχίστην τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν*) und Simplikios sagt nach der Übersetzung des Gherardo Cremonese ebenfalls ausdrücklich, daß Archimedes „diffinivit eam [= lineam rectam] dicens: linea recta est brevior lineis, quarum extremitates sunt eedem“ (*Anaritii In decem libros priores Elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. Curtze, Leipzig 1899, S. 6). Bevor *alle* Schriften des Archimedes bekannt sind, dürfte es also ratsam sein, nicht bestimmt zu verneinen, daß Archimedes wirklich die Gerade auf die fragliche Weise *definiert* hat. Die Definition könnte z. B. sehr wohl in der verlorenen Schrift über Parallellinien gestanden haben.

G. Eneström.

1^3: 310. Da Herr Cantor im Vorübergehen den Inhalt des 8. Satzes des Buches von den Konoiden und Sphäroiden berührt, wäre es von besonderem Interesse zu erwähnen, daß, wie Zeuthen ausdrücklich hervorgehoben hat, der Kegel, dessen Konstruktion dort gelehrt wird, im allgemeinen ein schiefstehender Kegel wird. Archimedes hat also gezeigt, daß zu jeder Ellipse ein schiefstehender Kegel gefunden werden kann, auf dessen Mantel sie sich befindet. Aber ist es dann möglich, daß ein so hervorragender Mathematiker wie Archimedes nicht sofort sehen würde, daß Ellipsen auf jedem schiefstehenden Kegel herausgeschnitten werden können? Freilich scheint Herr Cantor weiter unten (S. 335, Z. 7—8) bestimmt zu behaupten, daß dieser Umstand dem Archimedes nicht bekannt war, aber mit einer solchen Geringschätzung der Scharfsinnigkeit eines der größten Mathematikers des Altertums dürften nur wenige mathematisch-historische Forscher einverstanden sein. Meint Herr Cantor indessen mit seiner soeben zitierten Bemerkung nur, daß die fragliche Kenntnis des Archimedes nicht direkt belegt ist, so hat er natürlich recht, aber jedenfalls wäre es von Interesse zu bemerken, daß sich Archimedes tatsächlich mit Ellipsen auf *schiefstehenden* Kegeln beschäftigt hat.

G. Eneström.

1^3: 351. Vgl. die Bemerkung zu 1^2: 335 (BM 6_3, 1905, S. 305).

1^3: 380. Da Herr Cantor weiter unten (S. 405) durch gesperrte Schrift hervorhebt, daß eine unreine quadratische Gleichung in einer Pseudo-Heronschen Schrift rechnerisch gelöst wird, wäre es ganz besonders angebracht zu erwähnen,

daß sich im 3. Buche (Satz 4) der echten HERONschen *Metrika* eine solche Lösung findet. In dem fraglichen Satze (S. 148—151 der Ausgabe von H. SCHÖNE) handelt es sich um die Berechnung einer Länge x, die so beschaffen ist, daß

$$x(14-x)=\frac{6720}{144},$$

und nach dem von H. SCHÖNE herausgegebenen Texte gibt HERON als Annäherungswert der gesuchten Größe 8 an, aber ohne Zweifel ist der Text hier verstümmelt, denn für $14-x$ wird $5\frac{1}{2}$ als Annäherungswert angegeben, so daß sicherlich $8\frac{1}{2}$ statt 8 zu lesen ist (vgl. H. SUTER, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 103). Wie HERON die Wurzel berechnet hat, deutet er gar nicht an. Aus der Gleichung folgt, daß

$$x=7+\sqrt{2\tfrac{1}{3}}=7+\sqrt{\tfrac{21}{9}}=7+\tfrac{\sqrt{21}}{3},$$

und nach der von HERON im ersten Buche der *Metrika* angewendeten Methode zur Ausziehung von Quadratwurzeln ist

$$\sqrt{21}=5-\tfrac{4}{10},$$

so daß $$x=7+\tfrac{\sqrt{21}}{3}=7+\frac{5-\frac{4}{10}}{3}=8\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{30}.$$

Der Annäherungswert $8\frac{1}{2}$ ist also ziemlich gut. G. ENESTRÖM.

1^3: 429. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 400 (BM 1_3, 1900, S. 267).

1^3: 431. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 402 (BM 7_3, 1906/7, S. 379).

1^3: 432. In betreff der verloren gegangenen geometrischen Arbeit des NIKOMACHOS sagt P. RAMUS (*Scholarum mathematicarum libri unus et triginta*, Basileae 1569, S. 37): „NICOMACHUS . . . geometriam . . . scripserat . . . Geometriam aiunt esse Venetiis apud DIEGUM HURTADUM“. Ob diese Spur weiter verfolgt worden ist, weiß ich nicht; jedenfalls ist es mir nicht gelungen, bei den mathematisch-historischen Verfassern, die sich eingehender mit NIKOMACHOS beschäftigt haben (z. B. NESSELMANN, LORIA, TANNERY), eine Erwähnung der RAMUSschen Notiz aufzufinden. G. ENESTRÖM.

1^3: 488. Vgl. die Bemerkung zu 1^2: 457 (BM 3_3, 1902, S. 238).

1^3: 500. Vgl. die Bemerkung zu 1^2: 466 (BM 4_3, 1903, S. 397).

1^3: 500. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 467 (BM 1_3, 1900, S. 267).

1^3: 502. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 468 (BM 7_3, 1906/7, S. 203) sowie die „Ergänzungen und Verbesserungen“ des Herrn CANTOR (S. 912).

1^3: 509. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 475 (BM 3_3, 1902, S. 139).

1^3: 510. Da Herr CANTOR jetzt anerkennt, daß MAXIMUS PLANUDES etwas früher gelebt hat, als in der 2. Auflage der *Vorlesungen* angegeben wurde, hätte wohl der Bericht über diesen Mathematiker versetzt werden sollen, um die chronologische Ordnungsfolge zu beobachten.

1³ : 513. Auch der Absatz über Rhabdas sollte auf Grund der Verbesserungen der chronologischen Angaben versetzt werden, und zwar *nach* dem Stück über Moschopulos.

1³ : 515. Siehe die Bemerkungen zu 1² : 480—481 (BM 7_3, 1906/7, S. 80—81).

1³ : 528. Da Herr Cantor (siehe Seite 587) nicht mehr festhält, daß die sogenannte *Geometria Boëtii* echt ist, sondern zugibt, daß man die Abfassung derselben in das 11. Jahrhundert versetzen muß, so ist seine Bemerkung, daß für das komplementäre Divisionsverfahren ein anderer Ursprung als ein römischer zunächst nicht zu Gebote steht, jetzt fast unverständlich. Tatsächlich tritt das komplementäre Divisionsverfahren erst im 10. Jahrhundert auf, und die Annahme, daß das Verfahren älteren Ursprungs sei, ist lediglich eine unbelegte Mutmaßung, auch wenn man damit einverstanden ist (siehe S. 588), daß der Verfasser der *Geometria Boëtii* wesentlich feldmesserische Quellen benutzt hat.

G. Eneström.

1³ : 545. Es ist mir nicht recht verständlich, warum Herr Cantor dem Auffinder (E. Hoppe) des vermeintlichen Nachweises der Abhängigkeit des Vitruvius von Heron schuldig (siehe Z. 8) war, seine Schlußfolgerungen (mehr als zwei Druckseiten) im Wortlaute zu wiederholen, auch wenn man voraussetzen wollte, daß diese Schlußfolgerungen richtig und beweiskräftig gewesen wären; solche lange wörtliche Wiederholungen dürften sonst in den *Vorlesungen* kaum oder wenigstens nur äußerst selten vorkommen. Indessen ist diese Frage natürlich von geringem Belang, viel wichtiger ist dagegen, daß die erste Hälfte der Hoppeschen Ausführungen, so viel ich sehen kann, eine Mystifikation enthält, deren Opfer Herr Cantor durch einen wunderbaren Zufall geworden ist. Um zu erklären, was ich meine, bringe ich hier unten die fragliche Heron-Stelle zum Abdruck, teils nach der Nixschen Übersetzung, teils nach dem Hoppeschen Zitate. Die kursiv gedruckten Worte bei Nix entsprechen den Punkten bei Hoppe.

Nix.

Nehmen wir zuerst an, er [der Hebel] sei dem Erdboden parallel. Der Hebel sei die Linie $\alpha\beta$, und die durch ihn zu bewegende Last, nämlich γ, bei dem Punkte α, die bewegende Kraft bei dem Punkte β, *der Stein unter dem Hebel, auf dem sich derselbe bewegt, bei dem Punkte* δ *und sei* $\beta\delta$ *größer als die Linie* $\delta\alpha$. Wenn wir nun das bei β befindliche Hebelende heben, *so daß sich der Hebelarm über den Stein, um den sich der Hebel dreht, erhebt, so bewegt sich die Last* γ *nach der anderen Seite.* Dann beschreibt der Punkt β einen Kreis um den Mittelpunkt δ und der Punkt α um denselben Mittelpunkt einen kleineren Kreis.

Hoppe.

Nehmen wir zuerst an, er (der Hebel) sei dem Erdboden parallel. Der Hebel sei die Linie $\alpha\beta$ und die durch ihn zu bewegende Last, nämlich γ, bei dem Punkte α, die bewegende Kraft bei dem Punkte β, ... Wenn wir nun das bei β befindliche Hebelende heben .... dann beschreibt der Punkt β einen Kreis um den Mittelpunkt ς (ς ist die Kante des Körpers γ, gegen welche der Hebel drückt) und der Punkt α um denselben Mittelpunkt einen kleineren Kreis.

Bei HERON finden sich also Hebel, Last und ein Stein unter dem Hebel, auf dem sich derselbe bewegt, und selbstverständlich handelt es sich also um einen zweiarmigen Hebel. HOPPE hat dagegen den Stein *entfernt* (er hat nämlich die Worte ausgelassen, wo HERON den Stein nennt!), bekommt dadurch einen einarmigen Hebel, und da die HERONschen Ausführungen selbstverständlich nicht für diesen Fall passen *können*, so wirft HOPPE dem HERON „einen Fehler" vor. Ja, er geht noch weiter und schreibt ihm eine „irrige Beobachtung" zu, von der bei HERON nicht einmal eine Andeutung vorkommt. Muß man nicht dies eine Mystifikation nennen?

Aber jetzt kommt das wunderbarste. Herr CANTOR hat das HOPPEsche Zitat nicht ohne weiteres abgedruckt, sondern dasselbe mit der NIXschen Übersetzung verglichen, er hat sogar gesehen, daß nicht der Buchstabe ς, sondern der Buchstabe δ bei NIX vorkommt, aber **den Stein** hat Herr CANTOR weder im NIXschen Texte (vgl. oben die kursiv gedruckten Worte) noch in der NIXschen Figur 27, S. 116 (wo der Stein δ sofort entdeckt werden muß) aufgefunden. Er hat darum ganz einfach in das HOPPEsche Zitat δ statt ς eingesetzt und in seiner eigenen Figur 81 eine Ecke der *Last* (!) durch δ bezeichnet!

Die erste Hälfte der HOPPEschen Schlußfolgerungen ist also meines Erachtens nur eine Mystifikation, die zweite Hälfte ist im *günstigsten* Falle (vgl. R. MEIER, *De HERONIS aetate*, Leipzig 1905, S. 32—33) ein sehr billiges „argumentum ad ignorantiam" von folgender Form: HERON hat eine gewisse Maschine beschrieben, wir kennen jetzt keinen älteren Schriftsteller, bei dem eine Beschreibung dieser Maschine vorkommt, also (?!) hat HERON dieselbe zuerst beschrieben.

Herr HOPPE selbst ist von der Richtigkeit seines „Nachweises" so überzeugt, daß er behauptet, wir seien dadurch mit zweifelloser Sicherheit (!) für das Leben des HERON auf die Zeit vor VITRUVIUS gekommen. Dagegen scheint Herr CANTOR nicht so weit zu gehen, denn S. 547 bemerkt er: „wer dagegen die erwähnte Verwandtschaft auf gemeinsame Abhängigkeit von einem unbekannten älteren Schriftsteller deutet . . .". Aber dann ist es noch schwieriger einzusehen, warum Herr CANTOR schuldig gewesen wäre, die langen HOPPEschen Schlußfolgerungen im Wortlaute zu wiederholen. G. ENESTRÖM.

1^3 : 563—564. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 524 (BM 7_3, 1906/7, S. 282).

1^3 : 564. Siehe die Bemerkung zu 1^2 : 400 (BM 1_3, 1900, S. 267).

1^3 : 576. Als das unabwendbarste Zeichen dafür daß BOËTIUS „eine Geometrie schrieb" bezeichnet Herr CANTOR die Enzyklopädie des CASSIODORIUS. Aber aus der Angabe des CASSIODORIUS geht ja nicht hervor, daß BOËTIUS „eine Geometrie schrieb", sondern nur, daß er die EUKLIDischen Elemente übersetzt hat („EUCLIDEM translatum in latinam linguam idem vir magnificus BOËTIUS dedit"). Da nun die Hauptfrage immer gewesen ist (vgl. S. 581 Z. 7—9), ob die „*Geometria BOËTII*" echt oder unecht sei, so versteht man überhaupt nicht, welchen Zweck der Verweis auf CASSIODORIUS hat und noch weniger, welchen Zweck die folgenden Zeilen der Seite 576 haben (merkwürdigerweise weist Herr CANTOR dabei auch nicht in der 3. Auflage auf die Worte des CASSIODORIUS: „Qui [= EUCLIDES translatus] si diligenti cura relegatur" hin).

Unangebracht ist es jedenfalls, Z. 20 die von Cassiodorius erwähnte Schrift als „*die* Geometrie" zu bezeichnen, da Herr Cantor selbst S. 577 Z. 1 zugibt, daß es sich nur um die Übersetzung der Euklidischen Elemente handelt.

G. Eneström.

1^3: 580. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 539—540 (BM 7_3, 1906/7, S. 283).

1^3: 583. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 542 (BM 1_3, 1900, S. 268).

1^3: 590—591. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 550 (BM 7_3, 1906/7, S. 204).

1^3: 660. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 618 (BM 6_3, 1905, S. 306—307).

1^3: 664. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 622 (BM 2_3, 1901, S. 143).

1^3: 703. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 661 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3: 704. Siehe die Bemerkungen zu 1^2: 662 (BM 3_3, 1902, S. 139; 1^3, 1900, S. 499).

1^3: 706. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 663 (BM 3_3, 1902, S. 405).

1^3: 713. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 671 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3: 715—716. Ich habe schon in meiner Bemerkung zu 1^2: 673 (BM 5_3, 1904, S. 407—408) hervorgehoben, daß der Ausdruck „in alio libro arithmetico" nicht, wie Herr Cantor angenommen hat, auf eine Schrift über spekulative Arithmetik hinzuweisen braucht, sondern wenigstens ebensogut „in dem anderen Buche der Arithmetik" bedeuten und sich auf den unmittelbar vorher von Alkhwarizmi zitierten „liber algebre et almucabalah" beziehen kann, da tatsächlich im 12. Jahrhundert die Algebra auch „arithmetica" genannt wurde (siehe z. B. Anaritius, ed. Curtze, Leipzig 1899, S. 267). Da indessen Herr Cantor noch in der dritten Auflage der *Vorlesungen* behauptet, aus der fraglichen Stelle gehe unzweifelhaft hervor, daß unter jenem anderen Buche der Arithmetik die spätere sogenannte spekulative Arithmetik im Gegensatze zur praktischen Arithmetik gemeint sei, so scheint es mir jetzt angebracht, meine Ansicht etwas ausführlicher zu begründen.

Die betreffende Stelle lautet:

> Et iam patefeci in libro algebre et almucabalah, id est restaurationis et oppositionis, quod uniuersus numerus sit compositus, et quod uniuersus numerus componatur super unum. Vnum ergo inuenitur in uniuerso numero; et hoc est quod in alio libro arithmetice dicitur,

und die erste Frage ist: kann man den Satz: „unum invenitur in universo numero" in der Algebra des Alkhwarizmi wiederfinden? Diese Frage muß meiner Ansicht nach entschieden mit Ja beantwortet werden, denn Alkhwarizmi

sagt nach der ROSENschen Übersetzung: „every number, which may be expressed from one to ten, surpasses the preceding by one unit" und fügt hinzu, daß etwas ähnliches auch für Zehner, Hunderter usw. gilt. Nimmt man jetzt hinzu, daß es nirgends erwähnt wird, ALKHWARIZMI habe eine Arbeit über spekulative Arithmetik verfaßt, so scheint es nicht leicht zu erklären, wie aus dem zitierten Passus unzweifelhaft hervorgehen kann, daß er eine solche Arbeit wirklich verfaßte.

Es ist mir unbekannt, ob Herr CANTOR bemerkt hat, daß bei ALKHWARIZMI an einer folgenden Stelle (S. 10 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe) ein Zitat vorkommt, und auf welche Weise Herr CANTOR dies Zitat erklärt. Die Stelle lautet:

> Etiam patefeci in libro, quod necesse est omni numero qui multiplicatur in aliquo quolibet numero, ut duplicetur unus ex eis secundum unitates alterius.

Meiner Ansicht nach bedeutet „liber" auch hier die Algebra, und zwar bezieht sich das Zitat auf die Fortsetzung der von mir oben wörtlich wiedergegebenen Stelle der ROSENschen Übersetzung. Nach der Ansicht des Herrn CANTOR sollte vielleicht „liber" die sonst durchaus unbekannte spekulative Arithmetik bezeichnen. Aber liegt es nicht näher anzunehmen, daß ALKHWARIZMI nur eine einzige Schrift verfaßt hat, die er in seinem Rechenbuch zu zitieren Anlaß hatte, nämlich gerade die Algebra? G. ENESTRÖM.

1^3: 717. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 674 (BM 7_3, 1906/7, S. 204—205) sowie die „Ergänzungen und Verbesserungen" des Herrn CANTOR (S. 912).

1^3: 718. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 675 (BM 5_3, 1904, S. 408).

1^3: 720. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 677 (BM 7_3, 1906/7, S. 284).

1^3: 730. Siehe die Bemerkungen zu 1^2: 687—689 (BM 4_3, 1903, S. 205—206; 2_3, 1901, S. 143—144).

1^3: 734. Die Angabe: „Eine geometrische Schrift [der Söhne des MUSA BEN SCHAKIR] ist in mittelalterlicher Übersetzung auf uns gekommen" ist unvollständig und darum leicht irreleitend. In Wirklichkeit ist nicht nur diese Übersetzung, sondern auch das Original der Schrift auf uns gekommen, und zwar in einer besseren Redaktion als der von GHERARDO CREMONESE benutzten. Ausführliche Auskunft über das arabische Original hat H. SUTER in seinem, von Herrn CANTOR nicht erwähnten Artikel *Über die Geometrie der Söhne des MUSÂ BEN SCHAKIR* (Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, S. 259—272) gebracht.

G. ENESTRÖM.

1^3: 736—737. Wenn die *Vorlesungen* den Zweck haben, den Lesern *richtige* Auskunft über Geschichte der Mathematik zu bieten, so ist es sinnlos, in betreff der Geschichte des Termes „sinus" zuerst zu bemerken: „aus dieser [d. h. PLATONE TIBURTINOS] Übersetzung soll das Wort *sinus* als Name einer trigonometrischen Funktion in die Mathematik aller Völker eingedrungen sein",

denn die Angabe ist, wie Herr CANTOR nachträglich (S. 737) zugibt, *nachweislich* falsch. In Wirklichkeit kommt bei AL-BATTANI nur der *Begriff* „sinus" vor, aber kein Wort, das dem Wortlaut nach durch „sinus" übersetzt werden kann; den Begriff „sinus" bezeichnet AL-BATTANI nämlich durch Chorde oder halbe Chorde (vgl. z. B. H. SUTER, Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 81 und die von ihm zitierte Stelle der Arbeit NALLINOS). Wenn also Herr CANTOR (S. 737) sagt: „Jedenfalls übersetzte ... nicht PLATO von Tivoli ... das arabische dschaib durch das ganz richtige Wort sinus", so ist diese Angabe buchstäblich richtig, denn PLATONE TIBURTINO konnte offenbar nur das übersetzen, was in seiner Vorlage stand, aber erst auf Grund der Fußnote 2) kann der nicht sachkundige Leser erraten, daß das, was hier über die *Wörter* „dschaib" und „sinus" gesagt wird, gar nichts mit AL-BATTANI zu tun hat. G. ENESTRÖM.

1^3: 738. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 694 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3: 743. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 699 (BM 7_3, 1906/7, S. 205).

1^3: 748. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 704 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3: 750. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 706 (BM 1_3, 1900, S. 499).

1^3: 780. Siehe die Bemerkungen zu 1^2: 735 (BM 1_3, 1900, S. 500).

1^3: 781. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 736—737 (BM 7_3, 1906/7, S. 284—285). Herr SUTER hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß der von MIRAM TSCHELEBI zitierte ALA-EDDIN ALI-KOSCHDJI nicht, wie ich angenommen habe, ATAB-EDDIN AL-KASCHI (gestorben etwa 1436) sondern der Astronom ALI BEN MUHAMMED ALA EDDIN AL-KUSCHDJI (gestorben etwa 1474) ist. Die Worte „Nous en donnerons . . . CADHI ZADEH EL-RUMI" (S. 16 des SÉDILLOTschen Artikels) gehören also nicht hierher, und „l'auteur" ist wohl AL-KASCHI. Freilich wird früher von MIRAM TSCHELEBI zweimal (a. a. O. S. 16, 30) „l'illustre auteur" genannt und damit meint er ohne Zweifel ULUG BEG (d. h. in Wahrheit nicht ULUG BEG selbst sondern die Bearbeiter seiner Tafeln); man könnte darum versucht sein anzunehmen, daß AL-KASCHI nur das Problem der Dreiteilung des Winkels auf die Lösung der Gleichung $Px = x^3 + Q$ zurükgeführt hat, und daß später ein Mitarbeiter der ULUG BEGschen Tafeln diese Gleichung wirklich löste. Auf der anderen Seite erwähnt Herr SUTER in seiner Arbeit *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 10, 1900, S. 174) einen in Kairo aufbewahrten Traktat des AL-KASCHI über die Auffindung der Sehne und des Sinus für den Drittel eines Bogens, dessen Sehne und Sinus bekannt sind, und es scheint folglich als ob die Darstellung des MIRAM TSCHELEBI nicht gut redigiert wäre. Jedenfalls ist eine sachkundige Untersuchung des erwähnten Traktates von AL-KASCHI sehr erwünscht. G. ENESTRÖM.

1^3: 794. Siehe die Bemerkung zu 1^2: 748 (BM 1_3, 1900, S. 500).

$1^3:800$. Siehe die Bemerkung zu $1^2:752$ (BM 6_3, 1905, S. 104).

$1^3:802$. Siehe die Bemerkungen zu $1^2:753$, 754 (BM 5^3, 1904, S. 408—409).

$1^3:805—806$. Siehe die Bemerkungen zu $1^2:756—757$ (BM 6_3, 1905, S. 308; 1_3, 1900, S. 500—501.

$1^3:815$. Vgl. die Bemerkung zu $1^2:767$ (BM 1_3, 1900, S. 501).

$1^3:855$. Siehe die Bemerkung zu $1^2:805$ (BM 1_3, 1900, S. 269).

$1^3:857$. Siehe die Bemerkung zu $1^2:807$ (BM 1_3, 1900, S. 269) sowie BM 7_3, 1906/7, S. 400—401.

$1^3:859$. Vgl. die Bemerkung zu $1^2:808$ (BM 1_3, 1900, S. 269).

$1^3:862$. Z. 15 beziehen sich die Verweise auf die in den *Vorlesungen* nicht einmal erwähnte Ausgabe von PEZ (vgl. die folgende Bemerkung); in der Ausgabe von OLLERIS haben die betreffendenden Kapitel die Nummern 22, 23 und 25. Dagegen ist das Z. 16 zitierte „22. Kapitel" wirklich das 22. Kapitel der OLLERISschen Auflage. Hinsichtlich dieses Kapitels, wo bekanntlich das Wort „halhidada" oder „alhidala" steht, bemerkt Herr CANTOR, daß es in der Münchener Handschrift 14836 nicht vorkommt. Diese Angabe ist insofern richtig, als sich das Kapitel ebensowenig wie das folgende in dem Traktate vorfindet, den das alte Inhaltsverzeichnis des Cod. lat. Monac. 14836 „Geometria GERBERTI" nennt (Bl. $24^b—40^b$, $45^a—75^b$). Dagegen kommt das Kapitel in der Handschrift etwas später zweimal vor, nämlich Bl. 80^b und 109^a. An der ersten Stelle steht nach CURTZE „halgidada" und an der zweiten „alhidada". Wenn das Wort, wie Herr CANTOR annimmt, ursprünglich nicht im Texte sondern als Randbemerkung stand, so dürfte diese Randbemerkung jedenfalls schon aus dem 11. Jahrhundert herrühren, denn nach CURTZE entstammt der zweite Teil des Cod. lat. Monac. 14836, abgesehen von einem sehr alten Abschnitt (Bl. 136—143), wahrscheinlich der 2. Hälfte des 11. Jahrhunderts.

G. ENESTRÖM.

$1^3:863$. In betreff der Angabe „Im 24. Kapitel" (Z. 1) vgl. die Bemerkung zu $1^2:812$ (BM 1_3, 1900, S. 269), wo „ligne 22" statt „ligne 21" zu lesen ist. Die Bemerkung rührte von PAUL TANNERY her, der gefunden hatte, daß nicht im 24. aber wohl im 30. Kapitel der von Herrn CANTOR zitierten Ausgabe von OLLERIS ein Verfahren erwähnt wird, welches den Beobachter zwingt, sein Gesicht glatt an die Erde zu drücken. Dagegen wird nicht im 30. sondern im 25. Kapitel von der Mißlichkeit des Verfahrens gesprochen, so daß in Wirklichkeit Z. 1 „25. Kapitel" statt „24. Kapitel" zu lesen ist. Warum Herr CANTOR ursprünglich „24. Kapitel" schrieb, erfährt man aus Anm. 298 (S. 228) seiner Arbeit: *Die Römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst* (Leipzig 1875), wo angegeben wird, daß bei den Verweisen auf GERBERTS Geometrie die Auflage von PEZ

benutzt worden war, und in dieser Auflage hat das von Herrn Cantor gemeinte Kapitel allerdings die Nummer 24. Aber in keiner der drei Auflagen des 1. Bandes der *Vorlesungen* wird auch nur angedeutet, daß Pez eine Auflage von Gerberts Geometrie besorgt hat, noch weniger gesagt, daß sich die Verweise auf diese Auflage beziehen, und es ist darum leicht erklärlich, daß der sachkundige Leser ohne weiteres den Verweis auf das 24. Kapitel als eine entschiedene Unrichtigkeit auffassen muß. Bekanntlich sind in den Handschriften die Absätze der *Geometria Gerberti* nicht numeriert. G. Eneström.

1^3: 867. Hier ist der Passus: „Diese Schriften Gerberts ... waren geometrischen Inhalts. Zwei andere beziehen sich auf Rechenkunst" irreleitend, denn der Leser *muß* die Ansicht bekommen, daß die Worte „Zwei andere" die Bedeutung „Zwei andere Schriften Gerberts" haben. Aus ein paar folgenden Aussprüchen desselben Absatzes könnte der aufmerksame Leser vielleicht folgern, daß es nicht ganz sicher ist, ob die zwei Schriften von Gerbert herrühren, aber erst S. 869 erfährt er, daß Herr Cantor unentschieden lassen will, ob Gerbert wirklich die erste Schrift verfaßt hat. Vergl. auch meine Bemerkung zu 1^2: 816 (BM 7_3, 1906/7, S. 82—83). G. Eneström.

1^3: 869. Herr Cantor bemerkt, daß er darauf verzichtet zu entscheiden. ob die von Olleris herausgegebene *Regula de abaco computi* von Gerbert herrührt, weil nirgend strenge Beweise vorliegen, vielmehr nur Vermutung gegen Vermutung steht. Aber diese Bemerkung kann sich *höchstens* auf die Seiten 311—333 des Olleris schen Textes beziehen, während sie in betreff der Abteilung über Bruchrechnen (S. 333—348) ganz sicher nicht zutrifft. Es ist nämlich, besonders von Nagl, nachgewiesen, daß der Text „Cum passione contraria" eine selbständige Schrift ist, die nichts mit den vorangehenden Regeln über Multiplikation und Division ganzer Zahlen zu tun hat, und daß man nicht den geringsten Grund hat zu vermuten, daß Gerbert der Verfasser des Textes war. Freilich ist es auf der anderen Seite unmöglich zu *beweisen*, daß dieser Text *nicht* von Gerbert herrührt, so lange es nicht festgestellt ist, daß Cod. Bern. 299 oder irgend andere Handschrift des Textes wirklich älter als Gerbert ist, aber darum darf man nicht sagen, daß hier Vermutung gegen Vermutung steht. Vielmehr steht hier gegen eine von Olleris ausgesprochene Vermutung der Nachweis, daß diese Vermutung teils durchaus unbegründet teils unwahrscheinlich ist.

Der Text „De passione contraria" ist in den von Bubnov zitierten Handschriften unvollständig, weil darin der Schluß der Erklärung des Beispieles 120 : 11$\frac{1}{4}\frac{1}{8}$ fehlt. Dieser Schluß ist aber kürzlich von Herrn H. Omont in einer bisher unbekannten Handschrift aufgefunden und in den Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale **39** (1907) veröffentlicht worden. Dieselbe Handschrift enthält unmittelbar nach dem Schluß der Erklärung und der Probe einen unvollständigen Absatz, den ich hier unten zum Abdruck bringe:

> Quamcumque unciarum copulationem, id est aut deuncis, aut dextantis, vel ceterarum, considerare desideras quid sint in se aut in invicem, hanc certus facilem cape regulam: XII^{mam} partem cujuscumque copulationis volueris cum proprio unciarum numero, duces secundum hoc quod sunt in se, vel cum alieno numero unciarum, secundum hoc quod sunt in

invicem. Deinde collige summam ejus, si potes in uncias, sin in minucias, vel, si ita contigerit, in utrumque, et hoc habeto pro hoc quod sunt in se aut in invicem. Verbi gratia. Si vis scire quid sit deunx in se, cum habeat XI. uncias, in his nequit XII$^{\text{ma}}$ pars inveniri, nisi forte in scripulis, nam habet scripulos CC$^{\text{tos}}$LX$^{\text{ta}}$IIII., quorum XII$^{\text{ma}}$ pars sunt XX$^{\text{ti}}$II scripuli, quos cum proprio numero unciarum multiplices, hoc est cum XI., nam undecies XXII. sunt CC[X]LII., que colligenti in uncias et minutias fiunt X. uncia ac remanent II$^{\text{o}}$ scripuli. Verum (?) deunx in se est dextans et dimidia sextula, si vero miraris quid sit deunx in trientem, sume iterum deuncis XII$^{\text{mam}}$, id est XXII., et multiplica cum numero untiarum . . .

Ob dieser Absatz wirklich eine Fortsetzung des Textes „Cum passione contraria" ist oder nicht, dürfte schwer festzustellen sein. Er besagt, daß $(\frac{11}{12})^2 = \frac{11}{12} \cdot 264$ scripuli $= 242$ scripuli $= \frac{10}{12} + \frac{1}{144}$ und bringt den Anfang einer entsprechenden Berechnung von $\frac{11}{12} \cdot \frac{4}{12}$; hier ist also eigentlich eine Erklärung gewisser Sätze der ersten Abteilung des Textes „De passione contraria" gegeben, die *Multiplikation* von Brüchen behandelt. Auf der anderen Seite finden sich ähnliche Ausführungen am Ende der von Boncompagni herausgegebenen „Regule abaci" des Atelhart von Bath, so daß es nicht unmöglich ist, daß der Text „Cum passione contraria" auch nach dem Funde des Herrn H. Omont nicht vollständig bekannt ist. G. Eneström.

1^3 : 875—876. · Hier berichtet Herr Cantor über den Inhalt eines von Paul Tannery und Clerval (1900) herausgegebenen Briefes an Regimbold von Köln. Wie Tannery in der von Herrn Cantor benutzten Arbeit (*Correspondance d'écolâtres*, S. 489 Anm. 1 und 2) ausdrücklich hervorhebt, ist der Inhalt dieses Briefes schon früher von Winterberg aus einer anderen Handschrift veröffentlicht worden, und zwar in den Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **4**, 1882, S. 183—187 (Überschrift: „Liber Franconis de quadratura circuli explicit. Incipit liber de eadem re"). Indessen hat Herr Cantor die Angabe Tannerys übersehen und aus diesem Grunde berichtet er in der 3. Auflage der *Vorlesungen* zweimal über ein und dieselbe Schrift, nämlich nicht nur S. 875—876, sondern auch S. 877. Man bekommt also Gelegenheit zu prüfen, inwieweit es zweckmäßig sein kann, eine neue Auflage dadurch herzustellen, daß man zu verschiedenen Zeiten in sein Handexemplar die Ergänzungen einträgt, die auf Grund neuen Materials nötig erscheinen, und das Handexemplar dann ohne weiteres als Druckmanuskript anwendet. Es ergibt sich dabei, daß der erste Bericht (S. 877) des Herrn Cantor nur etwa zwei Druckzeilen, der zweite (S. 875—876) dagegen etwa 30 Druckzeilen umfaßt. Freilich dürfte in diesem Fall zwischen den zwei Berichten ein Zeitraum von etwa 18 Jahren liegen, aber jedenfalls scheint der hier hervorgehobene Umstand die allgemeine Erfahrung (vgl. Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 398) zu bestätigen, daß ein und dieselbe Person zu verschiedenen Zeiten ein und dieselbe Schrift ganz verschieden berücksichtigt und daß es also nicht zu empfehlen ist, ein Druckmanuskript auf die oben angegebene Weise herzustellen.

G. Eneström.

1^3 : 877. Die alte Angabe, daß Franco von Lüttich seinen Traktat über die Quadratur des Kreises dem Erzbischof Hermann II. gewidmet hat, findet

Herr Cantor zweifelhaft, weil die Vatikanische Handschrift den Namen des Bischofs nicht nennt. Aber Paul Tannery hat in der von Herrn Cantor S. 876 zitierten Arbeit (*Correspondance d'écolâtres*, S. 489 Anm. 1) die Dedikationsschrift aus einer anderen Handschrift (Cod. lat. Paris. 7377 C) zum Abdruck gebracht, und aus dem was Tannery sagt („quant aux vers, qui sont adressés à l'archevêque de Cologne Hermann II"), scheint es, als ob die Richtigkeit der alten Angabe durch die Pariser Handschrift bestätigt wäre.

In betreff der Angabe: „Ferner hält Franco selbst $\frac{9}{10}$ des Durchmessers für die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates, rechnet also mit $\pi = (\frac{9}{5})^2 = 3{,}24$", könnte es eigentlich genügen zu bemerken, daß sie gestrichen werden muß, da sie sich auf den schon S. 875—876 erwähnten Brief an Regimbold von Köln bezieht. Da indessen Herr Cantor die Bemerkung von Paul Tannery in der BM 1_3, 1900, S. 269 unberücksichtigt gelassen hat, so scheint es mir angebracht, auf die Frage, ob hier wirklich $\frac{9}{10}$ des Durchmessers für die Seite des dem Kreise flächengleichen Quadrates gehalten wird, näher einzugehen. Ich bringe darum zuerst zum Abdruck die betreffende Stelle sowohl nach Winterberg als nach Tannery und Clerval:

Winterberg (1882).	Tannery und Clerval (1900).
Ac centro autem ad circularem usque lineam (IIII) in equa spatia ipsa recta linea secetur quibus .IIII. V. eiusdem quantitatis superaddatur punctumque ibi figatur in quo angulus terminabitur, et sic in ceteris tribus ut per puncta quadrati deducantur latera. hanc circuli quadrate que auctoritatem in sesquiquarta proportione retineat qui in priori contemplari teduerit.	A centro autem ad circularem usque lineam quatuor in aequa spatia ipsa recta linea secetur, quibus IIII, quinta eiusdem quantitatis superaddatur, punctumque ibi figatur, in quo angulus terminabitur, et sic in tribus caeteris ut per puncta quadrati deducantur latera. Hanc circuli quadraturam quae auctoritatem in sesquiquarta proportione retineat, qui in priore contemplari teduerit.

Wie man sofort sieht, sind die zwei Texte fast wörtlich übereinstimmend, und obgleich die erklärende Figur in den Handschriften fehlt, dürfte es kaum zweifelhaft sein, wie die Stelle zu verstehen ist. Man zieht in einem Kreis zwei gegeneinander senkrechte Durchmesser, verlängert dieselben in jeder Richtung um $\frac{1}{4}$ des Radius und vereinigt die vier auf diese Weise erhaltenen Punkte, wodurch ein Quadrat entsteht, das dem Kreise flächengleich ist. Da nach der Konstruktion die Diagonale des Quadrates $\frac{5}{4}$ des Durchmessers ist, so wird offenbar die Seite des Quadrates $\frac{5}{2\sqrt{2}}R$, wenn R der Radius ist, folglich $\pi = \left(\frac{5}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{25}{8}$, wie Paul Tannery in der BM 1_3, 1900, S. 269 angegeben hat.

Warum Herr Cantor Tannerys Bemerkung unberücksichtigt ließ, weiß ich nicht; jedenfalls ist er dadurch in die unangenehme Lage gekommen, sich selbst zu widersprechen, denn S. 876 bemerkt er (Z. 9—10) in betreff derselben Vorschrift: „Augenscheinlich entspricht diese Vorschrift dem Werte $\pi = 3\frac{1}{8}$".

G. Eneström.

1^3 : 878. Siehe unten die Bemerkung zu 1^3 : 900.

1³ : 882. Herr CANTOR gibt hier ein Beispiel der sogenannten „divisio cum differentia“ d. h. des komplementären Divisionsverfahrens, und es wäre nicht ohne Interesse auszufinden, aus welchem Grunde dies Verfahren von der Abacisten angewendet wurde. Es liegt nahe anzunehmen, daß es benutzt wurde, um bei dem Probieren zu große Werte der einzelnen Ziffern des Quotienten zu vermeiden (vgl. M. CHASLES, *Explication des traités de l'Abacus et particulièrement du traité de* GERBERT; Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **16**, 1843, S. 17 des Sonderabzuges), aber für diesen Zweck braucht man das Verfahren gar nicht, denn man kann die gewöhnliche Methode anwenden, wenn man nur vor dem Probieren die erste Ziffer des Divisors um eine Einheit erhöht. Meiner Ansicht nach bezweckte man durch die „Divisio cum differentia“ so viel als möglich Subtraktionen zu vermeiden, und eine Stütze meiner Ansicht finde ich darin, daß zuweilen bei der „divisio sine differentia“ ein umständliches Verfahren angewendet wurde, die kaum einen anderen Zweck haben konnte, als wenn irgend möglich die Subtraktionen auf die leichte Form $10 - a$ $(a < 10)$ zu beschränken. Ein instruktives Beispiel des angedeuteten Verfahrens findet sich in einer kürzlich von Herrn H. OMONT (siehe die Bemerkung zu **1**³ : 868) aufgefundenen Handschrift. Das Beispiel ist 6500 : 354, und in moderner Bezeichnung sieht das Verfahren auf folgende Weise aus [$E(k)$ bedeutet wie gewöhnlich die größte in k enthaltene *ganze* Zahl]:

$$10\,E\left(\tfrac{600}{354}\right) = 10;\ 6000 - 10 \cdot 354 = 6000 - 3540 = 2460.$$
$$E\left(\tfrac{2000}{354}\right) = 5;\ 2000 - 5 \cdot 354 = 2000 - 1770 = 230.$$
$$500 + 460 + 230 = 1190.$$
$$E\left(\tfrac{1000}{354}\right) = 2;\ 1000 - 2 \cdot 354 = 1000 - 708 = 292.$$
$$190 + 292 = 482.$$
$$E\left(\tfrac{482}{354}\right) = 1;\ 482 - 354 = 128.$$

Der Quotient ist also $10 + 5 + 2 + 1 = 18$ und der Rest 128.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß man weit später den Grundgedanken dieses Verfahrens (d. h. die Beschränkung auf Subtraktionen von der Form $10 - a$) in gewissen Gebieten angewendet hat (z. B. bei das sogenannte Borgen) oder noch anwendet (z. B. bei der Subtraktion zweier Logarithmen). Bekanntlich wird das Verfahren gewöhnlich „dekadische Ergänzung“ genannt, und LAGRANGE hat es sogar als allgemeines Subtraktionsverfahren empfohlen (siehe *Oeuvres* **7**, Paris 1877, S. 182). G. ENESTRÖM.

1³ : 889. Die kategorische Form der Angabe: „HERIGER von Lobbes, ... von dessen hierher gehörenden Schrift bereits (S. 869) die Rede war“ stimmt nicht ganz gut überein mit dem, was S. 869 gesagt wurde, und noch weniger mit der Angabe S. 867. An dieser Seite wird die *Regula de abaco computi* als *eine* Schrift bezeichnet, und man kann nicht umhin, die Ansicht zu bekommen, daß Herr CANTOR die ganze Schrift dem GERBERT zuschreibt (vgl. oben die Bemerkung zu **1**³ : 867). S. 869 erwähnt Herr CANTOR nachträglich die *Auffassung*, welche HERIGER von Lobbes für den Verfasser des ersten Hauptteiles der *Regula de abaco computi* hält, verzichtet aber darauf, eine Entscheidung in betreff dieser Frage zu treffen.

Die Gründe, aus denen BUBNOV den größten Teil der ersten Hauptabteilung der *Regula de abaco computi* dem HERIGER von Lobbes überweist, scheinen die folgenden zu sein: 1) Nach einem Verfasser des 13. Jahrhundert hat HERIGER

„Regule numerorum super abbacum Gerberti“ verfaßt; 2) In einer Handschrift (Cod. lat. Monac. 14689) findet sich oberhalb einer Schrift über den Abacus die Überschrift „Incipiunt item aliae regulae Herigeri super abacum“; 3) In einer anderen Handschrift (Cod. Leid. Scal. 38) findet sich ein Traktat: „Ratio numerorum abaci secundum Herigerum“, deren Inhalt aus der ersten Hauptabteilung der *Regula de abaco computi* entnommen zu sein scheint. Daß die Auffassung des Herrn Bubnov richtig sein kann, ist gewiß nicht von der Hand zu weisen; auf der anderen Seite kann bemerkt werden: 1) daß der Cod. lat. Monac. 14689 dem 12. Jahrhundert entstammt, also wenigstens 100 Jahre nach der Abfassung von Herigers Arbeit geschrieben ist; 2) daß diese Handschrift nur einen Teil des Traktates umfaßt, den Herr Bubnov Heriger zuschreibt; 3) daß, soweit bekannt ist, alle übrigen Handschriften dieses Traktates anonym sind; 4) daß in betreff des Traktates „Ratio numerorum abaci secundum Herigerum“ nur zwei Handschriften diese Überschrift tragen (die eine ist von Herrn Bubnov erwähnt, die andere von Herrn H. Omont kürzlich aufgefunden), und daß dieser Traktat ebensowohl ein Auszug aus einer anderen noch nicht untersuchten Schrift sein kann. G. Eneström.

1^3: 893. In betreff des Ursprunges der Wörter Igin, Andras, usw. kann bemerkt werden, daß sich die von Herrn Cantor abgedruckten zehn Verse in einer kürzlich von der Nationalbibliothek in Paris erworbenen und von Herrn H. Omont in den Notices et extraits des manuscrits de la bibliothèque nationale **39** (1907) beschriebenen Handschrift (Nouvelles acquisitions, ms. latin 886) finden, aber mit der Überschrift „Versus de nominibus caracterum *arabicorum* ad abacum pertinentium“. Da die Handschrift nach Herrn H. Omont zwar nicht früher als am Ende des 11. Jahrhunderts aber nicht später als am Ende des 12. Jahrhunderts anzusetzen ist, so verdient die Angabe derselben sicherlich neben der Behauptung des Rudolf von Laon berücksichtigt zu werden. G. Eneström.

1^3: 900. Vielleicht ist Z. 16 „XII. S.“ nur ein Schreibfehler statt „XI. S.“, denn meines Wissens ist es bisher nicht angezweifelt worden, daß die bekannte Erlanger Handschrift 288 schon aus dem 11. Jahrhundert herrührt (vgl. z. B. *Gerberti Opera mathematica ed. N. Bubnov*, Berlin 1899, S. 188; P. Tannery, BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 42); dieselbe Angabe hat Herr Cantor selbst S. 577 Anm. 5 (vgl. auch S. 581 Z. 10 und S. 587 Z. 27). Wenn also Oddo nach der Entstehung der *Geometria Boëtii* seine Regeln verfaßt haben muß, so können diese Regeln dennoch sehr wohl dem 11. Jahrhundert entstammen.

Auf der anderen Seite gibt freilich Herr Cantor S. 878 an, daß die Erlanger Handschrift dem 12. Jahrhundert angehört, so daß es scheint, als ob zweimal der Schreibfehler „XII. S.“ statt „XI. S.“ vorkommen würde. Dadurch wird natürlich der Fehler noch gefährlicher für den nicht sachkundigen Leser. G. Eneström.

1^3: 902. Unter den Schriften über den Abakus könnten auch die zwei von Narducci 1882 (Bullett. di bibliogr. de sc. matem. **15**, 135—162) veröffentlichten genannt werden; die zwei von Narducci benutzten Handschriften

entstammen nach ihm der 2. Hälfte des 12. Jahrhunderts. Die erste Schrift enthält eine Stelle, die meines Erachtens von besonderem Interesse ist. Nachdem (S. 139) der Gebrauch der gewöhnlichen Multiplikationstafel gelehrt worden ist, bemerkt der Verfasser:

> Verumtamen, qualiter et hoc idem absque huius presentis figure inspectione, quod decentius est, possit inueniri, breuiter dicam. Tota itaque summa eius in .I. II. III. IIII. et .V. pendet. Illi etenim numeri caute multiplicati ad maiorem numerum iuueniendum facillimum prebent intellectum.

Nach diesen Worten erwartet man natürlich die Regel der komplementären Multiplikation, aber auffälligerweise fährt der Verfasser fort:

> In numerorum igitur multiplicacione quot insunt quinarii primum uide, et quot quinarios numerus ille quinariis superfluens remultiplicatus conpingat, deinde adscende, et sic tunc illius quesiti numeri summam collige. Exempli causa: Octies .VII. quot sunt? LVI. Quomodo scis? Ita. In octies .VII. VIII. sunt quinarii, et supersunt ex cunctis septenariis octies duo binarii. Octo igitur quinarii et octies duo binarii coniuncti ad hoc quod quesitum est facile reddunt intellectum.

Der Verfasser lehrt also gar nicht die komplementäre Multiplikation, sondern sein Verfahren entspricht der Formel

$$ab = a \cdot 5 + a(b - 5),$$

während bei ihm wie bei allen übrigen Abacisten die komplementäre Multiplikation fehlt. Hat er diese in einer Algorismus-Schrift gefunden, aber den Sinn der Regel mißverstanden? Oder hat er sein Verfahren richtig aus einer älteren Schrift über den Abakus entnommen? G. Eneström.

1^3 : 906. Vgl. die Bemerkung zu **1^2 : 852** (BM **1_3**, 1900, S. 269).

1^3 : 908. Siehe die Bemerkungen zu **1^2 : 854** (BM **1_3**, 1900, S. 501; **6_3**, 1905, S. 104.

1^3 : 909. Siehe den Schluß der Bemerkung zu **1^2 : 671** (BM **1_3**, 1900, S. 499).

1^3 : 910. Siehe die Bemerkungen zu **1^2 : 855** (BM **1_3**, 1900, S. 501; **7_3**, 1906/7, S. 84).

1^3 : 911. Siehe die Bemerkung zu **1^2 : 856** (BM **6_3**, 1905, S. 309).

1^3 : 911. Der letzte Absatz ist so reizend geschrieben, daß man wirklich wünscht, alle Ausführungen desselben wären durchaus unanfechtbar gewesen. Aber leider ist dies nicht der Fall in betreff des für die Darstellung sehr wichtigen Passus: „Zum ersten Male war ihnen [d. h. den mit dem Jahre 1200 auftretenden mathematischen Geistern, in erster Linie Leonardo Pisano und Jordanus Nemorarius] wieder genügender Stoff gegeben, mit welchem ihre Erfindungsgabe sich beschäftigen, von welchem aus sie wesentliche Fortschritte machen konnten". Diesen Passus motiviert Herr Cantor dadurch, daß *das christliche Abendland* erst mit dem Jahre 1200 im Besitze gewisser Quellen

und Kenntnisse mathematischer oder literarischer Art war. Aber bekanntlich hat uns gerade Leonardo Pisano selbst mitgeteilt, daß er seine mathematischen Kenntnisse zum großen Teil *auf Reisen nach Ägypten, Syrien und Griechenland* [was wohl eigentlich Konstantinopel bedeutet] erworben hatte, und wesentlich dasselbe hätte ein anderer auf dieselbe Weise schon 100 Jahre vor Leonardo Pisano oder noch früher lernen können. Das Jahr 1200 hat also für die Geschichte der europäischen Mathematik *nicht* die von Herrn Cantor hervorgehobene Bedeutung. G. Eneström.

2:5, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286.

---

2 : 5. In meinem Aufsatze *Über zwei angebliche mathematische Schulen im christlichen Mittelalter* (Biblioth. Mathem. 7$_3$, 1906/7, S. 252—262) habe ich erwähnt (S. 256 Anm. 1), daß ich die Angabe, Leonardo Pisano sei Kaufmann gewesen, nicht in Cossalis Arbeit *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* hatte auffinden können. Nach erneuter Durchsicht der Arbeit habe ich jetzt zwei Stellen entdeckt, woraus man schließen kann, daß Leonardo nach der Ansicht Cossalis Kaufmann war, und diese Stellen finden sich am Ende des Kapitels V : 2 („Del libretto De numeris quadratis di Leonardo Pisano"), wo man eigentlich keinen Grund hat Aufschlüsse über Leonardos Beruf zu suchen. S. 167 spricht Cossali von Leonardos „navigazioni per oggetti di traffico alla Sicilia, alla Grecia, alla Siria", und S. 169 bemerkt er: „tragittò Leonardo per affari di traffico alla Grecia". Offenbar sind diese Angaben unmittelbar oder mittelbar aus der Einleitung zum *Liber abaci* entnommen.

Auf Grund der Cossalischen Angaben bemerkte Montuela dann in den Zusätzen (S. 715) zur zweiten Auflage des zweiten Bandes der *Histoire des mathématiques* (Paris au VII): „Négociant dans les échelles d'Afrique et du Levant, ... il [Leonardo Pisano] eut la noble ambition de s'instruire dans les sciences qui fleurissoient chez les Arabes", und trug dadurch bei, die Legende, daß Leonardo Kaufmann war, außerhalb Italiens zu verbreiten. G. Eneström.

2:7, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2:8**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2:10**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2:14—15**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209. — **2:20**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **3**$_3$, 1902, S. 239. — **2:25**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274. — **2:30**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2:31**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351—352; **3**$_3$, 1902, S. 239—240; **6**$_3$, 1905, S. 309—310. — **2:32**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S 105. — **2:34**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **6**$_3$, 1905, S. 310. — **2:37**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2:38**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:39**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 209. — **2:41**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352.

---

2 : 41. Herr Cantor macht darauf aufmerksam, daß Kaiser Friedrich II. nicht vor 1226 in Pisa war, während als Entstehungsjahr des *Liber quadratorum* des Leonardo Pisano 1225 angegeben wird, obgleich in dieser Schrift berichtet wurde, Leonardo sei dem Kaiser in Pisa vorgestellt worden. Diesen Widerspruch hat ein junger Verfasser vor einigen Jahren dadurch erklärt, daß die Pisaner eine besondere Zeitrechnung hatten und er gibt bestimmt an, daß das

pisanische Jahr 1225 teilweise mit dem gewöhnlichen Jahr 1226 zusammenfiel (siehe M. LAZZARINI, Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1904, S. 3). Leider scheint diese Erklärung unrichtig zu sein, denn nach den mir zugänglichen Schriften, wo über pisanische Zeitrechnung berichtet wird, begann das pisanische Jahr 1225 im März 1224 nnd endete im März 1225. Der fragliche Widerspruch dürfte also fortwährend unerklärt sein. G. ENESTRÖM.

2:46. Die Titel „flos, flores" u. ä. im Sinne „Auswahl, Sammlung" waren in jener Zeit, besonders in Italien, häufig. Die Erklärung LEONARDOS bedeutet also nur eine höfisch-poetische Wendung. A. STURM.

2:51, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 106. — **2:53**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2:57**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:59**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2:59—60**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2:61**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287. — **2:63**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2:67**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2:70**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2:88**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S. 395. — **2:89, 90**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2:91—92**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396. — **2:97**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:98—99**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107; **7**$_3$, 1906/7, S. 210. — **2:100**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140.

2:100. Die LIBRIsche Angabe, daß GUGLIELMO DE LUNIS einen algebraischen Traktat ins italienische übersetzte, kann sehr wohl auf einer unrichtigen Deutung des Ausdruckes „traslato darabico a nostra lingua" bei R. CANACCI beruhen. Bekanntlich wurde in Italien die italienische Sprache erst in der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts als Schriftsprache benutzt, und es ist durchaus unbekannt, wann GUGLIELMO DE LUNIS lebte; selbstverständlich muß er vor CANACCI aber frühestens im 12. Jahrhundert gelebt haben. Nun nehmen COSSALI und LIBRI ohne weiteres an, daß bei CANACCI „nostra lingua" die italienische Sprache bedeutet und folgern daraus unmittelbar, daß GUGLIELMO DE LUNIS nicht vor der 2. Hälfte des 13. Jahrhunderts gelebt haben kann, aber meiner Ansicht nach ist die Annahme willkürlich, und wenn GUGLIELMO DE LUNIS z. B. in das 12. Jahrhundert zu versetzen ist, so bedeutet „nostra lingua" eher die lateinische Sprache. Daß bei GHALIGAI nach den Worten: „Segue el Testo di GUGLIELMO" ein Passus in italienischer Sprache „Rendiamo gratie allo altissimo etc." vorkommt, beweist gar nicht, daß GHALIGAI diesen Passus wörtlich abgeschrieben hat, sondern derselbe kann sehr wohl eine Übersetzung sein.
G. ENESTRÖM.

2:101, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325; **6**$_3$, 1905, S. 396. — **2:104—105**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398. — **2:106**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 380. — **2:111**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:116**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:117—118**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107, 311. — **2:122**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504; **6**$_3$, 1905, S. 397. — **2:126**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406; **6**$_3$, 1905, S. 210. — **2:127**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:128**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2:129**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287. — **2:132**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2:144**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 381. — **2:145**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287. — **2:148**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2:150—151**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288. — **2:155—156**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 410—411; **7**$_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2:157, 158**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:160—162**, siehe

BM **6**$_3$, 1905, S. 311—312; **7**$_3$, 1906/7, S. 87—88. — **2 : 163,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504; **6**$_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 382. — **2 : 166,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 206,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313. — **2 : 210,** siehe BM **2**$_3$, 191, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 397—398. — **2 : 229, 242,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505. — **2 : 243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **6**$_3$, 1905, S. 398; **7**$_3$, 1906/7, S. 382. — **2 : 245, 246, 247,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 383—384.

---

2 : 250, Z. 20 v. o. lies „im XIV. Jahrh." statt „XV."

---

2 : 253, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2 : 273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2 : 305,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88. — **2 : 313,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 314,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 320,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88—89. — **2 : 322,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 325,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507.

---

2 : 339. Über Zambertis persönliche Verhältnisse ist den Widmungen seiner Übersetzungen zu entnehmen, daß er einen Bruder Joannes hatte, der ein Freund optischer Studien war. A. Sturm.

---

2 : 339. Das wenige, das man von Bartolomeo Zambertis Persönlichkeit weiß, ist von B. Boncompagni im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**. 1874, S. 159—161 zusammengestellt worden. Man ersieht daraus, daß Zamberti Sekretär des Venetianischen Senates war. G. Eneström.

---

2 : 351, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358, 360,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314. — **2 : 379,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207; **7**$_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 289.

---

2 : 392. Tannstetters Geburtsort ist auf den Karten nicht als „Rhein", sondern „Rain" angegeben. Letztere Schreibart entspricht auch der Auffassung Tannstetters und der Tatsache, daß Rain einst Grenzstadt war. Es befindet sich dort noch eine alte Säule: hie das pairland 1439. A. Sturm.

---

2 : 395, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508.

---

2 : 396. Tannstetter sagt über Tschertte: „In Mathematik geschickt, besonders in Gründen der Malerei und Baukunst". Das erklärt sich einfach daraus, daß Tschertte Baumeister war. A. Sturm.

2:397, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 211. — **2:399,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108. — **2:401, 405,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:410,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 290. — **2:411, 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89.

2:420. Da auch die älteren Auflagen des KÖBELschen Rechenbuches die römischen Ziffern als „Teutsche zal, gemain Teutsch zal" im Gegensatz zur „Zyfferzale" bezeichnen, so kommen die angeführten Rechenbücher von 1525 und 1530 für die ältere Übung dieser Benennung nicht in Betracht. Es sei noch bemerkt, daß KÖBEL allerdings für die 10 Zahlzeichen wiederholt den Namen „Zyffern" gebraucht, aber ausdrücklich hervorhebt, daß sie „der gemain man" so nennt. Er selbst unterscheidet genau: Zum ersten soltu wissen, das newn bedeutlich figuren sein vnd ain Zyffer 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 das ist die zyffer.

A. STURM.

2:425, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:427,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315. — **2:429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202. — **2:430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2:442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2:454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2:474,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2:479—480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385.

2:481. Über GHALIGAI verfaßte BONCOMPAGNI etwa 1860 eine große Abhandung *Intorno alla vita di FRANCESCO GHALIGAI, matematico fiorentino del secolo XVI. Dissertazione di B. BONCOMPAGNI*, die er 1862 zum Absatz bringen ließ, aber aus Gründen, die mir unbekannt sind, wurde die Abhandlung nie gedruckt und herausgegeben. Eine Korrektur des ganzen Satzes (226 Druckseiten in großem Quartformat mit besonderem Titelblatt) bekam P. RICCARDI und diese Korrektur ist jetzt in meinem Besitze. Eine andere Korrektur hatte BONCOMPAGNI selbst aufbewahrt, und diese wurde 1898 zusammen mit seinen anderen Büchern versteigert. Aus dieser Abhandlung, deren Inhalt freilich nur sehr wenig mit GHALIGAI zu tun hat, geht hervor, daß GHALIGAI schon 1505 als Lehrer der Arithmetik in Florenz wirkte und daß er daselbst am 10. Februar 1536 starb; vermutlich war er etwa 1480 geboren. Von seiner Arbeit gibt es eigentlich nur zwei Auflagen, denn in der dritten Ausgabe von 1552 sind nur Titelblatt und Blatt 114 neu gedruckt (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 1874, S. 486). Die von Herrn CANTOR erwähnten Bezeichnungen der Potenzen der Unbekannten rühren nicht von GHALIGAI selbst, sondern von seinem Lehrer GIOVANNI DEL SODO her, und GHALIGAI führt (Bl. 70^b) noch zwei solche Bezeichnungen mit entsprechenden Namen auf, nämlich  (pronico) $= x^7$ und  (tromico) $= x^{11}$.

G. ENESTRÖM.

2:481, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508. — **2:482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2:483,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 291. — **2:484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2:497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2:503, 505,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2:509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:524,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 90. — **2:527,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2:529,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91. — **2:530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:531,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212. — **2:532,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 292.

---

2 : 532. Aus dem *Opus novum de proportionibus* (1570) von Cardano dürfte auch der 141. Satz (S. 136—137) verdienen, erwähnt zu werden. Die Überschrift lautet: „Numeros fractos ad minores in eadem proportione valde propinqua deducere", und Cardanos Lösung dieses Problems ist wesentlich die folgende. Er nimmt einen Bruch $\frac{a}{b}$, wo $a > b$, sucht zuerst durch Probieren einen sehr einfachen Bruch $\frac{m_1}{m_2}$ (m_2 einziffrig) auf, der dem gegebenen Bruche $\frac{a}{b}$ näherungsweise gleich aber zu klein ist, und bildet dann den Ausdruck

$$\frac{m_1 - \frac{a m_2 - b m_1}{a - b}}{m_2 - \frac{a m_2 - b m_1}{a - b}}.$$

Wie man leicht finden kann, ist dieser Ausdruck genau $= \frac{a}{b}$, und wenn man statt $\frac{a m_2 - b m_1}{a - b}$ einen Näherungswert von der Form $\frac{1}{k}$ einsetzt, so ist der Ausdruck

$$\frac{m_1 - \frac{1}{k}}{m_2 - \frac{1}{k}} = \frac{m_1 k - 1}{m_2 k - 1}$$

ein genauer Wert von $\frac{a}{b}$. Selbstverständlich könnte man das Verfahren fortsetzen, um noch genauere Werte zu bekommen, aber hierüber sagt Cardano nichts, und er hat also keinen Anlaß gehabt zu untersuchen, unter welchen Bedingungen diese Werte wirklich genauer werden. Er behandelt nicht einmal den Fall $a < b$, der offenbar auf ähnliche Weise gelöst werden kann; man braucht nämlich nur den Bruch $\frac{m_1}{m_2}$ ein wenig zu groß wählen und bekommt dann einen Näherungswert von der Form $\frac{m_1 k + 1}{m_2 k + 1}$. G. Eneström.

---

2 : 535, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 536,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 539,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 293. — **2 : 541,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509.

---

2 : 547. Der von Herrn Cantor erwähnte Passus, wo Ramus seine Hoffnung, für die Geschichte der neueren Mathematik einen anderen Bearbeiter zu finden, ausspricht, verdient hier vollständig mitgeteilt zu werden, weil er zeigt, wie wenig man zuweilen die Verdienste seiner Zeitgenossen richtig zu würdigen versteht. Der Passus lautet: „Spero autem aliquem nostro exemplo excitatum recentiores mathematicos descripturum esse, ab eoque præcipue Franciscum Flussatem Candallam, genere quidem illustrem principem, sed mathematica gloria universae Galliae longe principem celebratum iri". Bekanntlich ist die mathematische Geschichtsschreibung der Ansicht des Ramus nicht beigetreten, denn in der Geschichte der Mathematik nimmt Fr. de Foix Candale einen sehr bescheidenen Platz ein, und zwar wesentlich als Herausgeber einer lateinischen Edition der *Elementa*, während die Verdienste vieler anderer Zeitgenossen des Ramus ausführlich behandelt werden. G. Eneström.

2: **548**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**: **549**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2**: **550**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2**: **554**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**: **555**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2**: **561**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2**: **565**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285.

---

2 : 566, Anm. 2) lies „circini“ statt „circuli“.

2: **567**, 568, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2**: **569**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2**: **572—573**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2**: **576**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2**: **579**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145.

---

2 : 580. Warum Z. 5 die Jahreszahl 1606 steht, verstehe ich nicht. Allerdings erwähnt Kästner an der von Herrn Cantor zitierten Seite 287 eine Ausgabe der *Geometrica practica* vom Jahre 1606, aber Kästner selbst hat die Originalausgabe (Rom 1604) benutzt, und der Kästnersche Bericht scheint die einzige Quelle des Herrn Cantor zu sein. Vielleicht ist Z. 5 die Jahreszahl 1606 nur ein Druck- oder Schreibfehler statt 1604.

In betreff der *Geometria practica* des Clavius möchte ich auf eine Stelle des 4. Buches (S. 178 der Auflage von 1606) hinweisen, die von besonderem Interesse ist, weil Clavius dort ein Verfahren lehrt, um ein Verhältnis in kleineren Zahlen auszudrücken, aus welchem Verfahren die Kettenbruchmethode leicht entwickelt werden kann. Wenn das gegebene Verhältnis $\frac{a}{b}$ $(a < b)$ ist, so setzt Clavius den Bruch unter die Form $\frac{1}{\frac{b}{a}}$, berechnet ferner durch Division die Zahl p_1 die der Gleichung $b = ap_1 + q_1$ $(q_1 < a)$ genügt, und gibt endlich als Näherungswert von $\frac{a}{b}$ den Bruch $\frac{1+1}{p_1 + p_1 + 1} = \frac{1}{p_1 + \frac{1}{2}}$ an. Er nimmt also $\frac{1}{2}$ als Näherungswert des Bruches $\frac{q_1}{a}$ an, aber offenbar liegt es sehr nahe, das Verfahren von Clavius anzuwenden, um einen besseren Näherungswert von $\frac{q_1}{a}$ zu berechnen, und dann gelangt man sofort zur Kettenbruchmethode. Freilich hat Clavius selbst diesen Schritt nicht gemacht, sondern um bessere Näherungswerte zu erzielen, nimmt er

$$\frac{2+1}{2p_1 + 1 + p_1} \text{ oder } \frac{2+1}{2p_1 + 1 + p_1 + 1},$$ je nachdem $\frac{1}{p_1 + \frac{1}{2}}$ zu klein oder zu groß ist.

Beiläufig bemerke ich daß das Kap. 9 der *Epitome arithmeticae practicae* (1583) des Clavius die Überschrift: „Reductio fractorum numerorum ad minimos numeros, sive terminos“ hat, aber hier handelt es sich nicht um Näherungsmethoden.

G. Eneström.

2: **580—581**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207.

---

2 : 581. In betreff des Simon Jacob bemerkt Herr Cantor: „Er verfaßte ein Rechenbuch nebst Geometrie als zweite Bearbeitung eines bloß der Rechenkunst gewidmeten Werkes und schrieb 1552 die Vorrede dazu. Der Druck begann 1557, wurde aber unterbrochen. Als der Verfasser dann 1564 starb,

besorgte sein Bruder Pancraz Jacob 1565 die neue Auflage, welche selbst wiederholt gedruckt wurde". Fragt man nun: wann erschien die erste Auflage der Arbeit, deren neue Auflage von Pancraz Jacob besorgt wurde? Oder ist diese erste Auflage überhaupt nicht erschienen?, so kann man aus den Angaben des Herrn Cantor keine bestimmten Antworten bekommen, und in der Tat ist die Auskunft, die Pancraz Jacob 1565 in seiner Vorrede gab, nicht ganz klar. Meines Erachtens sind die Angaben dieser Vorrede auf folgende Weise zu deuten: Simon Jacob verfaßte ein Rechenbuch nebst Geometrie und schrieb 1552 die Vorrede dazu. Dies Werk bestand aus drei Teilen, nämlich zwei arithmetischen und einem geometrischen. Der erste Teil (also Bl. 1—63 der Auflage von 1565) wurde in etwas umgearbeiteter Form („in Frag vnd Antwort gericht", „Frag vn̄ Antwort weiß") von Simon Jacob selbst 1557 veröffentlicht (vermutlich in einer sehr kleinen Auflage), aber das Übrige blieb damals ungedruckt. Nach seinem Tode fand der Bruder das ursprüngliche Manuskript („Arithmetic vnnd Geometri . . . fein rein abgeschrieben bey einander") wieder, und gab das vollständige Werk 1565 heraus. Von der ersten Auflage kenne ich kein Exemplar, und sie scheint allen Bibliographien unzugänglich gewesen zu sein. Von dem vollständigen Werke sind eigentlich nur zwei Auflagen erschienen, nämlich 1565 und 1600; von der zweiten Auflage gibt es Exemplare mit 1612 neu gedrucktem Titelblatt, und andere Exemplare scheinen das Druckjahr 1599 zu haben. Die von Murhard (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* I, Leipzig 1797, S. 172) zitierte Auflage von 1560, die auch die wälsche Praktik, also den zweiten Teil enthalten haben würde, existiert sicherlich nicht. G. Eneström.

---

2 : 582, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 593,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108.

---

2 : 605. Nach Fr. Ritter (*Fr. Viète*, 1895) hat Vieta allerdings das Problem, das ihm im Oktober 1594 vorgelegt wurde, sofort gelöst, aber das Responsum wurde erst um die Mitte 1595 veröffentlicht. A. Sturm.

---

2 : 610, siehe BM **7**$_3$, 1906/07, S. 388. — **2 : 611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 612—613,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306; **7**$_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906/7, S. 214, 389.

---

2 : 621. Das wenige, das wir über Bombellis Persönlichkeit kennen, ist zusammengestellt teils von Libri an der von Herrn Cantor zitierten Stelle, teils von S. Gherhardi (*Einige Materialien zur Geschichte der mathematischen Facultät der alten Universität Bologna, übers. von M. Curtze,* Berlin 1871, S. 89). Dagegen scheint es bisher unbeachtet zu sein, daß Bombelli nach seiner eigenen Aussage nicht nur eine Algebra sondern auch eine Geometrie verfaßt hatte, die 1572 fast fertig war und die Bombelli beabsichtigte recht bald zu veröffent-

lichen (siehe *L'algebra*, Bologna 1572, S. 648—649). Warum die Veröffentlichung unterblieb, kann wohl nie ermittelt werden; darf man daraus vielleicht schließen, daß Bombelli kurze Zeit nach 1572 gestorben ist?

Jedenfalls ist es zu bedauern, daß die Bombellische Geometrie verloren ging, denn darin fand sich wohl der Nachweis, daß der irreduzible Fall der kubischen Gleichung mit der Dreiteilung des Winkels in direkter Beziehung steht (siehe *L'algebra*, S. 321). In den zuverlässigsten mathematisch-historischen Arbeiten wird noch angegeben, daß Viète zuerst diese Beziehung erkannte (siehe z. B. A. v. Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* 1, Leipzig 1900, S. 171). G. Eneström.

2:622. Da Herr Cantor Z. 1—2 bemerkt: „Eine wichtige Stelle des ersten Buches [der Bombellischen Algebra] ist lange Zeit so gut wie unbeachtet geblieben", und dabei in der Fußnote 1) auf eine Abhandlung von G. Wertheim aus dem Jahre 1898 hinweist, so ist es angebracht, hier hervorzuheben, daß A. Favaro diese Stelle schon 1874 (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. 7, 495—498) zum Abdruck gebracht und erläutert hat. Wertheim behauptet freilich, daß Favaro die Stelle nicht nach Gebühr gewürdigt hat, aber diese Behauptung ist meines Erachtens unzutreffend; bei Bombelli findet sich nämlich keine Kettenbruch-*Entwickelung*, sondern nur eine Kettenbruch-*Methode*, d. h. ein Verfahren, das in Wirklichkeit mit der Kettenbruch-Entwickelung übereinstimmt, aber ohne daß Kettenbrüche benutzt werden. In der Tat hat sich Bombelli gerade des Verfahrens bedient, das Herr Cantor Z. 13—19 angibt, und wobei ja keine Kettenbrüche ersichtlich werden. Die Behauptung von Wertheim, daß Bombelli „tatsächlich Kettenbrüche gebildet hat", ist also zum mindesten irreleitend. G. Eneström.

2:623, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147.

2:624. Es wäre nicht ohne Interesse hier zu erwähnen, auf welche Weise Bombelli (S. 180—181 seiner *Algebra*) das Auffinden einer Wurzel der Gleichung $4p^3 - 3cp = a$ erleichterte. Bombelli ging von den Gleichungen

$$p^2 + q = c,\ p^3 - 3pq = a$$

aus, und da er voraussetzte, daß p und q beide positiv sind, konnte er sofort aus diesen Gleichungen folgern, daß

$$p < \sqrt{c},\ p > \sqrt[3]{a}.$$

Da er ferner nur rationale Werte von p in Betracht zog, und da p eine ganze Zahl sein muß, wenn c und a ganze Zahlen sind, so war es oft sehr leicht, den Wert von p zu finden, wenn ein solcher überhaupt existierte. In dem von Herrn Cantor S. 625 erwähnten Zahlenbeispiele war $a = 2$, $c = 5$ also

$$\sqrt[3]{2} < p < \sqrt{5}$$

so daß hier nur der Wert $p = 2$ in Betracht kommen konnte.

G. Eneström.

2:625. Nachdem Herr Cantor die Berechnung des reellen Wertes des Ausdruckes $\sqrt[3]{4 + \sqrt{-11}} + \sqrt[3]{4 - \sqrt{-11}}$ auf die Lösung der Gleichung

$(2p)^3 - 9(2p) = 8$ zurückgeführt hat, bemerkt er: „Kann man, was in diesem Beispiele nicht zutrifft, hieraus mit Leichtigkeit $2p$ ermitteln, so ist die Aufgabe gelöst". Es ist natürlich sehr schwierig zu entscheiden, was mit Leichtigkeit ermittelt werden kann, aber meines Erachtens ist es viel leichter sofort zu sehen, daß der Wert $2p = -1$ der fraglichen Gleichung genügt, als daß die von Herrn Cantor einige Zeilen weiter unten erwähnte Gleichung bei $2p = 4$ eine Identität wird. Auf Grund des Wertes $2p = -1$ bekommt man also

$$\sqrt[3]{4+\sqrt{-11}} + \sqrt[3]{4-\sqrt{-11}} = \frac{-1-\sqrt{-11}}{2} + \frac{-1+\sqrt{-11}}{2} = -1.$$

Indessen konnte Bombelli diese Wurzel nicht benutzen, denn nach seinem Verfahren (siehe die vorangehende Bemerkung) mußte p eine positive Zahl sein, die zwischen $\sqrt[3]{4}$ und $\sqrt{3}$ lag. Dagegen hätte er mit Leichtigkeit durch das von ihm S. 292—293 angegebene Verfahren aus der Gleichung $(2p)^3 - 9(2p) = 8$ die Gleichung $(2p)^2 - 2p + 1 = 9$ herleiten und dann sofort die positive Wurzel $2p = \frac{1+\sqrt{33}}{2}$ finden können. Da indessen diese Wurzel nicht rational ist, hat er sicherlich *aus diesem Grunde* darauf verzichtet, einen reellen Wert des Ausdrucks zu berechnen. G. Eneström.

2:626, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2:632**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2:634, 637**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2:638**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2:642**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2:643**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2:644**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2:655**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2:656**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2:659, 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2:661**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2:665**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271.

2:666. Die Angabe, daß die *Geometria practica nova et aucta* von Schwenter erstmalig 1618 im Drucke erschien, ist nicht ganz genau. Zuerst ist der Titel der ersten Auflage nicht „Geometria practica nova et aucta" sondern nur *Geometria practica nova.* Ferner scheint es unmöglich, genau zu bestimmen, ob die erste Auflage der zwei ersten Traktate wirklich 1618 erschien, weil diese zwei Traktate kein Druckjahr haben. Als Erscheinungsjahr des ersten Traktates gibt Doppelmayer (siehe die von Herrn Cantor zitierte Stelle der Kästnerschen *Geschichte der Mathematik*) 1616 an, aber sicherlich mit Unrecht, denn die Dedikationsschrift der ersten Auflage des *zweiten* Traktates ist vom 1. Januar 1617 datiert, und in der Vorrede dieses Traktates wird ausdrücklich erwähnt, daß der erste Traktat „hette billich sollen für diesem [d. h. vor dem zweiten] gedrucket werden, wañ es allerhand vngelegenheit nicht verhindert, vnnd solcher [d. h. der erste Traktat] hette biss in die künfftige Messe nicht müssen verschoben werden". Der erste Traktat erschien also nach dem 1. Januar 1617 und in Wirklichkeit ist die Dedikationsschrift vom 16. März 1618 datiert. Als Erscheinungsjahr des dritten Traktates gibt Doppelmayer unrichtig 1619 an; am Ende der letzten Seite steht nämlich: „Gedruckt zu Nürnberg ... anno M.DC.XVIII" und die Dedikationsschrift ist vom 15. September 1618 datiert. Endlich erschien der vierte Traktat 1627; auf der letzten Seite steht: „Gedruckt und Verlegt zu Nürnberg durch Simon Halbmayern, im Jahr M.DC.XXVII". Herr Cantor sagt freilich S. 669, daß die erste Auflage von 1618 den vierten Traktat nicht enthält, aber die

Traktate wurden als besondere Schriften herausgegeben, so daß man mit besserem Rechte sagen kann, die Ausgabe der ersten Auflage sei erst 1627 mit dem Erscheinen des vierten Traktates beendet. Übrigens trägt dieser Traktat noch in der Auflage von 1641 den Titel: *Geometricae practicae* [nicht „novae et auctae"] *tractatus IV.* G. ENESTRÖM.

2:667. Die Gründe, warum SCHWENTER in betreff der Konstruktion des Neunecks absichtlich von der DÜRERschen Vorschrift abwich, hat er selbst an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle angegeben, nämlich: 1) daß DÜRER die Konstruktion „mechanice" aber nicht „geometrice demonstrirt"; 2) daß DÜRER nicht lehrt, wie man in einen *gegebenen* Kreis ein Neueck einschreiben soll. Der zweite Grund ist freilich, wie Herr HUNRATH (BM 6_3, 1905, S. 250—251) hervorgehoben hat, durchaus belanglos; was der erste Grund eigentlich bedeuten soll, dürfte schwer zu ermitteln sein. Möglich ist es allerdings, daß SCHWENTER durch „geometrice demonstriren" eine exakte, durch „mechanice demonstriren" eine annähernde Konstruktion bezeichnen wollte, aber auf der andern Seite wäre es seltsam, wenn er nicht selbst verstanden hätte, daß eine Näherungskonstruktion nicht durch eine so unwesentliche Änderung wie die seine in eine exakte Konstruktion verwandelt werden kann.

G. ENESTRÖM.

2:669, siehe BM **5_3**, 1904, S. 203. — **2:670,** siehe BM **6_3**, 1905, S. 403; **7_3**, 1906/7, S. 391. — **2:674,** siehe BM **4_3**, 1903, S. 88. — **2:683,** siehe BM **2_3**, 1901, S. 148. — **2:687,** siehe BM **7_3**, 1906/7, S. 294. — **2:689,** siehe BM **7_3**, 1906/7, S. 391.

2:689. LIÉVIN HULSIUS est certainement mort avant la fin de 1606, conformément à l'indication de QUETELET rapportée par M. ENESTRÖM (BM 7_3, 1906/7, p. 391). JEAN REINHARD ZIGLER écrit, de Mayence, à KEPLER, à la date du 1er août 1606 (*Epistolae ad KEPPLERUM scriptae*, ed. HANSCHIUS, Leipzig 1718, p. 354):

> Quid postremis meis ad te litteris acciderit equidem ignoro, vereor simile quid passas, cum instrumento quodam geometrico, quod eodem tempore ad LEVINUM HULSIUM (quem è vivis tum abiisse ignorabam) destinaveram. Nam jam tandem hoc mense Julio sine ullis litteris ad me Praga instrumentum remittitur.

H. BOSMANS.

2:693, siehe BM **4_3**, 1903, S. 287; **7_3**, 1906/7, S. 394—395. — **2:700, 701, 703, 704, 705,** siehe BM **1_3**, 1900, S. 271—273.

2:714. Die Bemerkung: „Seine [d. h. SARASA's] *Solutio problematis a R. P. MARINO MERSENNO propositi* von 1649 war . . . weniger eine Erläuterung des *Opus geometricum* des GREGORIUS — eine solche stellte SARASA für später in Aussicht, ohne alsdann sein Versprechen einzulösen — als ein Gegenangriff gegen MERSENNE", ist zum Teil unrichtig. Vermutlich hat Herr CANTOR die Schrift von SARASA nicht selbst gesehen, sondern nur das KÄSTNERsche Referat benutzt, wo S. 258 steht: „SARASA macht Hoffnung zu mehr Erläuterungen, die er aus des Verfassers Munde bekommen hat". Indessen beruht die KÄSTNERsche

Angabe sicherlich auf einem Mißverständnisse der Worte Sarasa's (a. a. O S. 24 Z. 1—2): „Prodromus erit itaque tractatus hic, & quasi prælusio venturi Operis". Aber das „venturum opus" ist selbstverständlich die Arbeit des Grégorie de St. Vincent, die Sarasa im vorangehenden Absatze (S. 23, Z. 5—3 v. u.) mit den Worten „licet Auctor ipse materias illas fusius elegantiusque alio quod molitur, ut dixi, volumine susceperit explicandas, non videbatur tamen diutius expectandum" in Aussicht stellte. Vermutlich ist es diese Arbeit, die 1668 unter dem Titel *Opus geometricum posthumum ad mesolabium* erschien. Dagegen habe ich nicht im ganzen Traktate des Sarasa die geringste Andeutung auffinden können, daß er selbst eine Erläuterung des *Opus geometricum* in Aussicht gestellt hat. G. Eneström.

---

2 : 715, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717,** 718, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405.

---

2 : 726. Zons veröffentlichte auch ein Rechenbuch (Köln 1613): *Ein neues wohlgegründetes Kunst- und Rechenbuch auff der Ziffer, von nützlichen Kauffmanns Regulen in allen handtierungen, Gewerben, Kauffschlagen. Sampt vnderricht, wie man ein jeden Eych auss bewehrt grundt ein Visirstab verfertigen vnd bezeichnen soll.* A. Sturm.

---

2 : 727, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88.

---

2 : 765. Herr Cantor bemerkt, daß Schwenter und Cataldi unabhängig voneinander zur *Erfindung* der Kettenbrüche gelangt waren, aber Schwenter selbst gibt sich gar nicht als *Erfinder* an, sondern verweist nach der von Herrn Cantor (S. 763) wörtlich angeführten Stelle der dritten Auflage des ersten Traktates der *Geometria practica nova* auf Regeln, die „beyde (!) den Logisticis und Rechenmeistern" zu finden sind. Ganz derselbe Verweis findet sich schon in der ersten Auflage (S. 58—59) des zweiten Traktates der *Geometria practica nova* und da diese Auflage sehr selten ist, bringe ich hier den ganzen Passus über Kettenbrüche volllständig zum Abdruck.

Wie man aber zwo grosse zahlen, so numeri primi vnd Arithmetice nicht können auffgehebt werden, dem gebrauch nach kleiner machen soll, seynd bey dem (!) Logisticis vnd Rechenmeistern viel feine Regeln zu finden. Die beste, geheimeste vnd künstlichste will ich hieher setzen. Ich soll die zwo zahlen 233. vnd 177. als welche für sich numeri primi. Oder aber die proportion $\frac{177}{233}$ in kleinern zahlen Mechanice außsprechen. So mache ich nun folgende disposition oder Ordnung.

			1
233		1	0
177	1	0	1
56	3	1	1
9	6	3	4
2	4	19	25
1	2	29(!)	104
0	0	177	233

Wann nun ordentlich hierinnen verfahren, finde ich auß gemelter Tafel, dass ich für $\frac{177}{233}$ nemen kan $\frac{79}{104}$ oder $\frac{19}{25}$ oder aber endlich $\frac{3}{4}$ welchs dann ein (!) sehr nützliche Regel zu diesem vnserm messen.

Aus welchem Rechenbuche SCHWENTER die Regel entnahm, ist mir zurzeit unbekannt, aber ich mache darauf aufmerksam, daß die Regel leicht aus einem Satze der *Geometria practica* von CLAVIUS hergeleitet werden kann (siehe oben die Bemerkung zu 2 : 580).

G. ENESTRÖM.

---

2 : 766, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 775**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393. — **2 : 791**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 511. — **2 : 891**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298.

---

3 : 23. Als Ergänzung einer früheren Bemerkung (BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298) kann erwähnt werden, daß RENALDINI allerdings vor 1668 ein Buch veröffentlicht hatte, das nicht nur auf dem Titelblatte, sondern auch in Wirklichkeit etwas „de resolutione atque compositione mathematica" enthielt. Dies Buch hat den Titel: *Opus algebricum In quo praeter Communem, & antiquam Algebram Nova quoque pertractatur; atque firmissimis demonstrationibus ambae muniuntur. Ars analytica, Quam perobscurè FRANCISCUS VIETA literis mandavit, satis, superque declarata Traditur. Methodus verò, tàm Nova, quàm antiqua, Resolutionis, atque Compositionis Mathematicae explicatur* . . . . (Anconae . . . M.DC.XXXXIIII; die „Censura" ist freilich 1646 datiert). Aber dies Buch kann ebenso wenig wie die Arbeit vom Jahre 1655 als eine ältere Auflage der Schrift *De resolutione et compositione mathematica* bezeichnet werden; die Abteilung „Tractatus de methodo, tam nova, quam antiqua, resolutionis et compositionis mathematicae" umfaßt nämlich nur 46 Quartseiten, und enthält nur einige sehr einfache Konstruktionsaufgaben, jedenfalls *nichts* über angenäherte Kreisteilung.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 24, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394.

---

3 : 37. SCHEFFELTS 1697 in Ulm erschienenes Werk *Unterricht von dem Proportional-Circul* ist größtenteils entnommen aus NIKOLAUS GOLDMANN *De*

circino proportionis tractatus, der in lateinischer und deutscher Sprache 1679 in Leyden erschien. A. Sturm.

3:37. Hier könnte vielleicht erwähnt werden, daß Jakob Bernoulli 1687 das später sogenannte Malfattische Problem für gleichschenklige Dreiecke löste. Die Lösung ist das 2. Lemma der Abhandlung *Solutio tergemini problematis, arithmetici, geometrici et astronomici* (Basel 1687) und ist in Jacobi Bernoulli *Opera* I (Genevae 1744, S. 303—305) wieder abgedruckt. Das Problem lautet bei Jakob Bernoulli: „In triangulo isoscele[1] . . . inscribere tres circulos se mutuo et trianguli latera tangentes . . .“ G. Eneström.

3:39, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 407. — **3:40**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3:45—48, 49, 50**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3:57**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3:63**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3:68**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299. — **3:70**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360.

3:78. Fabris Synopsis ist aus dem Jahre 1669, wie es S. 162 richtig heißt. A. Sturm.

3:82, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3:97**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3:100**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3:102**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 300. — **3:112**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3:116**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3:117**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518.

3:118. Das Werk Bakers ist in lateinischer und englischer Sprache, die Texte gegenüberstehend, geschrieben. Daher hat es außer dem englischen auch den lateinischen Titel: *Clavis geometrica catholica sive janua aequationum reserata.* A. Sturm.

3:118. Was Herr Cantor mit der Behauptung, daß Tschirnhausens algebraische Untersuchungen einmal fast der Vergessenheit anheimgefallen waren, meint, ist mir nicht näher bekannt, aber jedenfalls ist die Behauptung meiner Ansicht nach kaum begründet. Bekanntlich hat Lagrange in seinen berühmten *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* ausführlich die Tschirnhaussche Methode auseinandergesetzt, und die Lagrangesche Arbeit wurde recht bald durch die Michelsensche Übersetzung (*Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen.* III, Berlin 1791, S. 271—530) allgemein zugänglich gemacht. Man könnte also höchstens sagen, daß die Tschirnhausschen Untersuchungen vor Lagrange fast der Vergessenheit anheimgefallen waren, aber auch diese Behauptung ist meines Erachtens unbegründet. Eigentlich hat ja Tschirnhaus nur einen mißlungenen Versuch gemacht, die allgemeine Gleichung n-ten Grades zu lösen, und es gab keinen eigentlichen Anlaß, diesen Versuch in den Lehrbüchern zu nennen. Nichtsdestoweniger findet man eine Erwähnung desselben in den folgenden Arbeiten, von denen die meisten sehr verbreitet waren:

---

1) Im Simonschen Berichte *Über die Entwicklung der Elementargeometrie im XIX. Jahrhundert* (Leipzig 1906, S. 149) wird angegeben „Jakob Bernoulli, Oeuvres complètes [!] (1747) [!] für den Fall des gleichseitigen [!] Dreiecks“.

J. Prestet, *Nouveaux elemens des mathematiques* II, Paris 1689, S. 411—414. Kritik des Tschirnhausschen Verfahrens.

M. Rolle, *Traité d'algebre*, Paris 1690, S. 222—226. Entgegnung der Prestetschen Kritik.

Ch. Reyneau, *Analyse demontrée* I, Paris 1708, S. 251—256. Darstellung des Verfahrens ohne Kritik, ohne Nennung von Tschirnhaus' Name.

Chr. Wolff, *Elementa matheseos universae* V, Halle 1741, S. 313—314. Kritik des Verfahrens.

A. G. Kästner, *Anfangsgründe der Analysis endlicher Größen*. Göttingen 1760, § 290 (Aufl. 2, Göttingen 1767, S. 147; Aufl. 3, Göttingen 1794, S. 179—180). Kästner erwähnt beiläufig die Tschirnhaussche Methode und macht gegen dieselbe eine, freilich unzutreffende und fast kindische Ausstellung. G. Eneström.

---

3 : 122, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399; **7**$_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM **3**$_3$; 1902, S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288.

---

3 : 129—130. Bei der Erwähnung von La Hires und Römers Untersuchungen über die Epicycloide wäre es vielleicht angebracht, auch des gleichzeitigen Abbé de Vaumesle zu gedenken (vgl. G. Loria, *Spezielle algebraische und transscendente Kurven*, Leipzig 1902, S. 498), von dem Chr. Huygens in einer Aufzeichnung bezeugt: „Primus autem, qui de Epicycloide ostenderit geometricas curvas esse et spatia earum mensurari posse, fuit Presbyter quidam Normannus, nomine de Vaumesle, cujus ea de re literas aliquot ad me datas adservo"; und ferner in einer anderen Annotation: „Mr. de Vaumesle, Religieux en Normandie, m'ayant mandé qu'il avoit trouvé la mesure de la ligne épicycloide, lorsque le cercle générateur et le cercle immobile sont égaux, cela m'a donné occasion de chercher cette démonstration générale" (siehe *Christiani Hugenii aliorumque saeculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicæ et philosophicæ. Ex manuscriptis ... ed. P. J. Uylenbroek*, Hagæ Comitum 1833, Fasc. 2, p. 40, 46).

Die im obigen Zitate erwähnte „démonstration générale" wurde von Huygens der Pariser Akademie in den Sitzungen vom 3. Dez. 1678 und 7. Jan. 1679 mitgeteilt und findet sich nach dem Konzepte abgedruckt bei Uylenbroek Fasc. 2, p. 42 ff.

Drei Briefe des Abbé de Vaumesle an Huygens aus den Jahren 1678 und 1679, welche diesen Gegenstand behandeln, sind a. a. O. p. 47—55 und dann *Oeuvres complètes de Chr. Huygens* 8, La Haye 1899, p. 115, 125, 189 abgedruckt.

Abgesehen von einer kurzen Erwähnung in der Vorrede zu La Hires *Oeuvres diverses* (Mém. de l'Ac. des Sciences 1666—1699, T. 9), scheint über den Abbé de Vaumesle weiter nichts bekannt zu sein (s. *Oeuvres complètes de Chr. Huygens* 8, p. 115, Anm. 1).

Stockholm. C. Grönblad.

---

3 : 131, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM **3**$_3$, 1902,

S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303.

---

3 : 232. Zu denen, die sich vor Huyghens mit der logarithmischen Kurve beschäftigten, gehört Pardies, der in seinen *Elementa geometriae* (1671) durch diese Kurve das Rechnen mit Logarithmen und ihre Auffindung erleichtern will.

A. Sturm.

---

3 : 244—245, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319.

---

3 : 397. Es wäre vielleicht nützlich, wenn auch nicht nötig, hier auf Waessenaers Verfahren (S. 798 des zweiten Bandes der *Vorlesungen*) hinzuweisen und zu bemerken, daß Newtons Methode offenbar eine Verallgemeinerung jenes Verfahrens ist. Der Grundgedanke ist in beiden Fällen durchaus derselbe, aber nach Waessenaers Verfahren kann man nur Faktoren von der Form $y + k$, ermitteln, wo k eine positive ganze Zahl ist. Freilich kann man äußest leicht das Verfahren so modifizieren, daß auch Faktoren von der Form $y - k$ ermittelt werden können, aber für Faktoren von der Form $ny \pm k$ paßt es nicht.

G. Eneström.

---

3 : 398, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306.

---

3 : 398. In betreff der früher (BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305) erwähnten Leibnizschen Methode zur Aufsuchung rationaler Faktoren eines Polynoms, sollte vielleicht ausdrücklich bemerkt werden, daß Leibniz nur solche Polynome in Betracht zog, deren Nullstellen sämtlich reell sind, denn er sagt: „aequatio transformatur, ut omnes ejus radices fiant falsae“, und „radix falsa“ bedeutet eine reelle negative Wurzel. Aber die Methode ist auch ohne weiteres anwendbar, wenn die Gleichung

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

Wurzeln von der Form $x = -a + bi$ (a positiv) hat. Dagegen gilt sie nicht ohne weiteres, wenn diese Gleichung Wurzeln von der Form $a + bi$ (a positiv) hat, denn dann gibt es wenigstens einen Faktor von der Form $\alpha_0 x^2 - \alpha_1 x + \alpha_2$ (α_1 positiv). In diesem Falle muß man eine obere Grenze A der reellen Teile der imaginären Wurzeln ermitteln, und $y + A$ statt x einsetzen. Für Polynome dritten Grades kann man indessen das Resultat leichter erzielen. Sei das gegebene Polynom

$$x^3 + x^2 + 4x + 30$$

so setzt man z. B. statt x die Zahl 40 ein, und erhält dadurch die Zahl $65\,790 = 2 . 3 . 3 . 5 . 17 . 43$. Jetzt versucht man mit den zwei Faktoren 43 und $2 . 3 . 3 . 5 . 17 = 1530$, von denen der erste dem mutmaßlichen Faktor $x + 3$ des Polynoms entspricht; da auf der anderen Seite $1530 = 38 . 40 + 10$, so würde nach der LEIBNIZschen Methode der andere Faktor des Polynoms $38x + 10$ sein, was unsinnig ist, da dieser Faktor zweiten Grades und zwar von der Form $x^2 \pm \alpha x + 10$ sein muß. Nun ist $1530 = (40)^2 - 2 . 40 + 10$, der entsprechende mutmaßliche Faktor des Polynoms ist $x^2 - 2x + 10$, und es ist leicht zu ermitteln, daß man wirklich die zwei reellen Faktoren des Polynoms $x^3 + x^2 + 4x + 30$ aufgefunden hat. G. ENESTRÖM.

---

3 : 408, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 306. — **3 : 447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152.

---

3 : 480. Die Bemerkung, daß der Briefwechsel zwischen NIKOLAUS II BERNOULLI und CHR. GOLDBACH erst 1843 in die Öffentlichkeit gelangte, ist, sofern sie sich auf die RICCATIsche Differentialgleichung bezieht, nur bis zu einem gewissen Grade richtig. CHR. GOLDBACH hat nämlich in der Einleitung zu seiner weiter unten S. 880 von Herrn CANTOR erwähnten Abhandlung *De casibus quibus integrari potest æquatio differentialis* $a x^m dx + b y x^p dx + c y^2 dx = dy$ kurz über diesen Briefwechsel berichtet. Da GOLDBACH weder hier noch in der Abhandlung seiner von Herrn CANTOR auseinandergesetzten Reihenentwickelungsmethode gedenkt, so scheint es, als ob er selbst, und zwar sicherlich mit gutem Rechte, auf dieselbe kein Gewicht gelegt hätte. Auch in der folgenden Abhandlung von NIKOLAUS II BERNOULLI wird die Methode nur für einen speziellen Fall benutzt. G. ENESTRÖM.

---

3 : 497, 498, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$. 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3 : 586, 609,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689, 695,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

---

3 : 880. Die hier erwähnte Abhandlung von NIKOLAUS II BERNOULLI wurde nach seinem Tode von DANIEL BERNOULLI redigiert. In einem Briefe von diesem an CHR. GOLDBACH vom 28. Mai 1728 findet sich nämlich folgender Passus: „j'aurai l'honneur de vous dire ici que j'ai fait des extraits des manuscrits

de feu mon frère et que j'en ai formé un mémoire qui sera imprimé immédiatement après le vôtre" (siehe Fuss, *Correspondance mathématique* II, St. Pétersbourg 1843, S. 260). Wenn die Randangabe der Petersburger Commentarii, daß die *Analysis aequationum quarundam differentialium* am 1. Juli 1726 gelesen wurde, richtig ist, so war die Abhandlung jedenfalls im Juli 1726 noch nicht druckfertig. Nun starb ja Nikolaus II Bernoulli schon am 26. Juli 1726, so daß er selbst kaum nach dem 1. Juli Entdeckungen auf dem betreffenden Gebiete gemacht haben kann, und es ist wohl nicht anzunehmen, daß Daniel Bernoulli etwas neues hinzugefügt hat, aber jedenfalls ist es nützlich, auf den fraglichen Umstand aufmerksam zu machen, weil er zeigt, mit welcher Vorsicht die Datierungen der Akademieschriften benutzt werden müssen. G. Eneström.

---

3 : 881, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

131. Über drei bisher fast unbekannte italienische Mathematiker aus dem 15. Jahrhundert. Seit einigen Jahren habe ich Nachforschungen angestellt, um ausfindig zu machen, ob der von Libri im dritten Bande (S. 302—349) seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* veröffentlichte algebraische Traktat, der meiner Ansicht nach aus dem Ende des 15. Jahrhunderts herrührt (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 106), irgend einem sonst bekannten Mathematiker zugewiesen werden könnte. Dabei stieß ich auf drei von Francesco Ghaligai in seiner *Pratica d'arithmetica* erwähnte florentinische Mathematiker, die wahrscheinlich alle drei in der zweiten Hälfte des 15. Jahrhunderts lebten, nämlich Benedetto da Firenze, Giovanni del Sodo und Agnolo del Carmine. Freilich habe ich bisher keinen bestimmten Grund anzunehmen, daß irgend einer von diesen der Verfasser des fraglichen Traktates ist, aber in jedem Falle wäre es von Interesse, etwas näheres über diese zu erfahren, und ich erwähne hier das wenige, das ich selbst gefunden habe.

Benedetto da Firenze wird von Libri zweimal (a. a. O. II, S. 206; III, S. 146), aber nur im Vorübergehen genannt; Ghaligai zitiert ihn öfter, einmal als „grand' huomo in Aritmetrica" (a. a. O., Bl. 46^a, 55^a, 65^a, 71^a, 75^b, 80^a, 80^b) und schreibt ihm u. a. gewisse Sätze über Zins- und Gesellschaftsrechnung sowie über Rechnung mit irrationalen Größen zu. Benedetto hat einen *Tractato dabbacho* verfaßt, von welchem Boncompagni fünf Handschriften kannte (Cod. Ottob. 3004; Cod. Magliab. A. IX, n. 76; Cod. Magliab. A. XI, n. 27; Cod. Magliab. Palch. 9, n° 63; Cod. Paris. Fonds français n. 8109; vgl. *Catalogo della biblioteca Boncompagni* I, Roma 1898, S. 108). Eine sechste Handschrift, die aus der Zeit 1460—1464 herrührt, wurde vor einigen Jahren in einem Antiquariatskataloge ausgeboten. Aus dem was Ghaligai sagt, kann man schließen, daß er Benedetto nicht persönlich gekannt hat, und daß dieser also vermutlich vor 1500 gestorben ist.

Giovanni del Sodo war Ghaligais Lehrers (siehe a. a. O., S. 2^b, 65^a, 71^b), und scheint eine Algebra verfaßt zu haben, wo für die Potenzen der Unbe-

kannten gewisse ungewöhnliche Bezeichnungen und zum Teil auch besondere Namen benutzt worden sind; jedenfalls gibt GHALIGAI selbst an, daß er den letzten Abschnitt seines Werkes seinem Lehrer entnommen hat. Vielleicht ist GIOVANNI DEL SODO mit dem GIOVANNI SODERINI identisch, von dem eine Geometrie in der Biblioteca Magliabecchiana in Florenz aufbewahrt ist (cf. *Catalogo della biblioteca* BONCOMPAGNI I, S. 138). Vermutlich war GIOVANNI DEL SODO etwa 1460 geboren.

AGNOLO DEL CARMINE scheint ein älterer Zeitgenosse des GHALIGAI gewesen zu sein, also vielleicht etwa 1470 geboren, und wird von diesem oft zitiert (siehe a. a. O., Bl. 21ª, 25ª, 26ª, 26ᵇ, 27ª), einmal als „maestro eccessiuo geometro", häufig als Fragesteller, z. B.: „fünf Zahlen a, b, c, d, e sind so beschaffen, daß $a:b = b:c = c:d = d:e$; wenn nun $b = 10$ und überdies $\frac{c+d}{a+b} = 7\sqrt{e}$, so wird gefragt, welche die Zahlen a, c, d, e sind". Über AGNOLO DEL CARMINE gibt es vielleicht Aufschlüsse in einer Handschrift von G. GARGANI: „Ruolo nominale di geometri, astrologi, cosmografi, abbachisti e matematici toscani", die BONCOMPAGNI besaß (siehe NARDUCCI, *Catalogo di manoscritti ora posseduti da D. B. Boncompagni*, seconda edizione, Roma 1892, S. 169). G. ENESTRÖM.

132. Über den französischen Mathematiker Pujos. Es ist bekannt, daß DESARGUES in seinem *Brouillon project d'une atteinte aux éuénements des rencontres d'un cone auec un plan* (1639) ein paarmal einen Mathematiker PUIOZ oder PUJOS erwähnt (siehe *Oeuvers de* DESARGUES *réunies et analysées par* POUDRA 1, Paris 1862, S. 193, 218). Über diesen Mathematiker, der Beweise zweier wichtiger Sätze von DESARGUES gegeben hat, finden sich meines Wissens in den mathematisch-historischen Arbeiten gar keine biographischen Aufschlüsse; nicht einmal die Rechtschreibung des Namens scheint festgestellt zu sein. Es wäre darum von Interesse, eine besondere Untersuchung über diesen Mathematiker vorzunehmen, und als Ausgangspunkt dabei könnten vielleicht die folgenden Notizen benutzt werden.

Im Jahre 1638 erschien in Paris eine Brochüre (20 Druckseiten 4⁰) mit dem Titel *Refvtation de la maniere de trouuer vn quarré egal au cercle, rapportée ès pages 130 & 131, du liure nouuellement imprimé sous le titre de propositions mathematiqves de Monsieur* DE LA LEU, *demonstrées par I.* PUJOS: *Et du pretendu triangle equilateral, mentionné au placard dudit sieur, du premier Ianuier 1632.* Aus dem Vorworte ersieht man, daß J. PUJOS im Jahre 1633 einen Brief über denselben Gegenstand veröffentlicht hatte, sowie daß er damals in La Rochelle wohnhaft war und sich nur kurze Zeit mit mathematischen Studien beschäftigt hatte; ferner wird darin erwähnt, daß er aus Gascogne herstammte. Aus dem oben angeführten Titel ersieht man weiter, daß J. PUJOS in Paris 1638 eine andere Schrift mit dem Titel *Propositions mathematiques de Monsieur* DE LA LEU *demonstrées* publizierte, und daß diese Schrift wenigstens 131 Druckseiten umfaßte. Weitere Aufschlüsse über JACQUES PUJOS finden sich in der *Correspondance de* DESCARTES (éd. CH. ADAM et P. TANNERY) II, S. 429, 540; III, S. 216. G. ENESTRÖM.

Réponse à la question 110[1]) sur les frères Français. Dans le *Mémoire sur la balistique* (Mémoires présentés à l'académie des sciences [de Paris] par les savants étrangers **10**, 1848, p. 619—764) de J. Didion, on trouve mention d'un ouvrage manuscrit „Recherches sur le mouvement des projectiles dans les milieux résistant, par F. François, professeur de mathématiques à l'école d'artillerie de La Fère, an XIII", appartenant à la bibliothèque de l'école d'application de l'artillerie et du génie à Metz, et dont copie a été adressée à l'Institut de France. Après y avoir fait allusion p. 637 et 714, Didion le cite p. 715 et en donne plus loin (p. 735—762) de nombreux et importants extraits. Il resterait à s'enquérir du sort des deux exemplaires de Metz et de Paris. On voit qu'en 1805, F. Français était professeur à La Fère. Comparez Nouv. ann. de mathém. 1862, p. 157—158 (Dupain) et 242—243 (Vincent).

F. Français est mentionné aussi par S. F. Lacroix dans ses *Elémens d'algèbre à l'usage de l'école centrale des quatre nations* (voir 15e édition, Paris 1830, p. 371—372), à propos d'un problème des courriers; Lacroix y a publié aussi des extraits d'une communication de Français.

H. Brocard.

1) Je me sers de cette occasion pour faire observer que le prénom du mathématicien Charpit, auquel se rapporte aussi la question **110**, était Paul (voir la note de Lacroix à la page 349 du 3e tome [Paris 1802] de la nouvelle édition de l'*Histoire des mathématiques* de Montucla). (G. E.)

Rezensionen.

Max C. P. Schmidt. Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik. Kulturhistorische Beiträge zur Kenntnis des griechischen und römischen Altertums. 1. Leipzig 1906. 8⁰, 134 S. 2.40 Mk.

Mit den meisten Kapiteln dieser interessanten Schrift können wir uns im allgemeinen einverstanden erklären; besonders angesprochen haben uns die Kapitel V (Thales von Milet), VI (Lineal und Richtschnur, etc.), VII (Milet, Ephesos, Samos), VIII (Pythagoras von Samos), IX (Herkunft des Wortes „Hypotenuse"), XI (Euklid von Alexandria), XV (Herkunft des Wortes „Summe"). Da die Arbeit schon recht ausführlich von F. Rudio (Berliner philolog. Wochenschrift, 1907, Sp. 202—213) besprochen worden ist, treten wir auf den Inhalt, soweit wir mit demselben einverstanden sind, nicht mehr näher ein; wir müssen aber unsere Verwunderung darüber ausdrücken, daß Herr Rudio so ohne weiteres das erste Kapitel hat durchgehen lassen. Herr Schmidt sagt p. 3: „Eine Zusammenstellung sämtlicher technischer Ausdrücke der elementaren Mathematik bietet das auffallende Bild einer seltsamen Sprachenvermengung, die für den oberflächlichen Blick willkürlich erscheint. Und doch ist in dieser Verwirrung der Sprachen eine gewisse Ordnung nicht zu verkennen, die uns den Schluß auf ein theoretisches Prinzip oder eine historische Ursache nahe legt. Diese feste Ordnung in dem scheinbaren Wirrwarr läßt sich durch folgende Regeln veranschaulichen.

Regel A. Die Termini der Raumlehre sind griechisch: Geometrie, Stereometrie, Peripherie, parallel, Kathete, Hypotenuse, homolog, Basis, Trapez, Rhombus, Zylinder, Prisma sind ein paar aus der übergroßen Fülle herausgegriffener Beispiele." Und auf derselben Seite weiter unten: „A. Der ersten Regel widersprechen folgende Termini. I. Lateinische Ausdrücke: Radius, kongruent, Quadrat, Punkt, Linie, Grade, Minuten, Sekunden, Dimension, Transversale, Kurven, Perpendikel, Normale, vertikal, konkav, konvex, Supplement, Komplement, Sekante, Tangente, Sektor, Segment, Konstruktion, Determination, direkt, indirekt, Proportion, Projektion". Nehmen wir hierzu noch eine Stelle aus dem Schlußkapitel (p. 120): „So schlief die Geometrie mit dem Ausgang des Altertums ein. Erst die Renaissance weckte sie zu neuem Leben. Diese aber ging an die Quelle. Sie wandte sich an den Euklid. — — — — Natürlich las bald alle Welt die Elemente griechisch. So ward die griechische Geometrie wieder geboren und die griechischen Termini wurden von neuem lebendig".

Dem Leser dieser Sätze wird zuerst auffallen, daß die Wörter, die eine Ausnahme von der Regel A bilden, zahlreicher sind als diejenigen, die der Regel genügen, Herr SCHMIDT wird diesem entgegenhalten, daß er von den griechischen Wörtern nur eine Auswahl gegeben habe. Aber wir dürfen wohl behaupten, daß wenn er auch alle aufgezählt hätte, die Zahl der lateinischen Wörter (denn auch hier sind nicht alle genannt) dennoch die der griechischen übersteigen würde. Aber dies ist Nebensache. Wir wollen jetzt dartun, daß diesem „Wirrwarr" kein „theoretisches Prinzip" zugrunde liegt, wohl aber eine „historische Ursache". Aber nicht die, daß erst wieder „die Renaissance die griechische Geometrie zu neuem Leben erweckt hat". Wohl waren ursprünglich alle Termini der Geometrie griechisch. Durch wen, wann und in welcher Sprache kam aber zuerst die griechische Geometrie ins Abendland? Gewiß nicht zuerst durch die griechischen Ausgaben zur Zeit der Renaissance! Nein, sondern durch die lateinischen Schriften der römischen Feldmesser, durch die sogenannte Geometrie des BOETHIUS (die, wenn auch nicht echt, so doch gewiß älter als 1100 ist), durch GERBERT (gest. 1003), durch die Übersetzer aus dem Arabischen im 12. Jahrhundert (wenn auch durch diese nur mittelbar), durch LEONARDO VON PISA (c. 1200), WILHELM VON MOERBECKE (c. 1265) und andere. Und nun durchgehe man einmal die Schriften der genannten Vermittler, und man wird in denselben alle die angeführten griechischen Termini aus der Geometrie und noch viel mehr wiederfinden! Und warum? Weil die genannten Gelehrten für viele griechische Ausdrücke keine kurzen passenden lateinischen Wörter zur Verfügung hatten. Wir wagen sogar die Behauptung aufzustellen: Wären den genannten Männern für alle griechischen Termini treffende lateinische Ausdrücke zu Gebote gestanden, so hätte die mittelalterliche und damit auch die neuere Mathematik *gar keine griechischen Ausdrücke mehr aufzuweisen.* Als dann nach der Renaissance die mathematischen Lehrbücher in Deutschland immer häufiger in deutscher Sprache verfaßt wurden, suchte man natürlich auch nach deutschen Wörtern für die mathematischen Termini, fand aber für viele keine passenden, und behielt deshalb die griechischen und lateinischen Wörter bei, wie man sie in den mittelalterlichen Schriften fand. Was hätte man auch für Trapez, Rhombus, Parallelogramm schreiben sollen? Die deutsche Sprache war hierfür so arm wie die lateinische. (Nebenbei sei übrigens bemerkt, daß heutzutage für viele dieser griechischen und lateinischen Ausdrücke der Geometrie deutsche Bezeichnungen gebraucht werden, und zwar kommen diese im Unterricht [wenigstens bei uns in der Schweiz] häufiger vor als die fremdsprachlichen. So sagt man statt Diameter, Peripherie, Basis, Segment, Sektor, Perpendikel, Supplement etc.: Durchmesser, Umfang, Grundlinie, Kreisabschnitt, Kreisausschnitt, Senkrechte, Ergänzung etc.) Daß die Rechenbücher mehr deutsche Ausdrücke aufweisen als die geometrischen Lehrbücher, hat seinen Grund wohl auch darin, daß die ersteren im Volke verbreiteter, populärer waren als die letzteren. Man hätte gewiß noch viele Wörter verdeutschen können, aber man kennt ja die Vorliebe der deutschen Gelehrten früherer Zeit für Fremdwörter; in unserer Zeit bestrebt man sich, diese soviel als möglich auszumerzen; für die Mathematik aber möchten wir diese Versuche nicht unterstützen: die Wissenschaft soll international bleiben.

Was nun die Behauptung anbetrifft: „Natürlich las bald alle Welt die Elemente griechisch" etc., so ist dieselbe ebenfalls ein großer Irrtum. Wohl mag zur Zeit der Renaissance die Lektüre der griechischen Historiker, Redner

und Dichter ihre heute noch andauernde Herrschaft in den Gelehrtenschulen begonnen haben, wohl erschien 1533 zu Basel die erste griechische Ausgabe des Euklides, aber die mathematischen und astronomischen Lehrbücher blieben die gleichen, die sie vorher waren, in erster Linie der *Algorismus* des Sacrobosco und seine *Sphaera*, dann einige Bücher des lateinischen Euklides, eine Perspektive (Optik), ein *Algorismus proportionum* und einige wenige andere; auf keiner Hochschule aber, noch viel weniger auf einem Gymnasium, wurde jemals der Euklid griechisch gelesen, das taten nur einige wenige mit den mathematischen Wissenschaften vertraute oder ihnen geneigte Humanisten. Herr Schmidt führt kurz vor der genannten Stelle einige Euklidausgaben an, die zu jener Zeit erschienen, doch wohl um seiner Behauptung mehr Nachdruck zu geben, aber sonderbarerweise fehlt darunter gerade die griechische; er sagt (p. 120): „In Venedig wurde 1505 zum ersten Male aus dem Griechischen der gesamte Euklid ins Lateinische übersetzt (Zamberti). Diese Übersetzung wurde 1509 wieder gedruckt (Paciolo)". Und aus diesen lateinischen Übersetzungen soll alle Welt den Euklid griechisch gelesen haben!

Regel B. (p. 3): „Die Termini der Zahlenkunde sind lateinisch. Addition, Subtraktion, Produkt, Quotient, plus, minus, positiv, irrational, imaginär, Permutationen, Kombinationen, mögen als wenige Beispiele für viele dienen". Eine große Zahl dieser Ausdrücke stammt natürlich aus dem Mittelalter und der neuern Zeit, was auch Herr Schmidt im 16. Kapitel bemerkt. Diejenigen aber, die die Römer (Boethius) schon gekannt haben, dürften meiner Ansicht nach zum größern Teile ebenfalls Übersetzungen aus dem Griechischen sein. Hier waren die Römer weniger in Verlegenheit, eigene Ausdrücke an Stelle der griechischen zu setzen, da das Rechnen ihrem ganzen Wesen näher lag und mehr entsprach als die theoretische Geometrie.

Regel C. (p. 3): „Die Termini der Bruchlehre sind deutsch. Wir reden von Bruch, Stammbruch, Kettenbruch, Nenner, Zähler, Teiler, heben, erweitern". Woher stammt denn unsere Rechenkunst? Ich denke, von den Arabern; durch die lateinischen Übersetzungen des Mittelalters, durch die Algorithmus-Schriften, wurde sie uns überliefert, und die Wörter „Bruch", „Zähler", „Nenner" sind nur die *deutschen Übersetzungen* der mittelalterlichen lateinischen Wörter, die teilweise wieder wörtliche Übersetzungen aus dem Arabischen sind. So heißt der Bruch im Arabischen al-kasr (od. kesr, von kasara = zerbrechen); Leonardo von Pisa übersetzte dies durch ruptus (numerus), es kommt aber bei ihm auch fractio vor; Zähler und Nenner heißen bei ihm denominans und denominatus, aber die spätern Algorithmus-Schriften haben numerator und denominator. Diese Ausdrücke sind allerdings nicht direkte Übersetzungen aus dem Arabischen, aber daß die arabischen Schriften über Rechenkunst die Grundlage für dieselben enthalten, beweist die Tatsache, daß in den westarabischen Rechenbüchern die Division einer kleinern Zahl durch eine größere al-tasmija = die Benennung = denominatio genannt wird. Soviel aber ist gewiß, daß unsere deutschen Wörter Bruch, Zähler und Nenner die Übersetzungen der mittelalterlichen fractio, numerator und denominator sind. Es ist also der Passus (p. 102): „Da das auch den Römern nicht gelungen ist, so mußte der Deutsche für seine Bruchrechnung deutsche Vokabeln erfinden und eine eigene Schreibweise verwenden", ganz unrichtig und zwar in bezug auf beide Schlußfolgerungen; denn auch die Schreibweise der Brüche ist nicht deutsche Erfindung: die Westaraber und Leonardo schrieben die Brüche schon wie wir.

Wir haben noch an drei weiteren Stellen des Buches Anstoß genommen: p. 99 sagt Herr Schmidt: „Die Lehre von der Algebra ist den Alten unbekannt". Der Verfasser meint natürlich die Buchstabenrechnung, denn er weiß ja wohl, daß Diophantus ein hervorragender Algebraiker war, und daß Nesselmann im Jahre 1842 ein sehr gelehrtes Buch über „die Algebra der Griechen" geschrieben hat. Er führt ja auch p. 3 an, Algebra sei ein arabisches Wort, dann wird er auch seine ursprüngliche Bedeutung (die Lehre von den Gleichungen) kennen, die heutzutage noch bei den Mathematikern die maßgebende ist; leider wurde der Name im Laufe der Zeit ganz unrichtigerweise auf die Buchstabenrechnung oder allgemeine Arithmetik übertragen. — p. 106 heißt es: „Auch sie (die Römer) rechnen kaum je im Kopf, kaum je nach Regeln. Sie bedienen sich beständig des Rechenbrettes, des sogenannten abacus". Wie stellt sich der Herr Verfasser vor, daß die Römer die Multiplikation $53 \cdot 37$ auf dem Abacus ausgeführt haben? Sie rechneten eben im Kopf: $50 \cdot 30 = 1500$, $50 \cdot 7 = 350$, $30 \cdot 3 = 90$, $3 \cdot 7 = 21$, auf dem Abacus wurden dann die Zahlen 1500, 350, 90 und 21 durch die Calculi dargestellt und die Addition derselben vollzogen. Die Multiplikationen fanden sie eben nicht auf dem Abacus, diese mußten sie im Kopfe ausführen; gewiß war die Kenntnis des Einmaleins noch nicht so verbreitet wie heute, aber es ist nicht unwahrscheinlich daß die Römer die sogenannte komplementäre Multiplikation kannten und anwandten, mit deren Hilfe die Multiplikation der Zahlen von 6—9 auf diejenige der Zahlen von 1—5 zurückgeführt wurde. Es gab freilich auch ein Fingerrechnen, wir glauben aber nicht, daß dieses bei den Römern häufig angewandt worden sei. — p. 134 heißt es: „Tatsächlich bezeichnen additio, subtractio, multiplicatio nicht Rechnungsarten, sondern die einzelnen Rechenexempel. Das beweisen die Plurale multiplicationes (§ 120C Vgl. *πολλαπλασιασμοί* § 118D). Ein Begriff wie unser ‚die Multiplikation' ist den Alten so gut wie fremd." Was bedeuten denn bei Diophant (Edit. Tannery, p. 14) die Wörter Synthesis, Aphairesis, Pollaplasiasmoi anders als die Rechnungsarten der Addition, Subtraktion und Multiplikation? Daß hier bei der Multiplikation der Plural gebraucht wird, ist belanglos, steht doch p. 4, wo alle vier Grundoperationen, wieder allgemein aufgefaßt, angeführt werden, der Singular (allerdings Polyplasiasmos statt Pollaplasiasmos, poly wechselt häufig, auch beim Verbum, mit polla). Auch bei Euklid kommt der Singular Pollaplasiasmos öfters vor (Edit. Heiberg, II, p. 2, 14, 16 etc.); ebenso bei Theon von Smyrna (Kap. 13), wo er sagt, daß die heteromeken Zahlen sowohl durch Addition aus der Reihe der geraden Zahlen, als durch Multiplikation aus der Reihe der natürlichen Zahlen entstehen. Sogar eine *Definition* von Multiplikation (pollaplasiasmos) und Division (merismos) als Rechnungsoperationen findet der Verfasser im zweiten Bande der Diophantausgabe Tannerys (p. 6 und 10), allerdings in einer pseudepigraphischen Schrift aus dem 5. oder 6. Jahrhundert. Hätten wir überhaupt noch Schriften über Logistik, so ist wohl mit Sicherheit zu behaupten, daß wir darin besondere Kapitel mit den Namen der vier Operationen überschrieben finden würden. Das gleiche gilt wohl auch von den Römern; daß multiplicatio und divisio als allgemeine Bezeichnungen für diese Operationen bei Boethius vorkommen, wird der Verfasser kaum in Abrede stellen können.

Zürich. H. Suter.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8⁰. [1

20 : 2 (1907). — 22 (1907). — 23 (1907).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8⁰. [2

7_3 (1906) : 4. — [Rezension des Bandes 6 :] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest scient. 11_3, 1907, 633—635. (H. Bosmans.)

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8⁰. [3

1907 : 1.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, W. Kapteyn, J. C. Kluyver, P. H. Schoute. Amsterdam. 8⁰. [4

15 : 1 (avril — octobre 1906).

Verhandlungen des dritten internationalen Mathematikerkongresses, herausgegeben von A. Krazer (1905). [Rezension:] Revue génér. d. sc. 17, 1906, 712. [5

Congrès international d'histoire des sciences. IIIme section. Tenue à Genève 1904. Rapports et comptes rendus publiés par Ed. Claparède (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 635—638. (H. Bosmans.) [6

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^3 (1907). [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 253—254. — [Rezension:] Biblioth. Mathem. 7_3,

1907, 398—406. (G. Eneström). — Deutsche Literaturz. 28, 1907, 1084. — Mathesis 7_3, 1907, 153 — [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 378—379. (F. Rudio, G. Eneström.) — 2^3 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 380—393. (G. Eneström, A. Favaro.) — 3^3 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 393—396. (G. Eneström.) [7

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik herausgegeben von M. Cantor. Vierter Band. Von 1759 bis 1799. Zweite Lieferung. Kombinatorik. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Reihen. Imaginäres. Von E. Netto. Elementare Geometrie. Von V. Bobynin. Leipzig, Teubner 1907. [8
8°, S. 201—402. — [5.60 Mk.] — [Bericht über das Heft 1:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 254. (M. Cantor.)

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Traduite par L. Freund. I (1906). [Rezension:] Mathesis 7_3, 1907, 153—154. — Revue génér. d. sc. 17, 1906, 338. [9

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Neudruck. Leipzig, Göschen 1906. [10
16°, 152 S. — [0.80 Mk.] — Unveränderter Abdruck der ursprünglichen Stereotypplatten.

***Arrighi, G. L.**, La storia della matematica in relazione con lo sviluppo del pensiero. Torino, Paravia 1905. [11
8°, XIII+15+133 S. — [1.50 lire.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 9, 1906, 80—81. (G. L.)

***Fazzari, G.**, Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo. Palermo, Sandron 1907. [12
16°, 268 S. — [4 lire.]

Darboux, G., Etude sur le développement des méthodes géométriques (1904). [Englische Übersetzung:] The mathem. gazette 3, 1904—1905, 100—106, 121—128, 157—161, 169—173. [13

***Schidlowski, W.**, [Kurze Übersicht der Geschichte der sphärischen Trigonometrie]. [14
Vjestnik elem. matem. 32, 1905, 106—113. — Russisch.

Loria, G., Pour une historie de la géométrie analytique (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 647—648. (H. Bosmans.) [15

Duhem, P., Les origines de la statique. II (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 41—46. (J. T.) — Mathesis 7_3, 1907, 154. [16

Duhem, P., Sulle origini della statica. [17
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti (sc. matem.) 15_5 : 2, 1903, 697—699.

La Cour, P. und **Appel, J.**, Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Übersetzung von G. Siebert (1906). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 99—101. (R. Walckling.) [18

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit. Leipzig, Teubner 1906. [19
8°, 164 S. — [1 Mk.] — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 293. (A. Berberich.)

b) Geschichte des Altertums.

Hilprecht, H. V., Mathematical, metrological and chronological tablets (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 392—398. (D. E. Smith.) [20

Alibrandi, P., Di un preteso errore geometrico contenuto nella Sacra scrittura. [21
Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Memorie 23, 1905, 1—10. — Über den Wert $\pi = 3$.

Saussure, L. de, L'astronomie chinoise dans l'antiquité. [22
Revue génér. d. sc. 18, 1907.

Haas, A. E., Antike Lichttheorien. [23
Archiv für Geschichte der Philosophie 20, 1907, 345—386.

Heiberg, J. L., [Griechische] Mathematik, Mechanik und Astronomie (1905). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 638—639. (H. Bosmans.) [24

Schmidt, M. C. P., Die Herkunft des Wortes Hypotenusa. [25
Naturwiss. Wochenschr. 4, 1905. — Zeitschr. für physik. Unterr. 18, 1905, 236—237.

Junge, G., Wann haben die Griechen das irrationale entdeckt? [26
Novae symbolae Joachimicae (Halle 1907), 221—264.

***Ruelle, C. E.**, Sur l'authenticité probable de la division du canon musical attribuée à Euclide. [27
Revue des études grecques 20, 1907.

Heiberg, J. L., Eine neue Archimedeshandschrift. [28
Hermes 42, 1907, 235—303 + Taf. — [Auszug:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 402—404.

Heiberg, J. L. und **Zeuthen, H. G.**, Eine neue Schrift des Archimedes. [29
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 321—363.

c) Geschichte des Mittelalters.

Nau, F., Le traité sur l'astrolabe plan de Sevère Sabokt (1899). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 640—642. (H. Bosmans.) [30

Suter, H., Zur Frage des von Nairizi zitierten Mathematikers Diachasimus. [31
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 396.

Omont, H., Opuscules mathématiques de Gerbert et de Hériger de Lobbes. [32
Paris, Biblioth. nat., Notices et extraits des manuscrits 39, 1907. 12 S.

***Thompson, S. P.**, Petrus Peregrinus de Maricourt and his Epistola de magnete. [33
London, Brit. Acad., Proceedings 1907. 32 S.

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. I (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém 31_2, 1907, 52—57. (J. T.) — Mathesis 7_3, 1907, 155. [34

Duhem, P., Leonardo da Vinci. [35
Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti (sc. matem.) 16_5 : 1, 1907, 34.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Jackson, L. L., The educational significance of the sixteenth century arithmetic (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 92—93. (J. T.) [36

Bosmans, H., Le commentaire de Gemma Frisius sur l'Arithmetica integra de Stifel. [37
Bruxelles, Soc. scient., Annales 30 : 1, 1905, 165—168.

Bosmans, H., Note historique sur le triangle arithmétique dit de Pascal. [38
Bruxelles, Soc. scient., Annales 31, 1906. 8 S.

Guimarães, R., Un manuscrit intéressant (1905). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 644—646. (H. Bosmans). [39

Brocard, H., Description et usage d'un nouvel anneau astronomique (1905). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 644—646. (H. Bosmans.) [40

Gravelaar, N. L. W. A., De leerwijze van Ferrari voor de oplossingen der vergelijkingen van den vierden graad (1905). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 644. (H. Bosmans.) [41

***Havliček, T.,** [Geschichte der Gleichungen. III. Die Auflösung der Gleichungen vierten Grades]. Mistek 1905. [42
8°, 20 S. — Gymnasialprogramm. — Böhmisch.

Favaro, A., Galileo Galilei e Don Giovanni de' Medici. [43
Archivio storico italiano 39_5, 1907. 16 S.

Favaro, A., Pensieri, sentenze e motti di Galileo Galilei. [44
Rivista di fisica (Pavia) 8, 1907, 5—17.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XX. Fulgenzio Micanzio. [45
Nuovo archivio veneto 13_2, 1907. 36 S.

Favaro, A., Antichi e moderni detrattori di Galileo. Firenze 1907. [46
8°, 26 S. — Aus der „Rassegna nazionale" 1907.

Eneström, G., Über den Pantometer von Michel Coignet. [47
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 397.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung. [48
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 20 : 2, 1907, 87—314 + (3) S. — [10 Mk.] — [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 255.

***Milhaud, G.,** Descartes et la loi des sinus. [49
Revue génér. d. sc. 18, 1907.

Slaby, A., Otto von Guericke. Festvortrag aus Anlaß der Grundsteinlegung des Deutschen Museums zu München. Berlin, Springer 1907. [50
8°, 28 S. — [0.60 Mk.]

Mikami, Y., Zur Frage abendländischer Einflüsse auf die japanische Mathematik am Ende des siebzehnten Jahrhunderts. [51
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 364—366.

Hayashi, T., Seki's Kaihō-Honpen, Hōjin-Ensan, and Sandatsu-Kempu. [52
Tôkyô, Sûgaku-Buturigakkwai, Kizi-Gaiyô 3, 1906, 183—201.

Endō, R., [Über einige Arbeiten der Sekischen Schule]. [53
Tôkyô, Sûgaku-Buturigakkwai, Kizi-Gaiyô 3, 1906, 205—209. — Japanisch.

Korteweg, D. J., Christiaan Huygens, traité „De iis quae liquido supernatant". La Haye 1907. [54
4°, S. 81—210. — Sonderabdruck aus dem noch nicht erschienenen 11. Bande der „Oeuvres complètes de Chr. Huygens".

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. II. [55
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 7_2, 1907, 438—454.

Geer, P. van, Christiaan Huygens' verblijf te Paris (1666—1681). [56
De Tijdspiegel 1907. 29 S.

Mascart, J., La découverte de l'anneau de Saturne par Huygens (1906). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient 11_3, 1907, 646—647. (H. Bosmans.) [57

Hathaway, A. S., Newtonian idea of the calculus. [58
Indianopolis, Indiana acad. of sc., Proceedings 1906, 237—240.

Gerland, E., Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen Inhalts (1906). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 1335—1336. (O. Berg.) — Mathesis 7_3, 1907, 154. [59

Geck, E., Die Entwicklung des Funktionenbegriffs. [60
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein., Mitteil. 8_2, 1906, 33—45.

***Ilnicki, E.,** Über die Prinzipien der Infinitesimalrechnung und über die Wandlungen, welche die Darstellung dieses Zweiges der Mathematik im Laufe seiner Entwicklung erfahren hat. Czernowitz 1906. [61
8°, 43 S. — Programm.

Muir, Th., The theory of determinants in the historical order of development (1906). [Rezension:] Mathem. gazette 3, 1906, 39. — Nature 74, 1906, 462—463. — Philos. magazine 12_6, 1906, 431. [62

Hering, K., Das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine 1706—1906. Eine historisch-technisch wirtschaftliche Betrachtung. [63
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 23, 1907. (4) + 57 + (1) S. — [1.60 Mk.] — [Rezension:] Mathesis 7_3, 1907, 155.

Bateman, H., The correspondence of Brook Taylor. [64
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 367—371.

Graf, J., H., Zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften an der ehemaligen Akademie und der Hochschule Bern. [65
Bern, Naturf. Ges., Mitteil. 1906. 19 S.

Schulz-Euler, S., Leonhard Euler. Ein Lebensbild zu seinem 200. Geburtstage nach Quellen und (!) Familienpapieren bearbeitet: Frankfurt am Main, Schulz 1907. [66
8⁰, (4) + 39 S. + 2 Bildnisse. — [1.50 Mk.]

Lorey, W., Leonhard Euler. Vortrag, gehalten am 8. März 1907 in der Naturforschenden Gesellschaft in Görlitz. [67
Görlitz, Naturf. Ges., Abhandl. 25, 1907. 20 S. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 1597—1598. (W. Ahrens.)

Müller, Felix, Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler. [68
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 185—195 + Porträt.

Eneström, G., Über Bildnisse von Leonhard Euler. [69
Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 372—374. Mit Titelbild.

***Nelson, L.,** Kant und die nicht-euklidische Geometrie. Berlin 1906. [70
8⁰, 28 S.

L[aisant], C. A., Le lieu de naissance de Legendre. [71
L'enseignement mathém. 9, 1907, 218—219. — Legendre ist in Paris (nicht Toulouse) geboren.

Simon, M., Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 406—418. (F. Müller.) — Bullet. d. sc. mathém 31_2, 1907, 33—35. (J. T.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 201—202. (H. Wieleitner.) [72

Gauss, C. F., Werke. Band VII (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 68—69. (J. G.) — Deutsche Literaturz. 28, 1907, 1139—1140. (H. Weber.) [73

Mansion, P., Sur la méthode des moindres carrés dans le „Nachlass" de Gauss. [74
Bruxelles, Soc. scient., Annales 30:1, 1906, 169—174.

Varićak, V., Bemerkung zu einem Punkte in der Festrede L. Schlesingers über Johann Bolyai. [75
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 320—321.

Wangerin, A., Franz Neumann und sein Wirken als Forscher und Lehrer. Braunschweig, Vieweg 1907. [76
8⁰, X + 185 S. + Porträt. — [5.50 Mk.] — Die Wissenschaft Bd. 19.

Lucas de Pesloüan, Ch., N. H. Abel (1906). [Rezension:] *Bruxelles,* Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 608—609. (M. O.) — *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 305—306. (F. Cajori.) [77

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker. Ein Beitrag zu seiner Biographie. Leipzig, Teubner 1907. [78
8⁰, 45 S. — [1.20 Mk.] — Erweiterter Abdruck aus der „Bibliotheca Mathematica" 7_3 (1906). — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathem. 31_2, 1907, 116—118. (J. T.) — Mathesis 7_3, 1907, 155.

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi. [79
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 22, 1907. — XX + 282 S. + 2 Porträts. — [6.90 Mk.] — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 118—119. (J. T.) — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 334—335. (P. Stäckel.) — Mathesis 7_3, 1907, 155.

Ahrens, W., Skizzen aus dem Leben Weierstrass'. [80
Mathem.-naturwiss. Blätter 1907. 7 S.

***Reiner, J.,** Hermann von Helmholtz. Leipzig, Thomas 1905. [81
8⁰, 204 S. + Porträt. — Klassiker der Naturwissenschaften Band 6. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 950—951. (G. Mie.) — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 91. (H. v. H.)

Correspondance d'Hermite et de Stieltjes publiée par B. Baillaud et H. Bourget (1905). [Rezension:] Nature 74, 1906, 265. [82

***Streit, H.,** Die Fortschritte auf dem Gebiete der Thermoelektrizität. IV. Von der Mitte des vorigen Jahrhunderts bis zur Neuzeit. Beiträge zur Geschichte der Physik. Wittenberge 1906. [83
8⁰, 78 S. — Realschulprogramm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 125. (Stegemann.)

Hartogs, F., Über neuere Untersuchungen auf dem Gebiete der analytischen Funktionen mehrerer Variabeln. [84
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 223—240.

Brocard, H., La bibliographie de la géométrie du triangle de 1895 à 1905. [85
Association française pour l'avancement des sciences, Comptes rendus 1906 (Lyon). 14. S.

***Macpherson, H.,** Astronomers of to-day and their works. London, Gall & Inglis 1905. [86
8⁰, 272 S.

Gutzmer, A., Geschichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (1904). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 38—39. (J. T.) [87

Bosmans, H., Paul Tannery et ses derniers travaux. [88
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 11_3, 1907, 648—649.

***Archibald, R. C.,** Bibliography of the life and works of Simon Newcomb. [89
Toronto, Royal soc. of Canada, Proceedings 11, 1905, 79—110.

Verzeichnis der Mitglieder der Deutschen Mathematiker-Vereinigung nach dem Stande vom 1. Januar 1907. [90
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, XIII—LIV. — Mit biographischen Notizen.

e) Nekrologe.

Ernst **Abbe** (1840—1905). [91

Berlin, Deutsche Physik. Ges., Verhandl. 7, 1905, 89—121. (S. Czapski.) — *Göttingen*, Ges. d. Wiss., Nachr. (Geschäftl. Mitteil.) 1905, 33—44. (W. Voigt.)

Winckelmann, A., *Ernst Abbe. Rede.* Jena 1905. 8, 23 S.

Gedenkreden und Ansprachen, gehalten bei der Trauerfeier für Ernst Abbe am 17. Januar 1905. Jena 1905. 8°, IV + 23 S.

Marcus **Baker** (1849—1903). [92

Washington, Philos. soc., Bulletin 14, 1905, 277—285. (W. H. Dall.)

Wilhelm **von Bezold** (1837—1907). [93

Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 153—155, 352. (R. Süring.)

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [94

Görlitz, Naturf. Ges., Abhandl. 25 : 2, 1907. (W. Lorey.)

Karl **Bopp** (1856—1905). [95

Mathem. naturwiss. Blätter 2, 1905, 194—195. (W. Lorey.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [96

Roma, Accad. d. Lincei, Rendiconti 16_5 : 1, 1907, 76—82. (V. Cerruti.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 23, 1907, 221—226. (Abdruck des Nachrufes von V. Cerruti.)

Alexandre **de Colnet d'Huart** (1821—1905?). [97

Luxembourg, Institut, Archives trimestrielles 1906, 1—57 + Porträt. (M. Grechen.)

Ralph **Copeland** (1837—1905). [98

Astron. Nachr. 170, 1905, 29—32. (J. Hahn.) — Leopoldina 41, 1905, 101—102.

Joseph **Delboeuf** (1831—1896). [99

Bruxelles, Acad. de Belgique, Annuaire 1905, 47—147. (A. Gilkinet.)

Paul **Drude** (1863—1906). [100

Görlitz, Naturf. Ges., Abhandl. 25 : 2. (W. Lorey.)

Johannes **Edler** (1860—1905). [101

Berlin, Deutsche Physik Ges., Verhandl. 7, 1905, 398—402. (Ad. Schmidt.)

Edmund **Gerlach** (1849—1904). [102

Programm der Luisenstädtschen Oberrealschule (Berlin) 1904, 36—40. (A. Krause.)

William **Harkness** (1837—1903). [103

Washington, Philos. soc., Bulletin 14, 1905, 292—296.

Guido **Hauck** (1845—1905). [104

Leopoldina 41, 1905, 38. — Zentralbl. d. Bauverw. 25, 1905, 72—73. (G. Hessenberg.)

Charles Jasper **Joly** (1864—1906). [105

London, Mathem. soc., Proceedings 4_2, 1906, XIII—XIV.

Charles **Joubert** (1825—1906). [106

Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Atti 60, 1907. 16 S. (B. Carrara.)

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [107

L'enseignement mathém. 9, 1907, 169—179 + Porträt. (C. A. Laisant.)

Teofilo **Pepin** (1826—1904?). [108

Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Atti 58, 1905, 210—216.

Robert **Rawson** (1814—1906). [109

London, Mathem. soc., Proceedings 4_2, 1906, XV—XVII.

John Krom **Rees** (1851—1907). [110

Science 25_2, 1907, 475—477. (H. Jacoby.)

Francesco **Regnani** (1818—1904). [111

Roma, Accad. pontif. d. Nuovi Lincei, Memorie 23, 1905. 18 S. + Porträt. (G. Lapponi.)

Wilhelm **Ritter** (1847—1906). [112

Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber 16, 1907, 244—248 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (H. E. Timerding.)

Edward John **Routh** (1831—1907). [113

Science 25_2, 1907, 982.

George **Salmon** (1819—1904). [114

Fiedler, W., *Zum Gedächtnis George Salmons.* Leipzig 1907. 8°.

Charles Antony **Schott** (1826—1901). [115

Washington, Philos. soc., Bulletin 14, 1905, 312—314. (O. H. Tittmann.)

Oskar **Schreiber** (1829—1905). [116

Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 40, 1905, 303—310. (H. Helmert.)

Otto Wilhelm **von Struve** (1819—1905). [117

Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 40, 1905, 286—303. (M. Nyrén.)

Pietro **Tacchini** (1838—1905) [118

Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 40, 1905, 213—214. (E. Millosevich.) — *Venezia*, Istituto Veneto, Atti 7_8, 1905, 64, 89—95. (E. Lorenzoni.) — Leopoldina 41, 1905, 48.

August **Weilenmann** (1843—1906). [119

Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 51, 1906, 520—521. (U. Seiler.)

Walter Friedrich **Wislicenus** (1859—1905). [120

Leopoldina 41, 1905, 96.

f) Aktuelle Fragen.

Tannery, P., Programme d'un cours d'histoire des sciences. [121

La revue du mois 3, 1907, 385—391. — [Wieder abgedruckt:] L'enseignement mathém. 9, 1907, 226—230.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. VI, VII. [122

L'enseignement mathém. 9, 1907, 123—141. (H. Fehr, Th. Flournoy, V. Bobynin); 204—217 (Th. Flournoy.)

Smith, D. E., A mathematical exhibit of interest to teachers. [123

Biblioth. Mathem. 7_3, 1907, 375—377.

Osgood, W. F., The calculus in our colleges and technical schools. [124

New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 449—467.

Klein, F., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. 1. Von der Organisation des mathematischen Unterrichts. Leipzig, Teubner 1907. [125

8°, IX + 236 S. — [5 Mk.]

[Euler-Feier.] [126

Basel. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 328—332. (F. Rudio.) — L'enseignement mathém. 9, 1907, 221—223. (R. Gauthier.)

Berlin. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 332—333. — L'enseignement mathém. 9, 1907, 221. (E. Jahnke.)

Breslau. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 332—333.

Dresden. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 333.

Görlitz. Deutsche Mathem.-Verein , Jahresber. 16, 1907, 332.

Worchester. Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 333. — Science 25_2, 1907, 678.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— H. Bateman in Liverpool zum Dozenten der mathematischen Physik an der Universität in Manchester.

— J. A. Brown in Hanover zum Professor der Physik am „Dartmouth college" daselbst.

— W. M. Carruth in Ithaca zum Professor der Mathematik am „Hamilton college" in Clinton, N. J.

— Professor A. D. Cole in Columbus (Ohio) zum Professor der Physik am „Vassar college" in Poughkeepsie.

— Professor Fr. Dolezalek in Göttingen zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Berlin.

— J. Drach in Poitiers zum Professor der Differential- und Integralrechnung an der „Faculté des sciences" daselbst.

— Privatdozent R. Emden in München zum Professor der Physik und Meteorologie an der Universität daselbst.

— Dr. P. Field in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. W. B. Ford in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor Ph. Furtwängler in Poppelsdorf zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Aachen.

— O. A. Gage in Ithaca zum Professor der Physik an der Universität von Wisconsin in Madison.

— H. G. Gale in Chicago zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent M. Grossmann in Basel zum Professor der darstellenden Geometrie am Polytechnikum in Zürich.

— Dr. C. C. Grove in Clinton N. Y. zum Professor der Mathematik am „Roanoke college".

— Professor G. Hessenberg in Berlin zum Professor der Mathematik an der Landwirtschaftlichen Akademie in Poppelsdorf.

— Professor H. Hohenner in Stuttgart zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Assistent S. S. Hough in Capetown zum Direktor der Sternwarte daselbst.

— W. H. Jackson in Manchester zum Professor der Mathematik am „Haverford college", Pa.

— Landesschulinspektor V. Jarolinek zum Professor der darstellenden Geometrie an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag.

— Professor J. P. Kuenen in Dundee zum Professor der Physik an der Universität in Leiden.

— Privadozent W. M. Kutta in München zum Professor der angewandten Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent Larquier in Lausanne zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— E. E. Lawton in New Haven zum Professor der Physik an der „Yale university" daselbst.

— Professor Ph. Lenard in Kiel zum Professor der Physik an der Universität in Heidelberg.

— Privatdozent W. Ludwig in Karlsruhe zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Dr. R. K. Mc Clung an der „Mc Gill university" in Montreal zum Professor der Physik an der „Mount Allison university" in Sackville, Canada.

— Privatdozent W. Meigen in Freiburg i/B. zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— J. St. Murat zum Direktor des meteorologischen Instituts in Bukarest.

— L. M. Passano in Boston zum Professor der Mathematik am „Massachusetts institute of technology" daselbst.

— W. Peddie in Edinburgh zum Professor der Physik am „University college" in Dundee.

— Dr. G. W. Pierce in Cambridge, Mass. zum Professor der Physik an der „Harvard university" daselbst.

— Ch. A. Proctor in Hanover zum Professor der Mathematik am „Dartmouth college" daselbst.

— Privatdozent R. Reiger in Erlangen zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. Th. R. Running in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor R. von Sterneck in Czernowitz zum Professor der Mathematik an der Universität in Graz.

— Dr. S. D. Townley in Ukiah, Californien, zum Professor der angewandten Mathematik an der „Leland Stanford junior university".

— Privatdozent E. von Weber in München zum Professor der Mathematik an der Universität in Würzburg.

— Professor R. H. Weber in Heidelberg zum Professor der Physik an der Universität in Rostock.

— Professor G. V. Wendell in Boston zum Professor der Physik am „Stevens institute of technology".

— Professor K. Wieghardt in Braunschweig zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Hannover.

— Dr. F. W. Williams am „Union college" zum Professor der Mathematik am „Clark college".

— Professor E. B. Wilson in New Haven zum Professor der Mathematik am „Massachusetts institute of technology" in Boston.

Todesfälle.

— Ferdinando Aschieri, Professor der Geometrie an der Universität in Pavia, geboren in Modena den 3. Dezember 1844, gestorben in Pavia den 14. April 1907.

— Karl Braun, früher Direktor des Observatoriums in Kalocsa (Ungarn), geboren in Neustadt (Hessen) den 27. April 1831, gestorben in Mariaschein (Böhmen) den 3 Juni 1907.

— Alexander Buchan, Sekretär der meteorologischen Gesellschaft in Edinburgh, geboren in Kinnesswood (Kinrossshire) den 11. April 1829, gestorben in Edinburgh den 13. Mai 1907.

— André Crova, Professor der Physik an der „Faculté des sciences" in Montpellier, geboren in Perpignan den 3. Dezember 1833, gestorben im Juni 1907.

— Guy William Eastman, Assistent für Physik am „Massachusetts institute of technology" in Boston, gestorben in Boston den 17. Mai 1907, 26 Jahre alt.

— Giacomo Foglini, früher Professor der höheren Mathematik an der gregorianischen Universität in Rom, geboren in Rom den 1. Mai 1822, gestorben daselbst den 16. April 1907.

— Arwed Fuhrmann, früher Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Dresden, geboren in Dresden den 6 Dezember 1840, gestorben daselbst den 23. April 1907.

— Alexander Stewart Herschel, Honorarprofessor der Physik am „Durham college" im Newcastle-on-Tyne, geboren in Capetown den 5. Februar 1836, gestorben zu Slough (Buckinghamshire) den 18. Juni 1907.

— Charles H. Hinton, Verfasser von Arbeiten über die vierte Dimension, geboren in London, gestorben in Washington den 30. April 1907, 63 Jahre alt.

— Ernst Kayser, Astronom der Danziger naturforschenden Gesellschaft, geboren in Danzig den 27. März 1830, gestorben daselbst im Juli 1907.

— Heinrich Kreutz, Professor der Astronomie an der Universität in Kiel, geboren in Siegen den 28. September 1854, gestorben in Kiel den 13. Juli 1907.

— Aimé Laussedat, früher Direktor des „Conservatoire des arts et métiers" in Paris, geboren in Moulins den 19. April 1819, gestorben in Paris den 18. März 1907.

— Egon von Oppolzer, Professor der Astronomie an der Universität in Innsbruck, geboren in Wien den 13. Oktober 1869, gestorben in Innsbruck den 15. Juni 1907.

— Jakob Rebstein, Professor des Vermessungswesens am Polytechnikum in Zürich, geboren in Töß bei Winterthur den 4. Mai 1840, gestorben in Zürich den 14. März 1907.

— Wilhelm Ritter, Professor der Ingenieurwissenschaft am Polytechnikum in Zürich, geboren in Liestal den 14. April 1847, gestorben in Zürich den 28. Oktober 1906.

— Edward John Routh, früher „fellow of Peters college" in Cambridge, geboren in Quebec (Canada) den 20. Januar 1831, gestorben in Cambridge den 7. Juni 1907.

— Francesco Siacci, Professor der theoretischen Mechanik an der Universität in Neapel, geboren in Rom den 20. April 1839, gestorben in Neapel den 30. Mai 1907.

— Charles Trépied, Direktor der Sternwarte in Algier, gestorben im Juni 1907.

— C. B. Warring, früher Lehrer der Mathematik und Physik am „Poughkeepsie military institute", gestorben den 5. Juli 1907, 82 Jahre alt.

— Georg Zachariae, früher Direktor der dänischen Gradmessung, geboren in Kopenhagen den 5. November 1835, gestorben daselbst den 13. Mai 1907.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Foerster für das Wintersemester 1907—1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der alten Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. Amodeo für das Wintersemester 1907—1908 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik der drei letzten Jahrhunderte angekündigt.

— An der Universität in Padua hat Professor A. Favaro für das Wintersemester 1907—1908 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik in Italien im 16. und 17. Jahrhundert angekündigt.

Preisfragen gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1908. On demande une contribution importante à l'étude de l'équation différentielle $Xdx + Ydy = 0$, où X et Y désignent des fonctions données du second ordre des variables x et y. — Exposer et compléter les recherches faites sur le calcul des variations depuis 1850.

— *Jablonowskische Gesellschaft in Leipzig.* Preisaufgabe für das Jahr 1910. Es soll eine Arbeit über die Potentialtheorie geliefert werden, durch welche die Theorie der „Grundbelegung" in bezug auf Klarheit und Strenge oder in bezug auf Umfang und Vollständigkeit wesentlich gefördert wird.

— *Real academia de ciencias exactas, físicas y naturales de Madrid.* Concurso del año 1908. Sucinta exposición de los principios fundamentales de la Nomografía, estrictamente necesarios para la composición y fácil inteligencia de un sistema de ábacos ó nomogramas, desconocidos hasta ahora y aplicables, con manifiesta ventaja sobre cualquier otro procedimiento, á la resolución de una serie de cuestiones, interesantes en teoría y de utilidad en la prática, referentes á las ciencias físico-matemáticas.

— *Accademia di scienze di Napoli.* Concorso dell' anno 1907. Esposizione sistematica delle nozioni sinora acquisite sulle configurazioni geometriche del piano e degli spazi mettendole in relazione con la teoria delle sostituzioni e portandovi, possibilmente, qualche nuovo contributo.

Vermischtes.

— Unter den Leitsätzen für Universitätslehrer der Mathematik, die bei der Versammlung des Vereins zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts in Dresden 1907 zur Diskussion kamen, war auch der folgende: „In den Vorlesungen ist das geschichtliche und bibliographische Moment in gehöriger Weise zu berücksichtigen“.

— Die schweizerische naturforschende Gesellschaft beschloß in ihrer Jahresversammlung in Freiburg am 29. Juli 1907, auf Antrag des Herrn F. Rudio, eine Kommission einzusetzen, um die Frage einer Gesamtausgabe von Leonhard Eulers Werken zu prüfen und die erforderlichen vorbereitenden Schritte für diesen Zweck zu tun. Es ist also zu hoffen, daß diese Frage jetzt zu einem guten Abschluß geführt wird.

Das Weltbild bei Heron.

Von K. TITTEL in Leipzig

Die reichhaltige Sammlung der Pneumatika, die unter HERONS Namen überliefert ist, enthält im 7. Kapitel des II. Buches eine kurze Beschreibung einer Vorrichtung, mit deren Hilfe das Weltall figürlich dargestellt werden kann.[1]) Es ist jedoch dem letzten Herausgeber W. SCHMIDT nicht gelungen, diesem Abschnitt einen befriedigenden Sinn abzugewinnen. Wenigstens erklärt er in der Einleitung S. XLV, diese Darstellung sei HERONS wenig würdig. SCHMIDT hat sich nämlich die Ansicht eines französischen Bearbeiters HERONischer Schriften DE ROCHAS[2]) zu eigen gemacht, der S. 157 seiner Übersetzung behauptet hat, dieser Wiedergabe des Kosmos liege die durch ARISTOTELES, *De caelo* II 13 dem THALES von Milet zugeschriebene Anschauung zugrunde, daß die Erde wie ein Stück Holz auf dem Meere schwimme. Ein solches Weltbild paßt natürlich weder in die hellenistische Zeit noch in eine spätere Periode, in welches Jahrhundert man HERON auch setzen mag.[3]) Es soll darum von neuem der Versuch gemacht werden, den überlieferten Text zu interpretieren.

Nach der Anweisung S. 222, 14 soll die Weltkugel durch zwei aufeinander passende Halbkugeln aus Glas dargestellt werden. Der Kosmos ist also begrenzt, die Anschauung in den Pneumatika stimmt somit zu der Lehre, die sich beispielsweise bei KLEOMEDES I 1 S. 2, 12 Z. findet: *(ὁ κόσμος) οὐ μὴν ἄπειρός γε, ἀλλὰ πεπερασμένος ἐστίν.* Im Zentrum der Weltkugel soll sich beim HERONischen Apparate eine kleine Kugel befinden. Das ist der Erdball, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Kosmos zusammenfallen soll. Wir haben es demnach unzweifelhaft

1) *εἰς ὑπόδειγμα τοῦ κόσμου*; *HERONIS Opera* I, S. 222, 13 ed. SCHMIDT (Leipzig 1899).

2) A. DE ROCHAS, *La science des philosophes et l'art des thaumaturges dans l'antiquité.* Paris 1882.

3) Über die HERONische Frage vgl. BURSIANS Jahresber. **129** (1906 I), S. 163—168.

mit dem geozentrischen Weltsystem zu tun. Daß Heron nicht den längst überwundenen Standpunkt der ionischen Naturphilosophen vertritt, zeigt er deutlich in der Schrift über die Dioptra Kap. 35, wo er sich an die Erdmessung des Eratosthenes anschließt, um den Abstand zwischen Alexandreia und Rom als Teil eines der größten Kreise der Erde durch Beobachtung von Mondfinsternissen zu bestimmen. Auch die Erklärung (Pneum. S. 12, 7), wie Tau und Nebel entstehen, setzt das geozentrische System voraus. Dazu stimmt vor allen Dingen der Lehrsatz, der in den Pneumatika I 2 S. 32, 20 angeführt wird: Jede zusammenhängende Flüssigkeit, die in die Ruhelage gekommen ist, nimmt eine kugelförmige Oberfläche an, die mit der Erde denselben Mittelpunkt hat. Hier hat sich Heron an Archimedes angeschlossen, der in der Schrift *περὶ τῶν ὀχουμένων* denselben Lehrsatz aufgestellt und bewiesen hat (vgl. *Archimedis Opera* II 357, 5 ed. Heiberg).

Nun entsteht aber die Frage, wie es bewerkstelligt werden soll, daß die Erdkugel frei im Weltenraume zu schweben scheint. Nach der Anleitung des Textes nehme man einen leichten Ball (*σφαιρίον κοῦφον*), fülle die untere gläserne Halbkugel mit Wasser und werfe den Erdball in das Wasser. Das Wasser ist jedoch hier lediglich Mittel zum Zweck; es ersetzt gewissermaßen die Stützen, um zu verhindern, daß der Erdball herunterfällt. Zum Weltbild gehört das Wasser ebensowenig, als etwa bei einer modernen Darstellung der Kant-Laplaceschen Theorie des Sonnensystems die Flüssigkeit, in der die rotierende Ölkugel schwebt, als Teil des Weltalls betrachtet werden darf.[1]) Des Thales primitive Vorstellung von der schwimmenden Erdkugel ist also erst von den Erklärern in die Stelle der Pneumatika hineingetragen worden; sie ist von der Interpretation dieses Textes, der frühestens um das Jahr 150 vor Chr. entstanden sein kann, fernzuhalten. Ferner muß der schwimmende Ball in der Mitte der beiden Halbkugeln festgehalten werden. Zu diesem Zwecke ist die Bronzeplatte, mit der die obere Halbkugel verschlossen ist, in der Mitte mit einem kreisrunden Loche versehen, das der Größe der Erdkugel entspricht. Wenn dann die obere Halbkugel auf die untere aufgesetzt wird, so kann der Ball weder nach der Seite wegschwimmen, weil die Bronzeplatte ihn daran hindert, noch kann er nach unten fallen, weil das Wasser ihn trägt. Was heißt aber nun *ποσοῦ ὑγροῦ ἐξαιρεθέντος*? Schmidt übersetzt: „Und auch wenn man eine beliebige Quantität Wasser herausnimmt, so bleibt die Kugel doch in der

1) Vgl. Newcomb-Engelmann, *Populäre Astronomie*² (Leipzig 1882), S. 596. Der Plateausche Versuch ist beschrieben und abgebildet bei Wüllner, *Lehrbuch der Experimentalphysik* I⁵ (Leipzig 1895), S. 420, Fig. 133—135.

Mitte sitzen". Zunächst ist die Übersetzung schon sprachlich nicht einwandfrei; denn das Indefinitum *ποσός* hat nicht den Sinn „eine beliebige Quantität", sondern heißt vielmehr „eine gewisse, eine bestimmte Quantität", über die zwar nichts Näheres ausgesagt wird, die aber durch die Umstände bestimmt wird.[1]) Vor allen Dingen sind aber in Hinsicht auf die Sache dem Herausgeber selbst Bedenken aufgestiegen, wenn er Einl. S. XLV fragt: „Was hat die Entnahme von Wasser mit der figürlichen Darstellung des Weltalls zu tun?". Mit dem Weltsystem selbst natürlich nichts, wohl aber mit der praktischen Herstellung des Apparates. Der Grund, warum etwas Wasser herausgenommen wird, wird durch die folgenden Worte angedeutet: *καθέξει τὸ σφαιρίον ὁ ἐν μέσῳ τόπος*, d. h. wenn eine gewisse Quantität der Flüssigkeit aus der unteren Halbkugel herausgenommen worden ist, so wird der in der Mitte ausgesparte Raum die Erdkugel festhalten.[2]) Es kann sich nämlich leicht der Fehler einstellen, daß zuviel Flüssigkeit in der unteren Halbkugel ist. Dann würde der Mittelpunkt der Erde über dem Mittelpunkt des Kosmos liegen. Um dies zu vermeiden, muß man etwas Wasser herausnehmen und so lange probieren, bis das Zentrum des Erdballs mit dem Zentrum des Weltalls genau zusammenfällt. Natürlich muß man dazu die obere Halbkugel wieder abnehmen, um sie nach Regulierung des Wasserstandes von neuem aufzusetzen. Das scheint auch durch den Text angedeutet zu werden, wenn am Schlusse zum zweiten Male versichert wird, daß die obere Halbkugel aufgesetzt werden muß, um das Weltbild zu vollenden. Damit erledigen sich die Vorschläge SCHMIDTS, der oberen Halbkugel vor dem Einsetzen der kleinen Kugel „etwas Luft zu entziehen, so daß die atmosphärische Luft außerhalb der oberen geschlossenen Halbkugel die Kugel in dieselbe hineindrückt". Diese Hilfsannahmen sind bei der soeben begründeten Interpretation überflüssig. Auch die Abbildung in der SCHMIDTschen Ausgabe ist darnach zu berichtigen: Die Erdkugel in Fig. 51 ist zu tief unten; sie muß so weit emporgehoben werden, daß ihr größter Kreis (der Äquator) gerade in der Ebene der Bronzeplatte liegt. Eigentlich müßte also bei SCHMIDT eine bestimmte Menge Wasser hinzugegossen werden, damit die Erde genau im Zentrum des Alls ruht.

Schließlich bedürfen noch die Worte der Einleitung *σφαῖρα διαφανὴς ἔχουσα ἐντὸς ἑαυτῆς ἀέρα καὶ ὑγρόν* einer Erläuterung. Dadurch wird angedeutet, daß das Wasser doch nicht bloß Mittel zum Zweck ist, um

1) Richtig erklärt der Lexikograph STEPHANUS im *Thesaurus*: *ποσός* = aliquantus, certae cuiusdam quantitatis. Vgl. HERON, Pneum. 10, 22; 12, 13; 14, 24. Zahlreiche Belege für diese Bedeutung finden sich z. B. in der Koine des POLYBIOS.

2) Man könnte auch mit einer leichten Änderung *τον ἐν μέσῳ τόπον* schreiben und erklären: „Dann wird der Erdball den Raum in der Mitte inne haben".

den Erdball in der Mitte der Weltkugel zu erhalten. Es spielt freilich nicht die Rolle, die ihm Thales zuschreibt, aber die Flüssigkeit vertritt bei diesem Weltbild die Sphäre des Feuchten (ὑγρόν), gleichwie die in den beiden Hemisphären enthaltene Luft die „Atmosphäre" bezeichnen soll. Der figürlichen Darstellung liegt also eine ähnliche Anschauung zugrunde, wie sie im Anschluß an Aristoteles in dem Proömium der Pneumatika S. 10, 17 ff. auseinandergesetzt wird. Auch in der Aristotelisch-stoischen Schrift *περὶ κόσμου* Kap. 3 wird ausgeführt, wie die fünf Sphären der Erde, des Wassers, der Luft, des Feuers und des Äthers als konzentrische Kugeln um den Mittelpunkt des Weltalls gelagert sind. Natürlich lassen sich durch ein Modell diese freischwebenden Sphären der Elemente nicht darstellen. Man muß sich mit Andeutungen begnügen, wie sie in der Beschreibung bei Heron gegeben werden. Vermutlich konnte man auch innerhalb der oberen Glaskugel beobachten, wie das verdunstete Wasser bei Temperaturschwankungen sich an der Glaswand niederschlug und zu Tropfen verdichtete, ähnlich den Vorgängen in der Atmosphäre. Somit ergibt sich, daß in der Pneumatika nicht etwa, wie Schmidt meint, das Weltbild des Thales dargestellt wird, sondern das geozentrische Weltsystem des Aristoteles und Poseidonios, das nach Unterdrückung des heliozentrischen Systems auf viele Jahrhunderte hinaus kanonische Geltung erlangt hat. Man brauchte nun bloß auf der Himmelskugel die verschiedenen Kreise, die in der Astronomie eine Rolle spielen (Parallelkreise, Kolurkreise), anzudeuten oder einige Sterne einzutragen, und man erhielt eine schematische Darstellung des Weltalls, an der sich manche Grundlehren der Astronomie anschaulich machen ließen. Freilich mit dem erstaunlichen, durch Wasser bewegten Kunstwerk des Archimedes, dessen Sphaira nach der Eroberung von Syrakus die Bewunderung des Marcellus erregte, so daß sie im Tempel der Virtus in Rom aufgestellt wurde, läßt sich die in den Pneumatika beschriebene Vorrichtung nicht vergleichen.[1]) Immerhin lernen wir durch dieses bisher fast unbeachtet gebliebene Weltbild ein Hilfsmittel kennen, das im Altertum beim Unterricht in der Astronomie verwendet worden sein dürfte

Ob freilich die Erfindung oder die Beschreibung des Apparates von Heron selbst herrührt, ist eine andere Frage. Diese figürliche Darstellung des Weltalls hat mit den pneumatischen Apparaten, bei denen der Luft-

1) Zu den Stellen über antike Planetarien, die Hultsch in Pauly-Wissowas *Realenzyklopädie* II 1 unter Archimedes S. 537 und Astronomie S. 1853 gesammelt hat, fügt H. Schöne bei E. Wiedemann, Sitz.-Ber. der phys.-med. Soz. in Erlangen 37 (1905), S. 409 die ausführliche Beschreibung eines astronomischen Uhrwerks aus der nur syrisch erhaltenen *Theophania* des Eusebios hinzu; vgl. *Griech. christl. Schriftst.* III 2 (Leipzig 1904), S. 68 ed. Gressmann.

druck eine Rolle spielt, wenig gemein. Nur mit dem vorhergehenden Kapitel II 6 hängt sie insofern zusammen, als darin ein ähnlicher Apparat beschrieben wird, bei dem man mit Hilfe ausströmender Dämpfe ebenfalls eine kleine Kugel in der Mitte einer größeren Halbkugel schweben lassen kann, und das 6. Kap. seinerseits erinnert an die Ausführungen im Proömium S. 10, 26ff., wo die Dünste, die aus der Erde aufsteigen, hinsichtlich ihrer Entstehung mit den Dämpfen verglichen werden, die aus geheizten Kesseln aufsteigen. Ob sich Heron überhaupt mit astronomischen Fragen eingehend befaßt hat, muß so lange zweifelhaft bleiben, als das rätselhafte Zitat bei Is. Vossius, *Observat. in Catullum* p. 302: „Hero in Astronomicis" nicht aufgeklärt ist.[1] Es ist immerhin möglich, daß das 7. Kap. des II. Buches der Pneumatika, wie Schmidt vermutet, ein späterer Zusatz ist, zumal da auch die überlieferten Worte in mancher Beziehung Bedenken erwecken. Doch kann die Frage, aus welchen Bestandteilen die Heronische Sammlung sich zusammensetzt, nur in größerem Zusammenhange behandelt werden. Übrigens setzt die Aufgabe, zwei genau aufeinander passende Halbkugeln größeren Umfangs aus durchsichtigem Glas herzustellen, eine verhältnismäßig hochentwickelte Technik der Glasfabrikation voraus. Das würde wieder zur Heimat des Heron von Alexandreia stimmen; denn Ägypten hat seinen hohen Ruf hinsichtlich seiner vortrefflichen Glasarbeiten bis in die Kaiserzeit hinein bewahrt.[2]

1) Den Spuren dieses Buchtitels ist F. Boll in der 5. Beilage zu seinem Buche *Sphaera* (Leipzig 1903), S. 480 nachgegangen, wobei er den Buchtitel Herons *περὶ ὀνομάτων ἀστρονομικῶν* endgültig beseitigt.

2) Bestätigt durch Strabon XVI 758. Vgl. H. Blümner, *Technologie und Terminologie der Gewerbe und Künste bei Griechen und Römern* (Leipzig 1886), IV 381, 392

Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik.

Von J. L. Heiberg und H. G. Zeuthen in Köbenhavn.

In der von R. Schöne gefundenen Handschrift der Serailbibliothek, wonach H. Schöne die echten *Μετρικά* Herons herausgegeben hat, finden sich einige neue Beispiele unbestimmter Gleichungen, die in mehreren Beziehungen Beachtung verdienen und geschichtlich höchst wertvoll werden können, wenn es gelingen sollte sie zeitlich festzulegen.

Zum Verständnis der Sachlage sind einige Vorbemerkungen über die Handschrift notwendig (vgl. die Inhaltsangabe bei H. Schöne, Heronis *Opera* III, S. IX).

Der Cod. Constantinopolitanus Palatii veteris Nr. 1, den ich übrigens eher ins XII. als ins XI. Jahrhundert datieren möchte, enthält außer den selbständigen Werken *Διδύμου Ἀλεξανδρέως περὶ παντοίων ξύλων τῆς μετρήσεως* (f. 64—66) und *Ἥρωνος Μετρικά* (f. 67—110) ein byzantinisches Rechenbuch[1]), aus verschiedenen Quellen zusammengestellt. Einige davon sind mit Namen angeführt, aber diesen Überschriften gegenüber ist aus verschiedenen Gründen die größte Vorsicht geboten. Fol. 3ʳ steht über zwei Stücken, die von dem Wesen und der Aufgabe der Geometrie handeln: ***Εὐκλείδου γεωμετρία***, aber auf Rasur mit jüngerer Hand; also stand Euklids Name ursprünglich nicht da, und in der Tat haben die Stücke nicht das geringste mit Euklid zu tun. Jedenfalls gilt die Überschrift nur für diese beiden Stücke; denn auf sie folgt fol. 3ᵛ ein Stück über die in mathematischen Handschriften gebräuchlichen Abkürzungen mit der Überschrift *σημεῖα γεωμετρίας*, das mit den vorhergehenden nichts zu tun hat. Darauf folgt fol. 4ʳ—17ᵛ eine Sammlung planimetrischer und (von fol. 10ᵛ an) stereometrischer Aufgaben, im wesentlichen gleich dem *Liber geeponicus* und *Stereometrica* I bei Hultsch; sie hat weder Überschrift (der Anfangsbuchstabe ist ausgerückt aber nicht illuminiert) noch Spezialtitel. Fol. 17ᵛ—26ʳ folgt mit der Überschrift *Διοφάν(τ)ου[σ]* die

1) Wesentlich gleichartig sind die beiden anderen Haupthss. der von Hultsch herausgegebenen „Heroniana", Paris. 1670 u. Suppl. 387.

Sammlung, die Tannery, Diophanti *Opera* II, S. 15—31 herausgegeben hat; fol. 19^{r} Spezialtitel *μέθοδοι τῶν πολυγώνων* = Tannery, p. 18, 7, fol. 24^{r} nach S. 27, 20 (abweichend) Schlußornament, darauf fol. 24^{v}—25^{r} einige stereometrische Definitionen, die bei Tannery fehlen, fol. 25^{r} *περὶ κυλίνδρου* = Tannery S. 27, 21. Fol. 26^{r} ohne Titel zwei Aufgaben die Kugel betreffend. Fol. 27^{r} mit der Überschrift *Ἥρωνος εἰσαγωγαί Geometria* 106, 1—2 Hultsch, darauf mit Überschrift *περὶ εὐθυμετρικῶν* (wie bei Hultsch S. 139, 18) *Geom.* 106, 3—25, fortgesetzt fol. 27^{r}—28^{v} mit anderen metrologischen Stücken. Fol. 28^{v}—29^{r} nach einem Schlußornament *Geepon.* 78—79, fortgesetzt ohne Unterbrechung oder Überschrift mit neuen planimetrischen Aufgaben in systematischer Ordnung (Rechtecke, rechtwinklige Dreiecke, ein- und umgeschriebene Figuren[1]), Kreis) bis fol. 38^{v} und mit neuen stereometrischen bis fol. 42^{r}. Dann folgt fol. 42^{r}—48^{r} *Stereometrica* II, 1—33 Hultsch mit der Überschrift: *μέτρησις τετραστόου ἤτοι τετρακαμάρου ἐπὶ τετραγώνου βάσεως* (ohne Herons Namen), fortgesetzt fol. 48^{r}—51^{r} mit neuen stereometrischen Aufgaben über Gewölbe. Darauf fol. 51^{r}—53^{v} nach einem Schlußornament *Geepon.* 68 und andere stereometrische Aufgaben (z. B. Vermessung von Schiffen), meist neu, aber auch *Geepon.* 87; fol. 54, nach Ornament und mit Überschrift: *μέτρησις ὄντος σίτου ἐξ ἀποθέσεως*, *Geepon.* 203; nach einem leeren Raum von $1/2$ Seite fol. 55^{r}—61^{r} Aufgaben über Pyramiden, Überschrift: *μέτρησις πυραμίδων*; dann, nach einem Ornament, mit Überschrift: *Εὐκλείδου εὐθυμετρικά*, *Geepon.* 165—90.

Die hier behandelten Aufgaben stehen fol. 28^{v}—31^{v} im Anfang einer namenslosen Sammlung, äußere Kriterien für ihr Alter gibt es also nicht; natürlich sind sie nicht byzantinischen Ursprungs.

Ich gebe den Text nach Constantinopolit., wovon die von Hultsch benutzte Handschrift abhängig ist. Die nutzlosen Figuren der Handschrift lasse ich fort.

1—2 sind hier der Vollständigkeit wegen wiederholt; nach dem etwas geringeren Text der *Geepon.* sind sie behandelt von Cantor, *Agrimens.* S. 62.

1. *Εὑρεῖν δύο χωρία τετράγωνα, ὅπως τὸ τοῦ πρώτου ἐμβαδὸν τοῦ ⟨τοῦ⟩ δευτέρου ἐμβαδοῦ ἔσται τριπλάσιον. ποιῶ οὕτως· τὰ γ̄ κύβισον· γίνονται κζ̄· ταῦτα δίς· γίνονται νδ̄. νῦν ἆρον μονάδα α̅· λοιπὸν γίνονται νγ̄.*

Zu finden zwei viereckige Flächenräume der Art, daß der Rauminhalt des ersteren dreimal so groß ist als der des zweiten. Ich mache so: $3^3 = 27$, $27 \times 2 = 54$, $54 \div 1 = 53$. Es sei also die eine Seite = 53 Fuß, die andere = 54 Fuß. Und den

1) Darunter fol. 34^{v}—35^{v} *Geepon.* 53—58, die auch fol. 7^{v}—8^{v} stehen.

ἔστω οὖν ἡ μὲν μία πλευρὰ ποδῶν νγ, ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ ποδῶν νδ. καὶ τοῦ ἄλλου χωρίου οὕτως· θὲς ὁμοῦ τὰ νγ καὶ τὰ νδ· γίνονται πόδες ρζ· ταῦτα ποίει ἐπὶ τὰ γ· ⟨γίνονται πόδες τκα. ἆρον τὰ γ⟩· λοιπὸν γίνονται πόδες τιη. ἔστω οὖν ἡ τοῦ προτέρου πλευρὰ ποδῶν τιη, ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ ποδῶν γ· τὰ δὲ ἐμβαδὰ τοῦ ἑνὸς γίνεται ποδῶν ϡνδ καὶ τοῦ ἄλλου ποδῶν ,βωξβ.

Inhalt des anderen Flächenraumes so: 53 + 54 = 107 Fuß, 107 × 3 = 321, 321 ÷ 3 = 318 Fuß. Es sei also die eine[1]) Seite = 318 Fuß, die andere = 3 Fuß, und der Rauminhalt des einen = 954 Fuß, der des anderen = 2862 Fuß.

2. *Εὑρεῖν χωρίον χωρίου τῇ περιμέτρῳ ἴσον, τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἐμβαδοῦ τετραπλάσιον. ποιῶ οὕτως· τὰ δ κύβισον ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ξδ· ἆρον μονάδα α· λοιπὸν γίνονται πόδες ξγ· τοσούτου ἑκάστη τῶν περιμέτρων τῶν β παραλλήλων πλευρῶν. διαστεῖλαι οὖν τὰς πλευράς. ποιῶ οὕτως· θὲς τὰ δ· ἆρον μονάδα α· λοιπὸν γ. ἡ μία οὖν πλευρὰ ποδῶν γ. ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ οὕτως· τῶν ξγ ἆρον τὰ γ· λοιπὸν μένουσι πόδες ξ. τοῦ δὲ ἑτέρου χωρίου ποίει οὕτως· τὰ δ ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ις· ἀπὸ τούτων ἆρον μονάδα α· λοιπὸν γίνονται πόδες ιε. τοσούτων ἔστω ἡ πρώτη πλευρά, ποδῶν ιε. ἡ δὲ ἑτέρα πλευρὰ οὕτως· ἆρον τὰ ιε τῶν ξγ· λοιπὸν γίνονται πόδες μη. ἔστω ἡ ἄλλη πλευρὰ ποδῶν μη. τὸ δὲ ἐμβαδὸν τοῦ ἑνὸς ποδῶν ψκ καὶ τοῦ ἄλλου ποδῶν ρπ.*

Zu finden einen Flächenraum, dessen Umkreis dem eines anderen gleich ist, der Rauminhalt aber 4 mal so groß. Ich mache so: 4^3 = 64 Fuß, 64 ÷ 1 = 63 Fuß; so viel ist jeder Umkreis aus 2 der parallelen Seiten zusammengesetzt. Man hat dann die Seiten zu sondern. Ich mache so: 4 ÷ 1 = 3; die eine Seite ist also = 3 Fuß. Die andere Seite so: 63 ÷ 3 = 60 Fuß. Bei dem anderen Flächenraum mache so: 4 × 4 = 16 Fuß, 16 ÷ 1 = 15 Fuß; so viel sei die erste Seite, also = 15 Fuß. Die andere Seite so: 63 ÷ 15 = 48 Fuß; es sei die andere Seite = 48 Fuß. Der Rauminhalt aber des einen ist = 720 Fuß, der des anderen = 180 Fuß.

1) Statt τοῦ προτέρου ist προτέρα zu schreiben.

3. *Χωρίον τετράγωνον ἔχον τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν ωϙϛ· διαχωρίσαι τὸ ἐμβαδὸν ἀπὸ τῆς περιμέτρου. ποιῶ οὕτως· ἔκθου καθολικῶς μονάδας δ· ὧν ∟'· γίνονται πόδες β. ταῦτα ποίησον ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες δ. σύνθες ἄρτι μετὰ τῶν ωϙϛ· ὁμοῦ γίνονται πόδες ϡ· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν λ· καὶ ἀπὸ τῶν δ ὕφειλον τὸ ∟'· γίνονται πόδες β· λοιπὸν γίνονται πόδες κη· τὸ οὖν ἐμβαδόν ἐστιν ποδῶν ψπδ, καὶ ἡ περίμετρος ἔστω ποδῶν ριβ. ὁμοῦ σύνθες ἄρτι τὰ πάντα· γίνονται πόδες ωϙϛ· τοσούτων ἔστω τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου, ποδῶν ωϙϛ.*

Ein Quadrat, dessen Rauminhalt + Umkreis = 896 Fuß; den Rauminhalt vom Umkreis zu sondern. Ich mache so: allgemein $1/2 \times 4 = 2$ Fuß, $2 \times 2 = 4$ Fuß. $4 + 896 = 900$ Fuß, $\sqrt{900} = 30$ Fuß; $1/2 \times 4 = 2$ Fuß, 4 ∸ 2 = 2 Fuß, ⟨30 ∸ 2⟩ = 28 Fuß; ⟨so viel die Seite⟩. Der Rauminhalt ist also = 784 Fuß, und der Umkreis [sei] 112 Fuß. $784 + 112 = 896$ Fuß. So viel sei also der Rauminhalt + der Umkreis, nämlich 896 Fuß.[1])

4. *Τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἔστω ἡ περίμετρος ποδῶν ν· διαχωρίσαι τὰς πλευρὰς ἀπ' ἀλλήλων. ποιῶ οὕτως κατὰ τὴν Πυθαγορικὴν μέθοδον· ἐπεί ἐστι τὸ παρὰ Πυθαγόρου πρῶτον τρίγωνον ὀρθογώνιον ηὑρημένον τὸ γ' δ' ε', ποίει[2]) κοινωνοὺς ⟨τοὺς⟩ γ· ὁ πρῶτος ποδῶν γ, ὁ δεύτερος ποδῶν δ, ὁ γ' ποδῶν ε· κοινὰ δὲ αὐτοῖς τὰ πάντα ἔστω ποδῶν ν. ἔστω[3]) οὖν τῷ μὲν πρώτῳ ποδῶν ιβ ∟', τῷ ⟨δὲ⟩ δευτέρῳ ποδῶν ιϛ B, τῷ δὲ τρίτῳ ποδῶν κ∟'γ'. ὁμοῦ ἔστω τὰ πάντα ποδῶν ν, ὅ ἐστι περίμετρος τοῦ τριγώνου.*

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Umkreis = 50 Fuß; die Seiten voneinander zu sondern. Ich mache so nach der Pythagoreischen Methode: da das von PYTHAGORAS zuerst gefundene rechtwinklige Dreieck das mit den Seiten 3, 4, 5 ist, mache diese drei Zahlen zu Faktoren; der erste sei 3 Fuß, der zweite 4 Fuß, der dritte 5 Fuß; die Summe des Ganzen aber sei = 50 Fuß. Es sei also die erste Seite = $12\frac{1}{2}$ Fuß, die zweite = $16\frac{2}{3}$ Fuß, die dritte = $20\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ Fuß. Zusammen = 50 Fuß, was Umkreis des Dreiecks ist.[4])

1 3 enthält die Auflösung der unreinen quadratischen Gleichung $x^2 + 4x \dot{-} 896 = 0$, und ist nur mitgenommen, weil sie in der Hs. hier steht. Der mißverständlich formulierte Schluß muß ursprünglich als Probe gemeint sein.

2) ε', ποίει] ἐποίει Hs.

3) Entweder muß ἔστωσαν und πόδες (3 mal) gelesen werden oder τὸ . . . πρῶτον, τὸ . . . δεύτερον, τὸ . . . τρίτον.

4) $3x + 4x + 5x = 12x = 50 \quad x = 4\frac{1}{6}$.

5. *Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν ε· εὑρεῖν τὰς πλευράς. ποιῶ οὕτως· σκέψαι τὰ ε ἐπί τινα ἀριθμὸν τετράγωνον ἔχοντα ϛ, ἵνα πολυπλασιασθέν⟨τα⟩ τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν*[1] *ποιήσῃ. πολυπλασιασθέντα δὲ ἐπὶ τὸν λϛ γίνονται πόδες ρπ, καὶ ἔσται τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδόν, οὗ ἐστιν ἡ κάθετος ποδῶν θ, ἡ δὲ βάσις ποδῶν μ, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ποδῶν μα. καὶ τὰ ρπ μερίζω παρὰ τὸν*[2] *ε, καὶ λϛ ἐστιν, μήκει δὲ ἕξ.*[3] *λαβὲ τὸ ϛ' τῶν πλευρῶν, τουτέστι τῶν θ· γίνονται πόδες α∟'· καὶ τῶν μ τὸ ϛ'· γίνονται πόδες ϛ B ἡ βάσις· καὶ τῶν μα τὸ ϛ'· γίνονται πόδες ϛ ∟' γ' ἡ ὑποτείνουσα. τὸ οὖν ἐμβαδὸν ποδῶν ε.*

Der Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks = 5 Fuß; zu finden die Seiten. Ich mache so: suche das Produkt von 5 und einer Quadratzahl, die 6 enthält, derart, daß es den Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks bilden kann. Es ist $5 \times 36 = 180$ Fuß, was der Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen Kathete = 9 Fuß, die Grundlinie = 40 Fuß, die Hypotenuse = 41 Fuß. $180 : 5 = 36$, $\sqrt{36} = 6$. Nimm $^1/_6$ der Seiten, $^1/_6 \times 9 = 1^1/_2$ Fuß, $^1/_6 \times 40 = 6^2/_3$ Fuß, die Grundlinie, $^1/_6 \times 41 = 6^1/_2{}^1/_3$, die Hypotenuse. Der Rauminhalt folglich = 5 Fuß.

6. *Τρίγωνον ὀρθογώνιον, οὗ ἡ κάθετος ποδῶν ιβ, ἡ δὲ βάσις ποδῶν ιϛ, ἡ δὲ ὑποτείνουσα ποδῶν κ· γίνεται τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν ϟϛ· ταῦτα μερίσαι εἰς ἄνδρας ιϛ ἑκάστῳ πόδας ϛ ἐν ὀρθογωνίοις τριγώνοις. ποιῶ οὕτως· μέρισον τὸν*[4] *ϟϛ εἰς ϛ· γίνονται πόδες ιϛ· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν δ. ἄρτι λαμβάνω τῆς καθέτου τὸ δ'· γίνονται πόδες γ· καὶ τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες δ· καὶ τῆς ὑποτεινούσης τὸ δ'· γίνονται πόδες ε· καὶ ἔσται ιϛ τρίγωνα ἔχοντα τὴν μὲν κάθετον ποδῶν γ, τὴν δὲ βάσιν ποδῶν δ, τὴν δὲ ὑποτείνουσαν ποδῶν ε, τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν ϛ.*

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete = 12 Fuß, die Grundlinie = 16 Fuß, die Hypotenuse = 20 Fuß; der Rauminhalt = 96 Fuß; dies an 16 Männer zu verteilen; jedem 6 Fuß in der Gestalt rechtwinkliger Dreiecke. Ich mache so: $96 : 6 = 16$ Fuß, $\sqrt{16} = 4$ Fuß. $^1/_4$ der Kathete = 3 Fuß, $^1/_4$ der Grundlinie = 4 Fuß, $^1/_4$ der Hypotenuse = 5 Fuß; und es entstehen 16 Dreiecke, deren Kathete = 3 Fuß, die Grundlinie = 4 Fuß, die Hypotenuse = 5 Fuß, und der Rauminhalt = 6 Fuß.

1) τοῦ ἐμβαδοῦ Hs. 2) τῶν Hs. 3) ἑξαπλασίονα Hs.
4) τῶν Hs.

7. Τρίγωνον ὀρθογώνιον[1]), οὗ ἡ κάθετος ποδῶν ιβ [τὸ ἐμβαδὸν ϙϛ]· εὑρεῖν αὐτοῦ τὴν βάσιν καὶ τὴν ὑποτείνουσαν. ποιῶ οὕτως· προστιθῶ τοῖς ιβ τῆς καθέτου τὸ γ'· γίνονται πόδες δ· ὁμοῦ γίνονται πόδες ιϛ· τοσούτων ἔστω ἡ βάσις, ποδῶν ιϛ. πάλιν προστιθῶ τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες δ· ὁμοῦ γίνονται πόδες κ· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν κ. τὸ ἐμβαδὸν ἔστω ποδῶν ϙϛ.

Ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Kathete = 12 Fuß [der Rauminhalt = 96]; zu finden dessen Grundlinie und Hypotenuse. Ich mache so: $^1/_3 \times 12$ der Kathete = 4 Fuß, 12 + 4 = 16 Fuß; so viel sei die Grundlinie, nämlich = 16 Fuß. $^1/_4$ der Grundlinie = 4 Fuß, 16 + 4 = 20 Fuß; es sei die Hypotenuse = 20 Fuß. Der Rauminhalt sei = 96 Fuß.

8. Ἐὰν δὲ τριγώνου ὀρθογωνίου δοθείσης τῆς βάσεως ποδῶν κδ ζητοῦμεν τὴν κάθετον καὶ τὴν ὑποτείνουσαν, ποιῶ οὕτως· ὕφειλον τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες ϛ· λοιπὸν μένουσι πόδες ιη· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν ιη. πάλιν πρόσθες τῆς βάσεως τὸ δ'· γίνονται πόδες ϛ· ὁμοῦ πρόσθες τῇ βάσει· γίνονται πόδες λ· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν λ. τὸ ἐμβαδὸν ποδῶν σιϛ.

Wenn wir aber in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Grundlinie gegeben ist = 24 Fuß, die Kathete und die Hypotenuse suchen, mache ich so: $^1/_4$ der Grundlinie = 6 Fuß, 24 ÷ 6 = 18 Fuß; es sei die Kathete = 18 Fuß. Wiederum $^1/_4$ der Grundlinie = 6 Fuß, 24 der Grundlinie + 6 = 30 Fuß; es sei die Hypotenuse = 30 Fuß. Der Rauminhalt = 216 Fuß.

9. Ἐὰν δὲ θέλῃς ἀπὸ τῆς ὑποτεινούσης εὑρεῖν τὴν βάσιν καὶ τὴν κάθετον, ποίει οὕτως· ἐάν ἐστιν ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν λ, ὕφειλον τὸ ε' μέρος τῶν λ· γίνεται ϛ· λοιπὸν μένουσι πόδες κδ· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν κδ. πάλιν ἀπὸ τῶν κδ ποδῶν τῆς βάσεως ὕφειλον τὸ δ'· γίνονται πόδες ϛ· λοιπὸν μένουσι πόδες ιη· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν ιη. τὸ δέ ἐμβαδὸν ποδῶν σιϛ.

Wenn du aber aus der Hypotenuse die Grundlinie und die Kathete finden willst, mache so: wenn die Hypotenuse = 30 Fuß, nimm $^1/_5 \times 30 = 6$, 30 ÷ 6 = 24 Fuß; es sei die Grundlinie = 24 Fuß. Wiederum $^1/_4$ der Grundlinie = 6 Fuß, 24 ÷ 6 = 18 Fuß; es sei die Kathete = 18 Fuß. Der Rauminhalt aber ist = 216 Fuß.

1) τριγώνου ὀρθογωνίου Hs.

10. Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν σπ· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ εὑρεῖν τὸ ἐμβαδόν. ποιῶ οὕτως· ἀεὶ ζήτει τοὺς ἀπαρτίζοντας ἀριθμούς, ἀπαρτίζει δὲ τὸν σπ ὁ δίς[1]) τὸν ρμ, ὁ δ' τὸν ο, ὁ ε' τὸν νς, ὁ ζ' τὸν μ, ὁ η' τὸν λε, ὁ ι' τὸν κη, ὁ ιδ' τὸν κ. ἐσκεψάμην, ὅτι ὁ η καὶ λε ποιήσουσι[2]) τὸ δοθὲν ἐπίταγμα. τῶν σπ τὸ η' γίνεται πόδες λε. διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν η· λοιπὸν μένουσιν ς πόδες. τὰ οὖν λε καὶ τὰ ς ὁμοῦ γίνονται πόδες μα· ταῦτα ποίει ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ,αχπα. τὰ λε ἐπὶ τὰ ς· γίνονται πόδες σι· ταῦτα ποίει ἀεὶ τὰ η· γίνονται πόδες ,αχπ· ταῦτα ἆρον ἀπὸ τῶν ,αχπα· λοιπὸν μένει α· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται α. ἄρτι θὲς τὰ μα καὶ ἆρον μονάδα α· λοιπὸν μ· ὧν ∟' γίνεται κ· τοῦτό ἐστιν ἡ κάθετος, ποδῶν κ. καὶ θὲς πάλιν τὰ μα καὶ πρόσθες α· γίνονται πόδες μβ· ὧν ∟' γίνονται πόδες κα· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν κα. καὶ θὲς τὰ λε καὶ ἆρον τὰ ς· λοιπὸν μένουσι πόδες κθ. ἄρτι θὲς τὴν κάθετον ἐπὶ τὴν βάσιν· ὧν ∟' γίνονται πόδες σι. καὶ αἱ τρεῖς πλευραὶ περιμετρούμεναι ἔχουσι πόδας ο· ὁμοῦ σύνθες μετὰ τοῦ ἐμβαδοῦ· γίνονται πόδες σπ.

Der Rauminhalt eines rechtwinkligen Dreiecks + der Umkreis = 280 Fuß; die Seiten auszusondern und den Rauminhalt zu finden. Ich mache so: suche immer die Faktoren, und es ist $280 = 2 \times 140 = 4 \times 70 = 5 \times 56 = 7 \times 40 = 8 \times 35 = 10 \times 28 = 14 \times 20$. Ich finde, daß 8 und 35 die Forderung erfüllen werden. $\frac{1}{8} \times 280 = 35$ Fuß. Nimm immer $8 \div 2 = 6$ Fuß. $35 + 6 = 41$ Fuß, $41 \times 41 = 1681$ Fuß. $35 \times 6 = 210$ Fuß, immer $210 \times 8 = 1680$ Fuß, $1681 \div 1680 = 1$, $\sqrt{1} = 1$. Darauf $41 \div 1 = 40$, $\frac{1}{2} \times 40 = 20$; dies ist die Kathete, $= 20$ Fuß. Hinwiederum $41 + 1 = 42$ Fuß, $\frac{1}{2} \times 42 = 21$ Fuß; es sei die Grundlinie $= 21$ Fuß. $35 \div 6 = 29$ Fuß. Nimm dann Kathete $\times$ Grundlinie, davon $\frac{1}{2} = 210$ Fuß. Und die drei Seiten herumgemessen betragen 70 Fuß; $70 +$ Rauminhalt $= 280$ Fuß.

11. Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν

In einem rechtwinkligen Dreieck Rauminhalt + Umkreis = 270 Fuß;

1) σπ tilgt Hs., ὁ δίς] διακοσιοστοόγδοηκοστοδυας Hs.

2) ποιήσωσι Hs

σο· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν. ποιῶ οὕτως· ἀεὶ ζήτει τοὺς ἀπαρτίζοντας ἀριθμούς, ὡς καὶ ἐπὶ τοῦ πρώτου· ἀπαρτίζει [μονάδας] τὸν σο ὁ δὶς τὸν[1]) ρλε, ὁ γ' τὸν[2]) ϙ, ὁ ε' τὸν[2]) νδ, ὁ ς' τὸν[2]) με, ὁ θ' τὸν[2]) λ, ὁ ι' τὸν[2]) κζ. ἐσκεψάμην, ὅτι ς καὶ με ποιήσει τὸ ἐπιταχθέν. τὸ ς' τῶν σο· γίνονται με πόδες. διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν ς· λοιπὸν δ· τὰ με καὶ τὰ δ ὁμοῦ σύνθες· γίνονται μθ. ταῦτα ποιήσομεν ἐφ' ἑαυτά· γίνονται πόδες ,βυα· καὶ τὰ με ποίησον ἐπὶ τὰ δ· γίνονται πόδες ρπ. ταῦτα διὰ παντὸς ποίει ἐπὶ τὰ η· γίνονται πόδες ,αυμ· ἆρον αὐτὰ ἀπὸ τῶν ,βυα· λοιπὸν μένουσιν ⫛ξα· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν λα. ἄρτι θὲς τὰ μθ καὶ ἆρον τὰ λα· γίνονται πόδες ιη· ὧν ∟' γίνονται πόδες θ· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν θ. καὶ θὲς τὰ μθ καὶ τὰ λα· ὁμοῦ π γίνονται πόδες· ὧν ∟' γίνεται μ· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν μ. καὶ θὲς τὰ με καὶ ἆρον τὰ δ· λοιπὸν μένουσι πόδες μα· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν μα. τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν ρπ. ἄρτι σύνθες ὁμοῦ τὰς γ πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν· γίνονται πόδες σο.

die Seiten und den Rauminhalt auszusondern. Ich mache so: suche immer die Faktoren, wie auch in dem ersten Beispiel; es ist $270 = 2 \times 135 = 3 \times 90 = 5 \times 54 = 6 \times 45 = 9 \times 30 = 10 \times 27$. Ich finde, daß 6 und 45 die Forderung erfüllen werden. $^1/_6 \times 270 = 45$ Fuß. Nimm immer $6 \div 2 = 4$; $45 + 4 = 49$, $49 \times 49 = 2401$ Fuß; $45 \times 4 = 180$ Fuß; immer $8 \times 180 = 1440$ Fuß; $2401 \div 1440 = 961$, $\sqrt{961} = 31$ Fuß. Darauf $49 \div 31 = 18$ Fuß, $^1/_2 \times 18 = 9$ Fuß; es sei die Kathete = 9 Fuß. Ferner $49 + 31 = 80$ Fuß, $^1/_2 \times 80 = 40$; es sei die Grundlinie = 40 Fuß. Ferner $45 \div 4 = 41$ Fuß; es sei die Hypotenuse = 41 Fuß. Und der Rauminhalt = 180 Fuß. Addiere dann die 3 Seiten und den Rauminhalt; gibt 270 Fuß.

12. Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν ρ· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν. ποίει οὕτως· σκέπτου τὸν ἀπαρτίζοντα ἀριθ-

In einem rechtwinkligen Dreieck der Rauminhalt + der Umkreis = 100 Fuß; die Seiten und den Rauminhalt auszusondern. Mache so: untersuche die Faktoren; ich

1) τῶν σο δυὰς τῶν Hs. 2) $\overset{o}{\pi}$ Hs

μόν· ἐσκεψάμην, ὅτι ὁ ε καὶ ὁ κ τὸ ἐπιταχθὲν ποιήσουσιν. τὸ ε' τῶν ρ γίνονται πόδες κ. διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν ε· λοιπὸν μένουσι γ. τὰ οὖν γ καὶ τὰ κ σύνθες· γίνονται πόδες κγ· ταῦτα ἐφ' ἑαυτά· γίνονται φκθ· καὶ τὰ κ ποίησον ἐπὶ τὰ γ· γίνονται πόδες ξ· ταῦτα διὰ παντὸς ἐπὶ τὰ η· γίνονται πόδες υπ· ἆρον ἀπὸ τῶν φκθ· λοιπὸν μένουσι[1]) πόδες μθ· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν ζ· λοιπὸν μένουσι ιϛ· ὧν ∟' γίνεται η· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν η. θὲς πάλιν τὰ κγ καὶ πρόσθες τὰ ζ· ὁμοῦ γίνονται πόδες λ· ὧν ∟' γίνεται ιε· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν ιε. καὶ θὲς[2]) τὰ κ καὶ ἆρον τὰ γ· λοιπὸν μένουσι πόδες ιζ· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν ιζ. τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν ξ. ὁμοῦ σύνθες τὰς γ πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν· γίνονται πόδες ρ.

finde, daß 5 und 20 die Forderung erfüllen werden. $\frac{1}{5} \times 100 = 20$ Fuß. Nimm immer $5 \div 2 = 3$. $3 + 20 = 23$ Fuß, $23 \times 23 = 529$. Ferner $20 \times 3 = 60$ Fuß; immer $60 \times 8 = 480$ Fuß; $529 \div 480 = 49$ Fuß; $\sqrt{49} = 7$ Fuß, $\langle 23 \div 7 \rangle = 16$, $\frac{1}{2} \times 16 = 8$; es sei die Kathete $= 8$ Fuß. Wiederum $23 + 7 = 30$ Fuß, $\frac{1}{2} \times 30 = 15$; es sei die Grundlinie $= 15$ Fuß. Ferner $20 \div 3 = 17$ Fuß; es sei die Hypotenuse $= 17$ Fuß. Der Rauminhalt aber $= 60$ Fuß. Addiere die 3 Seiten und den Rauminhalt; gibt 100 Fuß.

13. Τριγώνου ὀρθογωνίου τὸ ἐμβαδὸν μετὰ τῆς περιμέτρου ποδῶν ϙ· ἀποδιαστεῖλαι τὰς πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν. ποιῶ οὕτως· ἐσκεψάμην, ὅτι ὁ ε καὶ ὁ ιη[2]) ποιήσει τὸ ἐπιταχθέν, οὕτως· τὸ ε' τῶν ϙ γίνονται πόδες ιη· διὰ παντὸς λάμβανε δυάδα τῶν ε· μένουσι γ. σύνθες τὰ ιη καὶ τὰ γ· γίνονται πόδες κα. ταῦτα ἐπὶ τὰ γ· γίνονται πόδες νδ.[3]) ταῦτα πάντοτε ποίει ἐπὶ τὰ η· γίνονται πόδες υλβ. ταῦτα ἆρον ἀπὸ τῶν υμα· λοι-

In einem rechtwinkligen Dreieck der Rauminhalt + der Umkreis $= 90$ Fuß; die Seiten und den Rauminhalt auszusondern. Ich mache so: ich finde, daß 5 und 18 die Forderung erfüllen werden, folgendermaßen: $\frac{1}{5} \times 90 = 18$ Fuß. Nimm immer $5 \div 2 = 3$. $18 + 3 = 21$, $\langle 21 \times 21 = 441 \rangle$. $18 \times 3 = 54$ Fuß. Nimm immer $8 \times 54 = 432$ Fuß. $441 \div 432 = 9$, $\sqrt{9} = 3$ Fuß. Ferner $21 \div 3 = 18$, $\frac{1}{2} \times 18 = 9$ Fuß; es sei die Kathete $= 9$ Fuß. Wiederum $21 + 3 = 24$ Fuß, $\frac{1}{2} \times 24 = 12$; es sei die

1) μένει Hs. 2) ἡ Hs. 3) ξδ Hs.

πὸν θ· ὧν πλευρὰ τετραγωνικὴ γίνεται ποδῶν γ. θὲς τὰ κα καὶ ἆρον τὰ γ· λοιπὸν ιη· ὧν L' γίνονται πόδες θ· ἔστω ἡ κάθετος ποδῶν θ. καὶ θὲς πάλιν τὰ κα καὶ πρόσθες τὰ γ· ὁμοῦ γίνονται πόδες κδ· ὧν L' γίνεται ιβ· ἔστω ἡ βάσις ποδῶν ιβ. καὶ θὲς πάλιν τὰ ιη καὶ ἆρον τὰ γ· λοιπὸν ιε· ἔστω ἡ ὑποτείνουσα ποδῶν ιε. τὸ δὲ ἐμβαδὸν ποδῶν νδ. ὁμοῦ σύνθες τὰς γ πλευρὰς καὶ τὸ ἐμβαδόν· γίνονται πόδες ϙ.

Grundlinie 12 Fuß. Wiederum 18 ÷ 3 = 15; es sei die Hypotenuse = 15 Fuß. Und der Rauminhalt ist = 54 Fuß. Addiere die 3 Seiten und den Rauminhalt; gibt 90 Fuß.

J. L. Heiberg.

Kommentar.

Ich fange den Kommentar mit Bemerkungen über die einzelnen Aufgaben und ihre Lösungen an.

1 und **2** sind, wie es in einer die Übersetzung begleitenden Note schon bemerkt ist, früher publiziert und von Cantor berücksichtigt. Später sind sie auch von P. Tannery behandelt.[1]) Diese Herren nehmen beide eine Lücke in **1** an, die P. Tannery mit den unten gesperrten Wörtern ausfüllt:

Zu finden zwei viereckige Flächenräume der Art, daß der Umkreis des zweiten dreimal so groß ist als der des ersten, und daß der Rauminhalt des ersteren usw.

Auch Cantor faßt die Aufgabe so auf, was ganz mit der Auflösung stimmt. Im vorliegenden neuen Text fehlen zwar die Andeutungen einer solchen Lücke. Dadurch ist aber die Aufgabe so unbestimmt geworden, daß man gar nicht begreifen würde, warum sie eine so ausführliche Lösung fordert. Cantors und Tannerys Ausfüllung ist daher sicher richtig. Weiter ist die Zahl 3 — wie 4 in der Aufgabe 2 — für eine willkürliche Zahl gesetzt, was man daran sieht, daß die Rechnungen mit den so gewählten Zahlen so beschrieben werden, daß sie unmittelbar durch beliebige Zahlen ersetzt werden können. Die Aufgabe ist also dieselbe, die wir durch die in x, y, u, v unbestimmten Gleichungen:

---

1) Mémoires de la soc. des sc. de Bordeaux 4_2 (1882).

$$(1)\qquad \begin{cases} u + v = n(x + y), \\ xy = n \cdot uv \end{cases}$$

ausdrücken würden.

Die im Text gegebene Lösung ist die folgende

$$(2)\qquad \begin{cases} x = 2n^3 - 1, \quad y = 2n^3, \\ u = n(4n^3 - 2), \quad v = n. \end{cases}$$

Wie sich ebendiese Auflösung darbieten konnte, wird durch die folgenden Betrachtungen verständlich.

Da die Aufgabe unbestimmt ist, kann man mit einem Versuch anfangen. Nahe liegt es dann, den Wert $v = n$ zu probieren, der wegen der ersten Gleichung (1) mit sich führt, daß u ein Multiplum von n sein muß, also $u = nz$. Dann hat man

$$x + y = 1 + z,$$

$$xy = n^3 z,$$

woraus

$$xy = n^3(x + y) - n^3$$

oder

$$(x - n^3)(y - n^3) = n^3(n^3 - 1).$$

Eine in die Augen springende Lösung dieser Aufgabe ist

$$x - n^3 = n^3 - 1, \quad y - n^3 = n^3,$$

die eben die oben mitgeteilte ist. Die der Kürze halber hier durch Formeln ausgedrückten Operationen ließen sich leicht in Worten ausdrücken.

2. Hier sind die Gleichungen

$$(1)\qquad \begin{cases} x + y = u + v \\ xy = n \cdot uv \end{cases}$$

zu lösen. Die gegebene Lösung ist die folgende:

$$(2)\qquad x + y = u + v = n^3 - 1,$$

$$(3)\qquad \begin{cases} u = n - 1, \quad v = n(n^2 - 1), \\ x = n^2 - 1, \quad y = n^2(n - 1). \end{cases}$$

Hier mag man etwa die folgende Lösung der zweiten Gleichung (1) probiert haben:

$$v = nx, \quad y = n^2 u.$$

Die erste Gleichung gibt dann

$$(n - 1)x = (n^2 - 1)u,$$

die durch $x = n^2 - 1$, $u = n - 1$ lösbar ist.

Eine solche Herleitung macht es verständlich, daß eine Lösung aufgestellt ist, wo die Größen x, y, u, v einen ganz bestimmten gemeinschaftlichen Faktor, nämlich $(n - 1)$, enthalten, die sich durch einen will-

kürlichen Faktor a ersetzen ließe, wodurch man die allgemeinere Lösung finden würde[1]):

$$u = a, \quad v = n(n+1)a, \quad x = (n+1)a, \quad y = n^2 a.$$

Diese Auflösung ist doch nicht die allgemeine, die man dagegen erhalten würde, wenn man statt $v = nx$ zu setzen, dem Verhältnis $v:x$ einen beliebigen Wert m beilegt. Dann gibt die zweite Gleichung (1)

$$v = mx, \; y = mnu$$

und demnächst die erste

$$(m-1)x = (mn-1)u.$$

Die allgemeine Auflösung ist also

$$\frac{x}{mn-1} = \frac{y}{mn(m-1)} = \frac{u}{m-1} = \frac{v}{m(mn-1)},$$

wo doch das Verhältnis m nicht nur ganze, sondern auch gebrochene Werte annehmen kann.

3 enthält nur die Lösung einer gemischten quadratischen Gleichung und **4** eine einfache Benutzung der Verhältnisse $3:4:5$ der Seiten eines „pythagoreischen" rechtwinkligen Dreiecks.

5. Es werden hier rationale Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit gegebener Fläche A gesucht. Dies wird dadurch erzielt, daß man es versucht durch Multiplikation von A mit einem Quadrat m^2, die einer Multiplikation der Seiten mit m entspricht, die Seiten durch ganze Zahlen auszudrücken. Es wird außerdem vorgeschrieben, daß m^2 den Faktor 6 enthalten muß (was nicht schon mit dem aufgegebenen Wert von A der Fall ist). Diese Vorschrift zeigt, daß der Urheber der Aufgabe gewußt hat, daß die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten durch ganze Zahlen ausgedrückt sind, durch 6 teilbar ist. Die Richtigkeit dieses Satzes folgt aus der allgemeinen Euklidischen Bestimmung der Seiten eines solchen Dreiecks[2]), nämlich

$$x = a \cdot mn, \quad y = a\frac{m^2 - n^2}{2}, \quad z = a\frac{m^2 + n^2}{2},$$

wo a eine beliebige Zahl ist, m und n Zahlen, die beide gerade oder beide ungerade sind. Die Fläche dieses Dreiecks wird durch

$$a^2 \frac{mn(m-n)(m+n)}{4}$$

1) Vgl. Cantor, *Agrimensoren* p. 194—195 (Note 116), wo auch auf die spätere Behandlung derselben Aufgabe in dem Rechenbuch des Maximus Planudes (ed. C. J. Gerhardt, 1865) hingewiesen wird.

2) Euklid X, 28 Lemma 1.

ausgedrückt, wo der Zähler durch 24 teilbar ist.[1]) Daß er durch 8 teilbar ist, ist nämlich offenbar, wenn m und n gerade sind. Dasselbe ist der Fall, wenn m und n ungerade sind; denn die Zahlen $m - n$ und $m + n$ sind dann durch 2 teilbar, und weil ihr Unterschied $2n$ nicht durch 4 teilbar ist, muß die eine Zahl es sein[2]); und wenn weder m noch n durch 3 teilbar ist, sieht man durch Betrachtung der verschiedenen Fälle $m = 3r \pm 1$, $n = 3s \pm 1$, daß entweder $m - n$ oder $m + n$ durch 3 teilbar ist.

Es wäre vielleicht denkbar, daß der Urheber der Aufgabe die Richtigkeit des hier genannten Satzes nur für eine einzelne Klasse rationaler, rechtwinkliger Dreiecke kannte, und zwar für diejenigen, die nach der dem Pythagoras beigelegten Regel (das heißt für $n = 1$) gebildet sind. Dieser Klasse gehört nämlich das in dem hier vorliegenden numerischen Beispiel gefundene Dreieck. Von dieser Möglichkeit dürfen wir doch absehen, da dieselbe Regel in **10—13** auch zur Entdeckung rationaler, rechtwinkliger Dreiecke, die nicht alle dieser Klasse gehören, Anwendung gefunden zu haben scheint.

6. Einfache Anwendung des Satzes über das Verhältnis der Flächen ähnlicher Dreiecke.

7—9. Einfache Anwendungen der Verhältnisse $3:4:5$ der Seiten gewisser rechtwinkliger Dreiecke. Die eingeklammerten Worte in **7** werden bei der Lösung nicht benutzt, und Entsprechendes fehlt in **8** und **9**.

10—13 enthalten 4 verschiedene numerische Beispiele derselben geometrischen Aufgabe. Diese Aufgabe und ihre Auflösung beruhen auf folgenden Formeln, wo a und b die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, c seine Hypotenuse, T seine Fläche, r den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises bedeuten, und wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$:

$$T = rs = \frac{1}{2}ab, \quad r + s = a + b, \quad c = s - r.$$

Die Beweise dieser Formeln knüpfen sich leicht an dieselbe Figur, wodurch die „Heronische“ Dreiecksformel bewiesen wird.[3])

Die in **10—13** gelöste Aufgabe ist jedoch dadurch komplizierter gemacht, daß nicht eine der hier bezeichneten Größen, sondern die

1) Dasselbe hat später Leonardo Pisano bewiesen, um einen anderen Gebrauch davon zu machen [*Scritti*, ed. B. Boncompagni II (1862), p. 264].

2) Bei dieser Untersuchung hat man solche Distinktionen wie diejenige unter „*nur* gerad-ungeraden“ Zahlen, das heißt von der Form $4r + 2$ (Euklid IX, 33), und „sowohl gerad-geraden als gerad-ungeraden“ Zahlen, das heißt von der Form $8r + 4$ (Euklid IX, 34), brauchen können. Vielleicht in Anschluß an Pythagoreische Definitionen drückt Nikomachos diesen Unterschied durch andere Benennungen aus (siehe Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, p. 198—199).

3) Herons *Vermessungslehre* (herausg. v. Schöne), p. 20—21.

Summe der Fläche und des Perimeters gegeben ist. Nennen wir diese Summe, der nur in den verschiedenen Aufgaben verschiedene numerische, ganzzahlige Werte beigelegt werden, A, hat man

$$T + 2s = s(r + 2) = A.$$

Da man nur rationale rechtwinklige Dreiecke, und hier besonders solche mit ganzzahligen Seiten, sucht, gilt es jetzt, A so in zwei Faktoren s und $r + 2$ zu zerlegen, daß rs die Fläche eines solchen Dreiecks werde. Man zerlegt dann A auf alle mögliche Weisen in zwei ganzzahlige Faktoren und probiert nachher die so erhaltenen Zahlenpaare. Das erste Probemittel, das man wahrscheinlich auch hier benutzt hat, haben wir schon in **5** kennen gelernt, nämlich die Teilbarkeit der Fläche durch 6. Das weitere Probieren hat im Aufsuchen der Werte von a und b bestanden, deren Summe $r + s$ und Produkt $2rs$ jetzt bekannt sind. Die Auflösung der dazu dienenden Gleichung 2. Grades wird für die Fälle durchgeführt, wo sie wirklich ganzzahlige Auflösungen gibt Die Ausrechnung ist in allen vier Beispielen nach der folgenden Formel ausgeführt:

$$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} = \frac{r + s \mp \sqrt{(r+s)^2 - 8rs}}{2}.$$

Man fängt also nicht, wie in der Lösung von **3**, damit an, den Koeffizient der Unbekannten zu halbieren. Demnächst wird c durch die dritte Gleichung bestimmt.

Es ist übrigens wahrscheinlich, daß derjenige, der die Aufgaben aufgestellt hat, die Werte von A im voraus so gewählt hat, daß sie auf ihm bekannte, rationale, rechtwinklige Dreiecke passen. Diese haben die Seiten

20, 21, 29;
9, 40, 41;
8, 15, 17;
9, 12, 15, (3, 4, 5),

unter welchen namentlich das erste weder nach der sogenannten Pythagoreischen Regel noch nach der sogenannten Platonischen gebildet ist.

Die vorliegenden Formeln deuten übrigens an, wozu man solche Aufgaben wie die in **2** behandelte benutzt haben kann. Die rationalen Auflösungen der Gleichungen

$$ab = 2rs, \quad a + b = r + s,$$

die für $n = 2$ in den Gleichungen **2** (1) einbefaßt sind, geben, wie wir jetzt sehen, ein neues Mittel zur Bildung rationaler, rechtwinkliger Dreiecke. Die in **2** mitgeteilte Lösung führt doch nur auf das Dreieck 3, 4, 5. Um die drei übrigen zu haben, müßte man in die von uns aufgestellte

allgemeine Auflösung von **2** für m beziehungsweise $\frac{7}{4}\left(\text{oder } \frac{3}{10}\right)$, $5\left(\text{oder } \frac{4}{9}\right)$, $\frac{5}{2}\left(\text{oder } \frac{3}{8}\right)$ einsetzen. Ich wage doch nicht die Hypothese aufzustellen, daß man wirklich diesen Zusammenhang der Aufgaben benutzt habe. Um die Art der durch die Aufstellung solcher Aufgaben verfolgten Zwecke nachzuspüren, muß man jedenfalls solche faktisch existierende Zusammenhänge beachten.

Wie man bemerkt haben wird, erweitern die in **5** und in **10—13** behandelten Aufgaben wirklich unsere Kenntnisse der alten griechischen Geometrie. Leider läßt sich, wie man aus den Bemerkungen Heibergs ersehen haben wird, der Zeitpunkt der Abfassung des Stückes aus der Art der Überlieferung nicht bestimmen. Der positive Wert der in den genannten Aufgaben benutzten Sätze legt es jedoch nahe, die Entdeckung dieser Sätze selbst nicht allzuspät zu setzen. Jedenfalls muß sowohl diese Entdeckung als die Erfindung der hier gegebenen Beispiele älter als die vorliegende Mitteilung sein. Wenn diese nicht eine rein mechanische, kaum verstandene Wiedergabe von etwas viel Älterem ist, setzt sie jedenfalls die Kenntnis der benutzten Sätze voraus, und enthält nur eine detaillierte Angabe über die daraus folgenden Rechnungen, die in jeder numerischen Anwendung auszuführen sind.

Die Zusammenstellung so trivialer Aufgaben wie **4** und **7—9** mit denjenigen, die wir hier hervorgehoben haben, kann auch kaum dem Entdecker der letzteren zugrunde liegenden Sätze gehören. Dagegen ist es sehr wahrscheinlich, daß eben der Entdecker der in **10—13** benutzten einfachen Relationen gleich alle ihre 4 hier zusammengestellten numerischen Anwendungen ersonnen hat.

Kann man nun zwar nicht zeitlich weder dem erhaltenen Bruchstück, noch der Entdeckung der darin benutzten Sätze ihren Platz anweisen, so ist es leichter den Platz anzugeben, den die erhaltenen Sätze und die Tendenz ihrer Anwendungen unter den bekannten Beiträgen zur Kenntnis der altgriechischen Mathematik sachlich einnehmen. Neben der neugefundenen Vermessungslehre von Heron zeugen auch die hier vorliegenden Aufgaben davon, daß die Griechen sich auch um die rein numerischen Anwendungen der Sätze bemüht haben, denen die großen Schriftsteller eine so abstrakte geometrische Form gaben. Diese war — ganz wie die jetzige algebraische Formelsprache — notwendig, um die Sätze — darunter auch diejenigen über die Lösung der Gleichungen 2. Grades — so ganz allgemein darzustellen und zu beweisen, daß sie auch auf inkommensurable Größen anwendbar wurden. Sie schließt aber keineswegs die numerischen Anwendungen aus, und hat es — was man

indirekt aus EUKLIDS X. Buch schließen kann — ebensowenig zur Zeit der großen Geometer getan als zur Zeit des HERON und der Erfinder der vorliegenden Aufgaben.

Wenn auch HERON in der Vermessungslehre solche numerische Beispiele nicht scheut, die auf irrationale Quadratwurzeln führen, so zieht er doch solche vor, die rationale Lösungen haben. Diese lassen sich oft erhalten durch Benutzung der damals schon längst bekannten rationalen rechtwinkligen Dreiecke, woraus man durch Zusammensetzung auch rationale schiefwinklige Dreiecke bilden kann.[1]) Die vorliegenden Aufgaben zeigen nun eine Bestrebung danach, weitere Mittel zur Bildung solcher Beispiele zu erfinden. Diese schließen sich wesentlich an die Regeln für Bildung rationaler, rechtwinkliger Dreiecke an, was namentlich von dem in 5 benutzten, interessanten Satz gilt. Von einer anderen Seite greifen die Aufgaben **1** und **2** dieselbe Sache an. Da die Bestimmung zweier Zahlen durch ihre Summe und Produkt auch für die Griechen mit der Lösung einer Gleichung 2. Grades identisch war[2]), führen diese Aufgaben auf die Bildung zweier rational lösbaren Gleichungen, deren Koeffizienten unter sich gegebene Beziehungen haben. Diese Aufgaben sind unbestimmt. Dasselbe wird gewöhnlich bei solchen Aufgaben der Fall sein, die einen ähnlichen Zweck verfolgen. Um eine rational lösbare Gleichung 2 Grades zu haben, deren Koeffizienten von gewissen Größen abhängen, kommt es nämlich darauf an, diese Größen so zu bestimmen, daß ein gewisser Ausdruck einer Quadratzahl gleich werde.

Es begegnet uns also hier eine Art von Aufgaben, die man sonst vorzugsweise bei DIOPHANT suchen würde, und die weitere Verfolgung ähnlicher Zwecke würde auf die Bildung mehrerer solcher Aufgaben führen. Zur selben Zeit bietet die Behandlung einige Übereinstimmungen mit der DIOPHANTischen dar. **1** und **2** zielen z. B. offenbar auf die Lösung der allgemeinen Aufgaben ab, die wir durch die Gleichungen **1** (1) und **2** (1) dargestellt haben; um die Lösung dieser Aufgaben zu zeigen, führt der Verfasser aber die dazu dienenden Rechnungen für den Spezialwert $n = 3$, beziehungsweise $n = 4$ aus, ganz wie DIOPHANT es tun würde.

Mit DIOPHANT stimmt es auch, daß man in der Aufgabe **5** nicht ganzzahlige Auflösungen sucht, sondern sich mit rationalen Auflösungen begnügt.

Ein DIOPHANTischer Zug ist es weiter, daß der Verfasser sich nicht um die geometrische Homogenität kümmert, sondern sowohl in **3** als in **10—13** Fläche und Umkreis addiert. Dies ist natürlich berechtigt, wenn man sich die Linie in einem ganz bestimmten Maß, die Flächen im entsprechenden Flächenmaß ausgedrückt denkt. Der Verfasser weicht

1) Solche Beispiele haben bekanntlich auch die alten indischen Geometer angewandt 2) EUKLID, *Data* 85.

aber von Diophant und Heron darin ab, daß er ausdrücklich das Längenmaß als Fuß bezeichnet. Glücklich ist er doch dabei nicht, indem er unverändert dieselbe Benennung auf das Flächenmaß anwendet, und noch weniger, wenn er in **6** auch Verhältnisse, die reine Zahlen sein müssen, als Fuß bezeichnet. Diese ungünstigen Eigentümlichkeiten gehören doch sicher nicht dem ursprünglichen Verfasser.

Trotz der genannten Übereinstimmungen findet man bei Diophant keine der hier behandelten Aufgaben. Sie könnten zu den verlorenen Teilen seiner Arithmetik gehört haben, was ich doch als wenig wahrscheinlich betrachte; denn ihr natürlicher Platz würde im 2. oder 6. Buche sein.

Das erhaltene Stück dürfte, was P. Tannery schon von den ihm aus einer anderen Handschrift bekannten Aufgaben **1—2** bemerkt hat, sich den von Tannery so sorgfältig aufgesuchten, leider so sparsam vorliegenden Übergangsgliedern zwischen der zu Pythagoras' Zeiten anfangenden, in Euklids Elementen vollendeten Lösung der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ und der Diophantischen Arithmetik anschließen. Durch die interessante Anwendung der Euklidischen Lösung in **5** und durch die Anwendung in **10—13** von geometrischen Sätzen, die ebensowohl bei der geometrischen Lösung entsprechender, geometrisch gestellter Aufgaben benutzt werden könnten, steht es den älteren Untersuchungen näher als der Diophantischen Arithmetik, die mit der Geometrie nur eine rein äußerliche Verbindung hat. Man kann sich wohl vorstellen, daß die in diesem Stück hervortretenden Bestrebungen sich später von den geometrischen Zwecken nach und nach losgemacht haben, so daß man mehr und mehr wie Diophant unbestimmte Gleichungen um ihrer selbst willen studierte.

Weist man sachlich dem erhaltenen Stück diesen Platz zu, muß man wenigstens die erste Aufstellung der wichtigsten darin enthaltenen Aufgaben in die Zeit zwischen Euklid und Diophant verlegen. Selbst für die vorliegende Abfassung deutet der Umstand, daß nichts der großen Sammlung Diophants entnommen ist, darauf hin, daß auch sie älter als Diophant ist. Auf der anderen Seite ist es auffällig, daß man selbst in Diophants von rechtwinkligen Dreiecken handelnden 6. Buche keine Spur davon findet, daß er den in der vorliegenden Aufgabe **5** benutzten Satz kennt. Es läßt sich vielleicht dadurch erklären, daß Diophant sich gar nicht darum kümmert, ob die Lösungen ganzzahlig sind, wenn sie nur rational sind. Und doch zeigt das in **5** behandelte Beispiel, daß eben dieser von Dreiecken mit ganzzahligen Seiten geltende Satz auch zur Auffindung rationaler Dreiecke mit gebrochenen Seiten nützlich sein kann.

H. G. Zeuthen.

Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift.

Von G. Eneström in Stockholm.

Ich habe schon früher[1]) Gelegenheit gehabt darauf hinzuweisen, daß es eine kurze Algorismusschrift gibt, die mit den Worten „Communis et consuetus“ beginnt, und die in gewissen Handschriften dem Jordanus Nemorarius zugewiesen wird; ich habe auch erwähnt, daß der Inhalt dieser Schrift, abgesehen von der Einleitung, zum größten Teil wörtlich mit dem der „Demonstratio Jordani de algorismo“ übereinstimmt. Überdies habe ich auf die Möglichkeit hingewiesen, daß die Schrift älter als die „Demonstratio Jordani“ sei, so daß diese eine spätere Bearbeitung (sei es von Jordanus selbst oder von einem anderen Mathematiker des 13. Jahrhunderts) des ursprünglichen Jordanischen Traktates sein könnte. In diesem Artikel werde ich ausführliche Auskunft über die fragliche kurze Algorismusschrift geben.

Ohne Zweifel ist die Schrift schon von Chasles beachtet worden, denn nach seiner eigenen Aussage hatte er einen handschriftlich in Paris aufbewahrten „Algorismus Jordani“ eingehend studiert[2]), und da sich der Text „Communis et consuetus“ im Cod. Mazarin. 3642 (früher 1258) findet, welche Handschrift Chasles nachweislich gekannt hat, so liegt es nahe zu vermuten, daß der von Chasles erwähnte „Algorismus Jordani“ gerade der Text „Communis et consuetus“ ist. Fast zur Gewißheit wird diese Vermutung durch Chasles' Angabe[3]), daß Jordanus in seiner Algorismusschrift weder von den Arabern noch von den Indern spricht, sondern nur sagt, er werde in die Fußtapfen der Alten treten, denn im Texte „Communis et consuetus“ kommt gerade der Ausdruck „vestigiis

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 25, 207—208.

2) Vgl. G. Eneström, *Ist Jordanus Nemorarius Verfasser der Schrift „Algorithmus demonstratus“?;* Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 13.

3) M. Chasles, *Sur quelques points de l'histoire de l'algèbre;* Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **13**, 1841, S. 522.

antiquorum insistere“ vor. Jedenfalls hat meines Wissens weder Chasles noch irgendein anderer Historiker der Mathematik nähere Auskunft über die Schrift gegeben. Boncompagni hat einmal im Vorübergehen die verschiedenen Traktate des Cod. Vatic. Ottob. 309 erwähnt[1]), und vor einigen Jahren stieß A. A. Björnbo zufälligerweise auf eine andere, unvollständige und anonyme Handschrift (Cod. Vatic. Reg. Su. 1268) des Textes „Communis et consuetus“, bezeichnete aber dieselbe als Scholien zu Euklids Elementen.[2])

Für diesen Artikel habe ich in erster Linie den obengenannten Cod. Vatic. Ottob. 309 benutzt, von dem mir eine photographische Kopie vorgelegen hat. In dieser Handschrift, die dem 14. Jahrhundert zu entstammen scheint, beginnt der Text „Communis et consuetus“ ohne Überschrift Bl. 114ª Sp. 2; voran steht eine andere anonyme Algorismusschrift, in der man sofort den *Algorismus* des Sacrobosco erkennt. Unser Text endet Bl. 117ª Sp. 1 ohne Unterschrift mit den Worten: „hoc igitur est tocius operis causa“, und dann beginnt Bl. 117ª Sp. 2 mit den Worten: „Minuciarum tractatum inchoantes dicimus nihil aliud esse minucias quam partes“ eine Bruchrechnung, die Bl. 119ᵇ Sp. 2 endet mit der Unterschrift: „Explicit demonstratio Jordanis(!) in algorismi(!). Dfp grbchbs bmfn“ [= Deo gracias amen]. Diese Bruchrechnung stimmt inhaltlich mit der anonymen[3]) „Demonstratio de minuciis“ des Cod. lat. Berol. 4° 510 überein.

Außerdem habe ich für diesen Artikel zur Verfügung gehabt: 1. Eine photographische Kopie des Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 Bl. 69ª—71ª, wo sich die oben erwähnte unvollständige Handschrift des Textes „Communis et consuetus“ findet (außer der Einleitung nur die 15 ersten Sätze); 2. Eine photographische Kopie des Cod. S. Marco Florent. 216 Bl. 37ª—39ª, wo sich eine vollständige Abschrift des Textes findet[4]); 3. Eine photographische Kopie des Cod Mazarin. 3642 Bl. 96ª, der den größten Teil der Einleitung unseres Textes enthält; 4. Eine photographische Kopie des Cod. Mazarin. 3642 Bl. 105ª, wo die zweite Hälfte dieser Einleitung mit der Randbemerkung: „istud pertinet ad proemium algorismi“ abgeschrieben ist.

---

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 25.

2) A. A. Björnbo, *Studien über Menelaos' Sphärik;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **14**, 1902, S. 138—139.

3) Siehe G. Eneström, *Über die Demonstratio Jordani de algorismo;* Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 25.

4) Auf diese Handschrift hat mich Herr A. A. Björnbo aufmerksam gemacht. Hier beginnt der Traktat mit dem Absatze „Numerorum alius simplex, alius compositus“, der übrigens teilweise umgearbeitet worden ist, und erst gegen das Ende des Bl. 37ª Sp. 1 findet sich der richtige Anfang „Communis et consuetus“.

Da die Einleitung des Textes „Communis et consuetus“ von besonderem Interesse ist, so bringe ich sie hier vollständig zum Abdruck. Die von mir benutzten Handschriften stimmen fast überall wörtlich überein, und die Abweichungen sind so belanglos, daß es unnötig ist, dieselben anzuzeigen; ebensowenig halte ich für nötig, die unbedeutenden Verbesserungen des Textes, die von mir herrühren, hervorzuheben. Die kursiv gedruckten Stellen am Ende der Einleitung entsprechen den Definitionen der „Demonstratio Jordani de algorismo“ und ich habe in eckigen Klammern die zugehörigen Nummern dieser Definitionen angegeben.

Communis et consuetus rerum cursus virtusque ordinis naturalis raro perpenditur nisi cum eo ministrante vigor ingenii improvisa operatur. Stupet quidem inusitata quoniam ignarus non attendit originem, illudque magis miratur provenire posse quod amplius vir intelligens miraretur non esse huius contrarietatis, eciam licet dissonus considerandi modus insinuet. Habet tamen ipsa rei qualitas si ratione consulatur circa hoc secretum quod proferat Sunt enim in ea quibusdam figuris signata misteria ut et forma exterior obtutus sensuales detineat et virtus interior exerceat intellectum. In hoc igitur circa singularem materiam intentionis finem statuentes, probabilem satis finis utilitatem estimavimus ut quo efficacius allicit operis species admirationi habita, eo specialius admiranda sit via operandi intellecta.

Opus itaque numeri, quod summa illa et adoranda antiquorum diligentia de secretioribus speculative partis ad usum publice facultatis et subtiliter elicuit et prudenter ordinavit, ad exercitium intelligentie vestre ita manifestande proposui ut et aperta sit singularis partium distinctio et ita constet earundem ad sua principia reductio. Nec in hac quoque parte arrogantie arguar, quoniam debitor ex professione non alienus accedo, maxime cum benivolentia vestra gratiaque consorcii et veniam spondeat facilem et vires subministret. Et ne proloquendi occasio prolongetur ab ipsis artis principiis operis exordium statuamus.

Quantitates igitur sunt que disponunt subjectum. Earum vero alie sunt continue et alie discrete. Que vero in ipsis subjectis magis discernuntur discretarum est numerus et continuarum est corpus, quod quidem interioribus constat dimensionibus. Quare ex aggregatione adinvicem tantum procedit diversitas; per se enim queque considerata longitudo est et ex linea provenit, duarum vero prima longitudo et altera latitudo comitantes superficiem. Coniuncte sunt altitudo, latitudo, longitudo, corpus ut dictum est consummantes. Restat corpori connumerari lineam et superficiem, hiis quidem accidit secundum dictas dimensiones

finitum et infinitum. Finitum quidem non ex se secundum actum sed secundum potentiam. Infinitum autem non posito actu. Adveniens ergo actus et potentiam eliciens, finitum reddit. Actus dico vel natura ut in subjecto vel positione vel solo intellectu. Finitum vero ex termino, termino siquidem disaggregante vel continuante, licet continuatio non abnuat infinitatem. Uniuntur enim continuata ut non videatur esse terminus nisi potentia, qui in utrumque separatorum actu non potest dissolvi. Disaggregatio igitur terminorum discretionem operatur subjectorum que in se continuata et abinvicem discreta suas igitur imponunt unitates ex quibus efficiat numerum eorundem collatio; erit itaque unitas non quantitas sed inter eas media, vicem termini tenens, consummatio existens continuorum et principium discretorum, utrarumque proprietates quantitatum et in se deponens et in alterutrum mutuo transmittens. Hec ad sequentium evidentiam dicta interim sufficiant. Restat ut de numerorum dispositione breviter subdamus que quanto est notior, tanto presenti intentioni commodior, cum sit demonstrative discipline familiaris de notis ad ignota progressus.

Numerorum ergo alius simplex, alius compositus. Simplices numeri sicut et notatione inconiuncta ita et singulari positione ab aliis discernuntur. Positio numeri comitatur differentiam. Constat autem differentia ex habitudine et loco. Habitudinem dico numerandi rationem, locum in visibili forma descriptionem. Ratione itaque numerandi distinguntur simplices numeri per suas differentias ita ut [10] *quelibet differentia IX contineat numeros secundum quantitatem primi ipsorum se transgredientes* [8] *Prima igitur est differentia unitatum, cuius numeri ab unitate secundum ipsius additionem naturali ordine procedunt usque ad denarium* qui primus est in secunda differentia in qua simili appositione vel multiplicatione reliquos usque ad centum producat. Et hic tertie differentie primus. Eadem ratione ceteros sue differentie formet usque ad mille, ad hoc ergo quod et ipse antecedit in quarta differentia. Fit et [11] *in eadem generatio similis reliquorum et per additionem sue denominationis progressio ad ceteras differentias.* Descriptio in forma visibili fit per [1¹] *figuras IX, que sunt huiusmodi:*

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.

et ipse secundum se considerate primos numeros IX [9] *qui sunt in differentia unitatum habent denotare singule singulos secundum suum ordinem.* [1²] *Dispositis vero differentiis in locis sibi propositis secundum quod se sequuntur ut a dextra in sinistram fiat processus.* [12] *Eedem figure in quolibet loco de tota differentia numerum sibi similem designabunt.* [6] *Suppletio autem locorum habenda est vel positis propositis*

numeris in singulis differentiis, vel ad denotanda loca licet vacua in omnibus versus dextram ponemus circulos. [2] *Simplicis itaque numeri descriptio hec est, ut ordinatis totidem circulis ad dextram quot ante ipsum fuerint differentie ipse ad ultimum in sinistra adiiciatur tota cum figura representante quoties fuerit numerorum sue differentie.* [5] *Compositus autem numerus ex numeris simplicibus diversarum differentiarum constat,* qui omnes secundum distantiam eorundem abinvicem et ad primam locis suis ordinantur ut si que inter eos vacue fuerint differentie, loca earum circulis suppleantur. Hiis precognitis sequitur de opere numeri.

Opus numerorum in septem dividitur: in additionem, detractionem, duplationem, dimidiationem, multiplicationem, et divisionem et radicis extractionem tam in integris quam in minuciis. Et quoniam opus minuciarum diffusum est et involutum, secundum ei singulariter volumen constituimus, in hac prima particula secundum simplicem et abstractam numerorum naturam procedentes, cum etiam huiusmodi dicatur operatio integrorum, nullam tamen illorum vel minutiarum mentionem facientes, quoniam natura simul sese habent quemadmodum totum et partes. Est ergo predictorum [15] *intentio additionis quidem ut propositis duobus numeris eorundem coniunctorum summam reperiamus.* [16] *Detractionis ut superfluum maioris ad minorem.* [17] *Duplationis ut sumamus duplum dati numeri.* [18] *Dimidiationis ut dimidium si habuerit sin autem residui detracta unitate.* [19] *Multiplicationis vero ut producamus numerum qui contineat alterum datorum totiens quotiens in reliquo est unitas.* [20] *Divisionis ut eliciatur maximus qui totiens est in dividendo quotiens in divisore est unitas.* [21] *Extractionis opus est ut illum substituamus numerum qui per se multiplicatus propositi numeri summam vicinius consumet.* Cumque hec ita manifestata sint et ad instituendum in singulis operationibus modum vestigiis antiquorum sit insistendum. Quare cum rationem operis viamque quadam demonstrationis specie secundum arismetice disciplinam aperire intendimus, universales quasdam propositiones et huic tractatui familiares premittendas censuimus ut de earum utilitate certitudine habita, ordine competenti propositorum probatio directior consequatur.

Die soeben zum Abdruck gebrachten Absätze scheinen darauf hinzuweisen, daß der Text „Communis et consuetus" nicht als eine spätere Bearbeitung der „Demonstratio Jordani de algorismo" betrachtet werden kann, denn in diesem Falle wäre es wohl sinnlos gewesen, eine so ausführliche Einleitung zu redigieren. Noch sinnloser wären meines Erachtens die Worte: „nec in hac quoque parte arrogantie arguar quoniam debitor ex professione non alienus accedo, maxime cum benivolentia vestra

gratiaque consorcii et veniam spondeat facilem et vires subministret", wenn es sich wesentlich um wörtliche Auszüge aus einem älteren Traktate handelte. Auch die Worte: „quoniam opus minuciarum diffusum est et involutum ... ei singulariter volumen constituimus, in hac prima particula ..." deuten darauf hin, daß es sich nicht lediglich um einen Auszug aus einer schon fertigen Schrift handelt.

Unter solchen Umständen bekommt natürlich der Text „Communis et consuetus" ein großes Interesse, und eine eingehende Vergleichung desselben mit der „Demonstratio JORDANI" wird besonders angebracht. Im folgenden bringe ich darum zum Abdruck die Sätze unseres Textes nebst Erläuterungen dazu; a, b, c, d bezeichnen dabei ganze Zahlen kleiner als 10, m und n beliebige ganze Zahlen Ich gebe auch an, inwieweit die Beweise der Sätze mit denen der „Demonstratio JORDANI" übereinstimmen. Da unser Text in der Einleitung unter dem Namen „Opus numerorum" erwähnt wird, so benutze ich im folgenden diesen Namen, wenn ich vom Texte „Communis et consuetus" spreche.

1. *Sumptis similibus numeris per singulas differencias a prima, eos sibi continue secundum denarii denominationem multiplices esse conveniet.*

„Demonstratio JORDANI" Satz **1**. Wenn $a_1 = a\cdot 10$, $a_2 = a\cdot 100$, $a_3 = a\cdot 1000, \ldots$, so ist $a_1 = 10a$, $a_2 = 10a_1$, $a_3 = 10a_2, \ldots$

Die Beweise der beiden Traktate sind zum Teil verschieden, und um eine Vergleichung zu ermöglichen, drucke ich dieselben hier nebeneinander ab.

Demonstratio JORDANI.	Opus numerorum.
Habemus enim necessario quod quilibet primus alicuius differencie in primo continue sequentis differencie decies continetur cum ille sit decimus ab illo, et quoniam numeri similes in omnibus differenciis equidistant a primis eisque sunt eque multiplices, erit permutatim ut est primorum quorumlibet et ea sit quorumlibet similium proportio. Unde manifestum est cuiuslibet differencie numerum primum sic se habere ad omnem alium sicut unitas ad suum digitum. Sit enim a primus tercie differencie, b quintus illius. Ita quoque quinarius digitus dicatur c, unitas vero d; per primam ergo sicuti	Habemus enim ex prius dicta dispositione quod cuiuslibet differencie numerus primus tociens sibi coacervatur ut ex singulis coacervationibus singuli reliquorum eiusdem differencie numeri usque ad primum sequentis differencie proveniant qui quoniam decimus est ab eadem ex novenaria addicione ipsius super se, constat quod quilibet primus alicuius differencie in primo differencie alterius decies continetur et quoniam numeri similes in omnibus differenciis equaliter distant a primis eisque eque sunt multiplices, erit permutatim ut que primorum quorumlibet ea sit et quorumlibet similium proportio cum

est a ad d, ita b ad c; ergo permutatim sicut est a ad b sic est d ad c.

sint ergo primi multiplices sibi secundum denarium, erunt et quilibet aliter sumpti continue per singulas differencias. Et hoc est quod dicitur.

Die unvollständige Abschrift des „Opus numerorum" im Cod. Reg. Su. 1268 hat einen anderen Beweis, den ich ebenfalls hier zum Abdruck bringe.

Similes numeros appellant qui eadem figura representantur. Sumantur itaque numeri similes et sint hi .555., sumantur etiam primi in horum differentiis et erunt hi .111. Habemus autem ex prius producta descriptione quod primus primorum sibi novies superadditus efficit secundum, secundus novies tercium, ergo primus primorum est decima pars secundi eorundem, secundus decima pars tercii, ergo tercius est decuplus ad secundum et secundus decuplus ad primum, sed ex descriptionibus etiam habemus quod quantum distat primum .1. a primo .5. tantum distat secundum .1. a secundo .5., ergo quociens sibi quoadunatur(!) primum .1. ad efficiendum primum .5. tociens sibi choadunatur(!) secundum .1. ad secundi .5. constitucionem, ergo quociens primum .1. est in primo .5. tociens secundum .1. est in secundo .5. ergo proporcio primi .1. ad primum .5. est tamquam secundi .1. ad secundum .5. ergo permutatim proporcio secundi .1. ad primum .1. tamquam proporcio secundi .5. ad primum .5. et igitur patet secundum .5. esse decuplum ad primum .5. et eadem ratione tercium ad secundum.

In betreff des Beweises der „Demonstratio Jordani" ist zuerst zu bemerken, daß die Worte: „Unde manifestum . . . sic est d ad c" eigentlich ein Corollarium enthalten, das besagt, daß $10^n : a \cdot 10^n = 1 : a$. Sieht man von diesem Corollarium ab, so ist der Beweis viel kürzer als die zwei übrigen; wesentlich stimmen freilich die drei Beweise überein. Der interessanteste ist ohne Zweifel der dritte, weil man daraus ersieht, wie ein Mathematiker des 13. Jahrhunderts den Satz: „Wir nehmen beispielsweise die drei Zahlen 5, 50, 500 in Betracht" ausdrückte; statt 5, 50, 500 schrieb er ganz einfach 555 und ebenso 111 statt 1, 10, 100, wodurch er vermied, das damals nicht besonders geläufige Zeichen für Null anzuwenden.

2. *Numeri similes et eque abinvicem distantes sunt proportionales.*

„Demonstratio Jordani" Satz 2. Ich habe früher[1]) diesen Satz auf folgende Weise wiedergegeben: „Wenn $a_1 = a \cdot 10$, $a_2 = a \cdot 100$, $a_3 = a \cdot 1000$, . . ., so ist $a : a_1 = a_1 : a_2 = a_2 : a_3 = \ldots$ Dies ist aber

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 28.

nicht ganz richtig; der Sinn ist vielmehr: $a : a \cdot 10^m = b \cdot 10^n : b \cdot 10^{m+n}$, und dieser Satz wird wirklich bei dem Beweise eines späteren Satzes als Satz **2** zitiert.

3. *Si fuerit primus ad secundum sicut tercius ad quartum, si primo et tercio equales numero differencie addantur vel detrahantur, et tunc quoque eisdem eosdem proportionales esse necesse est.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **3**. Wenn $a : b = c : d$, so ist $a \cdot 10^n : b = c \cdot 10^n : d$.

4. *Proportionales numeri et si abinvicem eque distiterint proportionales erunt.*

Dieser Satz stimmt durchaus überein mit dem Wortlaut des Satzes **4** der von mir benutzten Handschrift der „Demonstratio Jordani de algorismo“: „Proportionales numeri et si abinvicem equedistiterint proportionales erunt“. aber der Satz ist offenbar dem Wortlaut nach sinnlos, und ich habe darum in meinem Abdruck der Sätze der „Demonstratio Jordani de algorismo“ das Wort „similes“ statt des zweiten „proportionales“ gesetzt.[1]) Eigentlich wäre es richtiger gewesen „similes esse poterunt“ statt „proportionales erunt“ zu setzen, denn in gewissen Fällen können proportionale und äquidistante Zahlen ungleichartig sein, z. B. 1, 20, 400, 8000. Jetzt, nachdem ich den Satz **2** auf andere Weise als früher gedeutet habe, scheint mir der Satz **4** zu enthalten, daß, wenn $a : b = c : d$, so ist auch $a \cdot 10^n : b \cdot 10^n = c \cdot 10^n : d \cdot 10^n$.

Um meine neue Auffassung zu begründen, drucke ich hier teils den Beweis der „Demonstratio Jordani“, teils die voneinander verschiedenen Beweise der von mir benutzten Handschriften des „Opus numerorum“ ab.

Demonstratio Jordani.	Opus numerorum. Cod. Vatic. Ottob. 309. Cod. S. Marco Florent. 216.	Opus numerorum. Cod. Vatic. Reg. Su. 1268.
Proportionalitas prius prima in differencia prima perpenditur. Sumantur ergo in differenciis mediis extremorum similes et age ex secunda atque per eversam proportionalitatem medio numero bis sumpto propter evidenciam probacionis.	Proportionalitas prima in differencia prima perpenditur. Sumantur igitur in differenciis extremorum minoribus similes atque per secundam facile argutum elicias.	Primis enim superpositis similibus ultimis per secundam hujus argue ut in premissa.

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 28.

Keiner dieser Beweise ist besonders klar; möglicherweise könnte man auch den Satz so deuten, daß wenn die zwei ersten Zahlen a und $b \cdot 10^m$ sind, so gibt es immer zwei gleichartige Zahlen, nämlich $a \cdot 10^n$ und $b \cdot 10^{m+n}$, die so beschaffen sind, daß a und $a \cdot 10^n$ sowie $b \cdot 10^m$ und $b \cdot 10^{m+n}$ äquidistant sind und außerdem $a : b \cdot 10^m = a \cdot 10^n : b \cdot 10^{m+n}$. Indessen wird der Satz, daß $a \cdot 10^n : b \cdot 10^n = c \cdot 10^n : d \cdot 10^n$, wenn $a : b = c : d$ im Satz **28** der „Demonstratio Jordani“ benutzt mit der Vorbemerkung „per 4 argues quod . . .“

5. *Omnis numerus simplex extra primam differenciam par est.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **5**. $a \cdot 10^n$ $(n > 1)$ ist eine gerade Zahl.

Die sehr kurzen Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich identisch.

6. *Numero composito per differentias suas disposito, si prima differencia vacua fuerit, totus numerus par erit.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **6**. $a \cdot 10 + b \cdot 100 + c \cdot 1000 + \ldots$ ist eine gerade Zahl.

Die sehr kurzen Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich dieselben.

7. *Disposito quolibet numero per differencias suas, si in prima differencia fuerit numerus impar, totus erit impar, quod si par, est par.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **7**. $a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots$ ist ungerade, wenn a ungerade ist, und gerade, wenn a gerade ist.

Die Handschrift Cod. Vatic. Ottob. 309 des „Opus numerorum“ enthält, wahrscheinlich durch ein Versehen des Abschreibers, nur die erste Hälfte des Satzes der „Demonstratio Jordani“, aber die Beweise der beiden Traktate, die wesentlich identisch sind, beziehen sich auf den ganzen Satz. Im Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 lautet der Schluß des Satzes: „. . . totus erit impar, sed si impar(!) est par.“

8. *Si fuerit numerus in prima differencia quadratus similis ei tantum in impari differencia quadratus est.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **8**. Wenn a^2 eine Quadratzahl < 10 ist, so ist $a^2 \cdot 10^{2n}$ eine Quadratzahl.

Die Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich dieselben.

9. *In pari differencia non est aliquis numerus quadratus.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **10**. $a \cdot 10^{2n+1}$ ist nie eine Quadratzahl.

Die Beweise der zwei Traktate sind zum größten Teil voneinander verschieden. In der „Demonstratio Jordani“ wird teils auf Satz **8** („modo antepremisse“), teils auf Satz **9** („per premissum“) verwiesen; im „Opus

numerorum" steht ganz richtig an der ersten Stelle „modo premisse" und die zweite Stelle fehlt. Im Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 ist der Beweis etwas abweichend und dort wird als Beispiel die Zahl 90 gewählt.

10. *Omnis simplicis numeri radix est numerus simplex*

„Demonstratio Jordani" Satz **11**. Wenn $a \cdot 10^n$ eine Quadratzahl ist, so ist die Quadratwurzel dieser Zahl von der Form $b \cdot 10^m$.

Die Beweise der zwei Traktate sind vollständig verschieden. Die „Demonstratio Jordani" wendet die Bezeichnungen a, b, c usw. an und benutzt den Satz **2**; im „Opus numerorum" kommen keine Zeichen vor, und wird auf die Sätze **4** und **8** („per antepremissas") verwiesen.

11. *Si duo numeri unius differencie sibi apponantur, compositus ad secundum numerum sequentis differencie non perveniet.*

„Demonstratio Jordani" Satz **20**. $a \cdot 10^n + b \cdot 10^n$ ist kleiner als $2 \cdot 10^{n+1}$.

Die sehr kurzen Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich identisch. In der „Demonstratio Jordani" wird durch die Worte „per duodecimam huius" auf Satz **12** verwiesen, im „Opus numerorum", wo der fragliche Satz nicht vorkommt, fehlen diese Worte.

12. *Duobus numeris propositis alterum alteri addere.*

„Demonstratio Jordani" Satz **21**. Das gewöhnliche Additionsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe und auch die Darstellung fast dieselbe. In der „Demonstratio Jordani" kommt eine Stelle vor, die im „Opus numerorum" fehlt, und wo auf einen früheren Satz verwiesen werden sollte, obgleich im Cod. lat. Berol. qu. 510 der Platz der Nummer freigelassen ist. Indessen war diese Stelle („ratio sumatur per . . .") ohne Zweifel ursprünglich eine Randnote, so daß ihr Fehlen im „Opus numerorum" belanglos ist.

13. *A numero maiore numerum quemlibet minorem detrahere.*

„Demonstratio Jordani" Satz **22**. Das gewöhnliche Subtraktionsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe und die Darstellungen fast wörtlich identisch. Im Cod. Vatic. Ottob. 309 steht „extrahere", im Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 und im Cod. S. Marco Florent. 216 dagegen „detrahere", wie in der „Demonstratio Jordani".

14. *Numeri dati duplum assignare.*

„Demonstratio Jordani" Satz **23**. Verdoppelung.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, im „Opus numerorum" ein wenig kürzer redigiert.

15. *Propositum numerum restat dimidiare.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **24**. Halbierung.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, aber im „Opus numerorum“ viel kürzer ausgedrückt.

16. *Si proponantur duo numeri ut alter per alterum multiplicetur primique alterius circuli ad reliqui principium transferantur, ex ita sumptorum multiplicacione eundem provenire necesse est.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **25**. Wenn A und B zwei beliebige ganze Zahlen sind, so ist $(A \cdot 10^n) \cdot B = A \cdot (B \cdot 10^n)$.

Die Beweise der zwei Traktate sind fast wörtlich dieselben.

17. *De medio unius numeri ad alterius principium ut producti equalitas servetur non est transferre circulos.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **26**. Im allgemeinen ist $(a \cdot 100 + b)(c \cdot 10 + d)$ nicht gleich $(a \cdot 10 + b)(c \cdot 100 + d \cdot 10)$.

Die Beweise der zwei Traktate sind fast überall wörtlich identisch. Der Beweis der „Demonstratio Jordani“ beruft sich auf Satz **9**, aber diese Berufung scheint mir durchaus unnötig. Im „Opus numerorum“, wo der fragliche Satz fehlt, kommt kein Verweis vor.

18. *Ad medium vero alterius translatis in proportionalibus tantum numeris, eveniet equalitas productorum.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **27**. Wenn $a : b = c : d$, so ist $(a \cdot 100 + b)(c \cdot 10 + d) = (a \cdot 10 + b)(c \cdot 100 + d)$.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen fast überall wörtlich überein.

19. *Datum numerum per se vel per alium quemlibet multiplicare.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **28**. Multiplikationsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe und auch die Darstellung fast überall wörtlich dieselbe, aber im „Opus numerorum“ ein wenig kürzer.

20. *Numeris inequalibus si differencie numero equales preponantur, inter totos etiam erit inequalitas non permutata.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **29**. Wenn $a < b$, so ist $10a + c < 10b + d$.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen wörtlich überein.

21. *Si numero minori una versus dextram differencia adiiciatur, reliquus de ipso plus novies non detrahetur.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **30**. Wenn $a < b$, so ist $\frac{10a + c}{b}$ höchstens gleich 9 und einem eigentlichen Bruche.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen wörtlich überein.

22. *Numerum datum per quemlibet minorem dividere.*

„Demonstratio Jordani" Satz **31**. Divisionsverfahren.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, und auch die Darstellung wörtlich dieselbe, nur daß im „Opus numerorum" die letzten Zeilen der „Demonstratio Jordani" fehlen, die wesentlich die Probe durch entgegengesetztes Verfahren enthalten.

23. *Numerus differenciarum a quibus radix extrahenda est, dupplum differenciarum radicis non excedit.*

„Demonstratio Jordani" Satz **33**. Die Ziffernzahl einer Zahl ist höchstens das Doppelte der Ziffernzahl ihrer Quadratwurzel.

Die Beweise der zwei Traktate stimmen wörtlich überein. Merkwürdigerweise wird sowohl im „Opus numerorum" als in der „Demonstratio Jordani" die angenommene Zahl durch *abgde* und nicht wie sonst immer durch *abcde* bezeichnet, aber daraus darf man gewiß nicht folgern, daß der Beweis aus einer griechischen oder griechisch-arabischen oder byzantinischen Quelle entnommen ist.

24. *Distancia simplicium numerorum in differenciis suis inter primos productorum ex ipsis dupplicata constabit.*

„Demonstratio Jordani" Satz **32**, der in der von mir benutzten Handschrift lautet: „Distantia simplicium numerorum inter proximos productorum ex ipsis duplicata constabit". Da mir indessen diese Fassung des Satzes sinnlos erschien, versuchte ich in meinem Artikel *Über die „Demonstratio Jordani de algorismo"*, dieselbe auf folgende Weise zu verbessern[1]): „Equidistantia simplicium numerorum inter proximos productorum ex ipsis duplicata constabit", aber sicherlich ist der Sinn ein anderer als der von mir angenommene.

Ich bringe darum zum Abdruck den Beweis des „Opus numerorum", der fast wörtlich mit dem der „Demonstratio Jordani" übereinstimmt.

Singulis enim eorum in sua multiplicatione dispositis, numerum utriusque disposicionis inparem esse constat minorem uno duplo simplicis secundum differencias et quia inter duplos dupla est differencia, eadem etiam erit inter eos sic dispositis, quoniam eque ab eis distant. Facta ergo multiplicatione eorum quoniam primi productorum sive circuli sive numeri super ultimos compositorum constabunt, ipsorum quoque abinvicem distantiam eandem esse constat.

Aus diesem Beweise dürfte hervorgehen, daß der Satz auf folgende Weise zu deuten ist. Wenn man das Produkt zweier Zahlen *abcd* und $\alpha\beta\gamma\delta$ berechnet, so ist die Differenz der Stellenzahlen der Einerziffern der zwei Teilprodukte $b \cdot \beta$ und $d \cdot \delta$ [d. h. $5 - 1 = 4$] das Doppelte der

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 31.

Differenz der Stellenzahlen der Ziffern b und d oder β und δ [d. h. $3-1=2$]. In Wirklichkeit wird dieser Satz bei dem Beweise der Richtigkeit der Quadratwurzelausziehung benutzt. Besonders klar ist freilich weder der Satz noch der Beweis derselben.

25. *Propositi numeri radicem extrahere.*

„Demonstratio Jordani“ Satz **34**. Quadratwurzelausziehung.

Die Regel ist in den zwei Traktaten dieselbe, und sie ist auch fast überall mit denselben Worten ausgedrückt.

Nach der Regel folgt im „Opus numerorum“: 1. der Beweis, daß die Quadratwurzel einer fünfziffrigen Zahl aus drei Ziffern besteht; 2. ein ziemlich unklarer Versuch, das Verfahren der Quadratwurzelausziehung zu erläutern, wenn man annimmt, daß die gegebene Zahl $abcdef$ (a, b, c, d, e, f die sechs Ziffern) und die berechnete Wurzel ghk ist; dabei werden auch die Fälle $h=0$ und $k=0$ besonders berücksichtigt. In der „Demonstratio Jordani“ folgt nach der eigentlichen Regel ebenfalls zuerst: 1. der Beweis, daß die Quadratwurzel einer fünfziffrigen Zahl aus drei Ziffern besteht (ein wenig ausführlicher); 2. Erläuterung des Verfahrens, wenn man annimmt, daß die gegebene Zahl $abcdef$ und die berechnete Quadratwurzel ghk ist (ausführlicher). Dann enthält die „Demonstratio Jordani“ noch: 3. einen fast unnötigen Beweis, daß, wenn ghk die Quadratwurzel aus $abcdef$ ist, so ist g die größte Zahl, deren Quadrat von ab (d. h. $10a+b$) subtrahiert werden kann, h die größte Zahl, die mit $2\cdot 10\cdot g+h$ multipliziert von $abcd-100g^2$ subtrahiert werden kann usw.; 4. den Beweis des Satzes $(a+b+c)^2=a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$; hier wird $a+b+c$ durch abc bezeichnet, während früher abc immer $100a+10b+c$ bedeutete.

In der „Demonstratio Jordani“ wird an zwei Stellen auf Satz **13** verwiesen, welcher Satz im „Opus numerorum“ fehlt. Es handelt sich dabei um den obenerwähnten Beweis, daß g die größte Zahl ist, deren Quadrat von ab subtrahiert werden kann, und dieser Beweis fehlt ebenfalls im „Opus numerorum“. An einer anderen Stelle der „Demonstratio Jordani“ kommt, wie ich schon in meinem Artikel *Über die „Demonstratio Jordani de algorismo“* bemerkt habe[1], der Passus vor: „Hanc subtractionem docuimus in opere extrahendi radicem“, und ich war früher der Ansicht, daß hier eine besondere Schrift oder wenigstens ein Abschnitt einer anderen Schrift als die „Demonstratio Jordani“ gemeint war.[2] Indessen dürfte „opus extrahendi radicem“ ganz einfach das am Anfange des Satzes **34** der „Demonstratio Jordani“ auseinandergesetzte

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 33.

2) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 208.

Wurzelausziehungsverfahren bedeuten, denn an einer anderen Stelle steht „ex opere multiplicandi constat“ und hier bedeutet „opus multiplicandi“ offenbar das im Satze **28** der „Demonstratio Jordani“ gelehrte Multiplikationsverfahren.

Aus dem vorangehenden Berichte findet man, daß im „Opus numerorum“ die Sätze **9**, **12—19** der „Demonstratio Jordani“ fehlen. Diese Sätze besagen[1]), daß:

[**9**] $$a \cdot 10^n = a \cdot (1 \cdot 10^n);$$

[**12**] $$1 \cdot 10^n + 9 \cdot 10^n = 1 \cdot 10^{n+1};$$

[**13**] $$9 + 9 \cdot 10 + 9 \cdot 10^2 + \ldots + 9 \cdot 10^{n-1} < 10^n;$$

[**14**] jede ganze Zahl nur auf eine einzige Weise unter die Form $a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots$ gesetzt werden kann;

[**15**] $$a \cdot 10^n = a + a(9 + 9 \cdot 10 + \ldots + 9 \cdot 10^{n-1});$$

[**16**] $$9 \cdot 10^n \equiv 0 \pmod 3;$$

[**17**] $$a + b \cdot 10 + c \cdot 100 + \ldots \equiv 0 \pmod 3, \text{ wenn } a + b + c + \ldots \equiv 0 \pmod 3;$$

[**18**] $$a + b = a + b \text{ (!)};$$

[**19**] $$a \cdot 10^n + b \cdot 10^n = (a + b) \cdot 10^n.$$

Warum überhaupt die Sätze **15—17** in der „Demonstratio Jordani“ vorkommen, ist mir unverständlich. Die Sätze **16** und **17** enthalten Spezialfälle der Dreierprobe, aber im ganzen Traktate habe ich keine Anwendung derselben entdecken können. Satz **15** weist auf die Neunerprobe hin, aber wird nur für den Beweis des Satzes **17** benutzt. Aus dem Fehlen dieser Sätze im „Opus numerorum“ kann man darum gar keine Folgerungen ziehen. Dagegen könnte man möglicherweise versucht sein, das Fehlen der Sätze **9**, **12—14**, **18**, **19** so zu erklären, daß die „Demonstratio Jordani“ die ursprüngliche Schrift sei und die fraglichen Sätze gestrichen worden sind, weil sie fast selbstverständlich und überdies wenig wichtig waren. Diese Erklärung scheint mir indessen nicht stichhaltig, denn teils finden sich im „Opus numerorum“ Sätze, die ebenso selbstverständlich (z. B. Satz **5**) oder von ebenso geringem Belang (z. B. Satz **17**, d. h. Satz **26** der „Demonstratio Jordani“), teils enthält der *Algorithmus demonstratus* des Meisters Gernardus einige der betreffenden Sätze; besonders der Satz **19** der „Demonstratio Jordani“ wird von Gernardus in drei verschiedenen Sätzen (I: 3—5) behandelt, weil er die Fälle $a + b < 10$, $a + b = 10$, $a + b > 10$ unterscheidet. Da nun der *Algorithmus demonstratus* allem Anschein nach aus der zweiten Hälfte des

1) Siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906—1907, S. 28—29.

13. Jahrhunderts herrührt[1]), liegt es näher anzunehmen, daß der im „Opus numerorum" enthaltene Stoff allmählich erweitert worden ist, zuerst durch die „Demonstratio JORDANI", dann noch mehr durch den *Algorithmus demonstratus;* das „Opus numerorum" wäre folglich die ursprüngliche Schrift. Freilich muß zugegeben werden, daß diese Schlußfolgerung nicht allein besonders beweiskräftig ist.

Dagegen scheint es mir, als ob eine Vergleichung der Definitionen der zwei Traktate zu einem sichereren Resultate führen würde. Die Definitionen der „Demonstratio JORDANI", die im „Opus numerorum" fehlen, sind:

3. Digitus est numerus a quo figura denominatur sive quicumque primo loco una sola representatur figura.
4. Articulus est numerus denarius vel qui precise constat ex denariis. Item articulus est numerus qui potest dividi in decem partes equales.
7. Numeri simplices a primo loco equidistantes dicuntur eiusdem numeri differencie.
13. Equidistantes numeri sunt inter quos continue se sequentes sunt differencie numero equales.
14. Idem est limes et differencia. Numeri similes in omnibus differenciis equidistant a primis.

Die Definitionen 7 und 13 sind ziemlich überflüssig und können darum nicht für unseren Zweck in Betracht kommen. Dasselbe gilt von der Definition 14, weil der Term „limes" nie in der „Demonstratio JORDANI" angewendet wird. Dagegen weisen die Definitionen 3 und 4 auf einen bestimmten terminologischen Unterschied zwischen den zwei Traktaten hin. In der „Demonstratio JORDANI" wird nämlich der Term „digitus" oft, der Term „articulus" zuweilen gebraucht, während diese zwei Terme im „Opus numerorum" gar nicht vorkommen. Die Sätze der „Demonstratio JORDANI" (**9**, **15**, **17**, **19**), die den Term „digitus" enthalten, fehlen vollständig im „Opus numerorum"; wenn der erste Traktat in einem Beweise das Wort „digiti" benutzt, steht an der entsprechenden Stelle des zweiten Traktates immer „unitates" und die Stellen, wo sich in der „Demonstratio JORDANI" „articuli" findet (z. B. Satz **19**), fehlen im „Opus numerorum". Nun wissen wir allerdings, daß die Terme „digiti" und „articuli" schon bei den Abacisten des 10. Jahrhunderts vorkommen[2]),

1) Vgl. P. DUHEM, *Sur l'Algorithmus demonstratus;* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 15.

2) Vgl. z. B. die bekannte Stelle bei GERBERT: „Quid cum idem numerus . . . nunc digitus, nunc constituatur ut articulus" (*GERBERTI Opera mathematica,* ed BUBNOV, Berlin 1899, S 7). Es scheint, als ob bei GERBERT die Ausdrücke „digitus"

aber für unseren Zweck ist es in erster Linie wichtig zu wissen, ob bei den Algorithmikern diese Terme älter oder jünger als die Terme „unitates“ und „deceni“ sind. Ich habe darum über diese Frage Untersuchungen angestellt und teile hier das Resultat derselben mit.

In der von Curtze herausgegebenen, nachweislich vor 1168 verfaßten Algorismusschrift kommen nie die Worte „digiti“ und „articuli“, sondern nur „unitates“ und „deceni“ vor[1]), und ebenso sucht man vergebens die Terme „digiti“ und „articuli“ im Traktate *Algoritmi de numero indorum*[2]); auch im *Liber abbaci* des Leonardo Pisano ist es mir nicht gelungen, die zwei Terme aufzufinden.[3]) Dagegen finden sie sich im *Liber algorismi de pratica arismetrice*[4]), in dem von Boncompagni herausgegebenen *Liber qui secundum Arabes vocatur algebra et almucabala*[5]), in dem von Cantor herausgegebenen *Liber algorizmi*[6]), im *Prologus Ocreati in Helceph*[7]), im

und „articulus“ teils bzw. Einer und Zehner bedeuteten, teils einen etwas allgemeineren Sinn hätten, nämlich zwei Zahlen zu bezeichnen, von denen die zweite das Zehnfache der ersten ist. Jedenfalls dürfte Gerbert nie eine Zahl von der Form $B \cdot 10^n$, wo B mehr als eine wirkliche Ziffer hat, als einen „digitus“ betrachtet haben (vgl. die Bemerkung von Bernelinus in seinem *Liber abaci; Oeuvres de Gerbert*, éd. Olleris, Clermont 1867, S. 362). — Das Wort „articulus“ kommt schon in einem Alkuin zugeschriebenen Briefe vor (vgl. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **1**³, Leipzig 1907, S. 840) und scheint dort eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ zu bedeuten.

1) M. Curtze, *Über eine Algorismusschrift des XII. Jahrhunderts;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 8, 1898, S. 17—21.

2) B. Boncompagni, *Trattati d'aritmetica,* Rom 1857, S. 1—23.

3) Siehe *Scritti di Leonardo Pisano, pubblicati da B. Boncompagni* I, Rom 1857, S. 2—3.

4) B. Boncompagni, *Trattati d'aritmetica,* Rom 1857, S. 26: „Omnes numeri a primo limite procreati dicuntur digiti . . . A ceteris uero limitibus prouenientes dicuntur articuli.“ Hier bedeutet also „articulus“ eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$.

5) B. Boncompagni, *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese,* Rom 1851, S. 38: „Si enim proponatur digitus et articulus in digitum et articulum multiplicandi“. In dieser Schrift, die sicherlich ohne Grund dem Gherardo Cremonese beigelegt worden ist, bedeutet „articulus“ an der fraglichen Stelle anscheinend Zehner, aber eigentlich hat wohl der Verfasser der Schrift dem Terme eine weitere Bedeutung gegeben (vgl. unten S. 151 Fußnote 4).

6) M. Cantor, *Über einen Codex des Klosters Salem;* Zeitschr. f. Mathem. **10**, 1865, S. 2: „Igitur aliud in numero est digitus, aliud articulus“ . . . Decem, C, M articuli sunt. Compositus est ex digito et articulo.“ Hier sollte also eigentlich jede Zahl von der Form $A \cdot 10$ (A eine beliebige ganze Zahl) ein „articulus“ sein.

7) Ch. Henry, *Prologus Ocreati in Helceph;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **3**, 1880, S. 132: „[Primi numeri] digiti vocantur . . . Sunt . . . in unoquoque limite numerorum novem termini . . . Omnes . . . qui sunt in caeteris limitibus praeter primum, articuli solent appellari.“ Hier bedeutet also „articulus“ eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$.

Algorithmus demonstratus[1]) und im *Algorismus vulgaris*[2]) des Sacrobosco. Nach Sacrobosco scheinen die Terme „digiti" und „articuli" ausnahmslos in den lateinischen Rechenbüchern des christlichen Mittelalters und der Renaissance vorzukommen, wenigstens kenne ich kein solches Rechenbuch, worin sie fehlen.

Hieraus geht mit großer Wahrscheinlichkeit hervor, daß die Terme „digiti" und „articuli" nicht von den ersten Algorithmikern benutzt wurden[3]), sondern erst am Anfange des 13. Jahrhunderts angewendet worden sind. Ich sage „mit großer Wahrscheinlichkeit", denn die Möglichkeit, daß der Sprachgebrauch der Algorithmiker schon von Anfang an schwankend war, ist bisher durch keinen sicheren Beleg wahrscheinlich gemacht.[4])

1) „Digitus est omnis numerus minor decem. Articulus est omnis numerus qui digitum decuplat aut digiti decuplum aut decupli decuplum et sic in infinitum." Hier bedeutet also „articulus" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$).

2) Siehe die Ausgabe von M. Curtze, Kopenhagen 1897, S. 2: „Quilibet digitus una sola figura . . . habet scribi, omnis vero articulus per cyphram . . . et digitum". Hier bedeutet also „articulus" nur eine Zahl von der Form $a \cdot 10$ ($a < 10$), d. h. Zehner.

3) Wenn M. Chasles (*Explications des traités de l'Abacus et particulièrement du traité de Gerbert;* Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **16**, 1843, S. 13 des Sonderabzuges) zuerst den Term „articulus" als eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$) definiert und dann hinzufügt: „ces expressions *digits, articles* . . . ont passé dans les traités d'*algorisme,* où on les trouve sans interruption jusque dans le cours du XVII^e^ siècle, avec la même signification", so sind seine Angaben folglich nicht ganz genau. Teils bedeutete „articulus" nicht immer eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ ($a < 10$), sondern zuweilen allgemeiner eine Zahl von der Form $A \cdot 10$ (A eine beliebige ganze Zahl), teils benutzen drei der ältesten Algorismusschriften nicht die Ausdrücke „digitus" und „articulus", und es ist nicht konstatiert, daß diese Ausdrücke überhaupt von den Algorithmikern des 12. Jahrhunderts angewendet wurden.

4) Daß an einer Stelle der wahrscheinlich von Gherardo Cremonese verfertigten Übersetzung von Alkhwarismis Algebra das Wort „articulus" benutzt wird (siehe Libri, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* I, Paris 1837, S. 265), wo es sich eigentlich um eine beliebige größere Zahl handelt (Rosen übersetzt das entsprechende arabische Wort durch „greater number"), beweist gar nicht, daß sich Gherardo Cremonese der Terminologie der späteren Algorithmiker bediente. Im Gegenteil weiß man, daß bei den Abacisten „articulus" zuweilen als „major numerus" mit Rücksicht auf den „digitus" definiert wurde (siehe Gerberti *Opera mathematica*, S. 252), und es ist darum leicht erklärlich, daß bei der Übersetzung der arabischen Terme (vgl. Woepcke, *Extrait du Fakhri,* Paris 1853, S. 48) die entsprechenden Wörter „articulus" und „digitus" zur Anwendung kommen konnten. Noch geringere Bedeutung hat der Umstand, daß an einer anderen Stelle der Librischen Ausgabe (S. 254, Z. 3) das Wort „articulus" vorkommt, denn hier dürfte der Text („post hoc similiter reiteratur mille apud unumquemque articulum usque ad id quod comprehendi potest de numeris ultime") verstümmelt sein (Rosen übersetzt die entsprechende Stelle des arabischen Textes auf folgende Weise: „then the thousand can be thus repeated *at any complex number* . . .").

Aus dem von mir oben erwähnten Umstande, daß zwar die „Demonstratio Jordani“ aber nicht das „Opus numerorum“ die Terme „digiti“ und „articuli“ enthält, kann man also folgern, daß diese Schrift sehr wahrscheinlich die ältere ist. Noch größer wird diese Wahrscheinlichkeit, wenn man die Terminologie der zwei Traktate näher untersucht. Dabei fällt es zuerst auf, daß von den neun Sätzen der „Demonstratio Jordani“, die im „Opus numerorum“ fehlen, nicht weniger als vier (**9, 15, 17, 19**) die Terme „digiti“ oder „articuli“ enthalten, während sich diese Terme in keinem einzigen der übrigen 25 Sätze der „Demonstratio Jordani“ finden. Diese Tatsache erklärt sich ohne weiteres, wenn man annimmt, daß die fraglichen neun Sätze in das „Opus numerorum“ eingeschaltet worden sind, nachdem der Gebrauch der Terme „digiti“ und „articuli“ geläufig wurde. Fast unerklärlich wird dagegen die Tatsache, wenn die „Demonstratio Jordani“ die ältere Schrift ist, denn es ist höchst unwahrscheinlich, daß die vier Sätze **9, 15, 17, 19** absichtlich gestrichen worden wären, weil sie die Terme „digiti“ und „articuli“ enthielten, und kaum wahrscheinlicher ist es, daß hier ein Zufall vorliegen würde. Für die Ansicht, daß der Traktat, wo die Terme „digiti“ und „articuli“ vorkommen, eine spätere Bearbeitung des ursprünglichen Traktates ist, spricht auch der Passus des **28**. Satzes der „Demonstratio Jordani“: „ultimum inferiorum in ultimum superiorum ducamus multiplicatione unitatum sive digitorum quod idem ut“ (der entsprechende Passus des „Opus numerorum“ lautet: „ultimum inferiorum in ultimum superiorum ducamus multiplicatione unitatum“), sowie der Umstand, daß in der „Demonstratio Jordani“ neben dem Terme „articuli“ auch der Term „deceni“ vorkommt an solchen Stellen, wo die späteren Algorithmiker immer das Wort „articuli“ anwenden. Sowohl das eine als das andere erklärt sich nämlich ohne weiteres, wenn man annimmt, daß der Bearbeiter der neuen Auflage des „Opus numerorum“ an einigen Stellen vergessen hat, die von ihm bevorzugten Terme statt der im „Opus numerorum“ vorkommenden einzuführen. Geradezu unverständlich wird die Abfassung des Satzes **6** („Numero composito per differencias suas disposito, si prima differencia vacua fuerit, totus numerus par erit“), wenn sie von einem Mathematiker herrühren würde, der wirklich den Term „articulus“ anwendete, denn der Satz kann ganz einfach auf folgende Weise ausgedrückt werden: „Omnis articulus par est“ (vgl. Def. 4). Daß übrigens Def. 4 der „Demonstratio Jordani“ ein späterer Zusatz sein muß, wird unmittelbar ersichtlich, wenn man sie mit Def. 5 vergleicht. Nach Def. 5 ist nämlich jede Zahl von der Form $A \cdot 10$, wo A mehrziffrig ist, ein „numerus compositus“, aber nach Def. 4 ist dieselbe Zahl ein „articulus“.

Das Endresultat der vorangehenden Untersuchung wird also: Aus terminologischen Gründen ist es höchst wahrscheinlich, daß

die „Demonstratio JORDANI" eine spätere Bearbeitung des „Opus numerorum" ist, und durch diese Annahme erklären sich auch gewisse andere Umstände, die sonst auffällig sein würden. Dagegen gibt es meines Wissens keinen Umstand, der dieser Annahme zu widersprechen scheint.

Zum Schluß nur noch einige Worte über die Verfasserfrage. Wenn man aus inneren Gründen geneigt sein muß, die „Demonstratio JORDANI" wirklich dem JORDANUS zuzuweisen, so gelten diese Gründe ebensosehr in betreff des „Opus numerorum". Ist nun diese Schrift die ursprüngliche, so muß sie in erster Linie als von JORDANUS verfaßt betrachtet werden, während die „Demonstratio JORDANI" vielmehr als eine neue erweiterte Auflage, vielleicht nicht von JORDANUS selbst besorgt, anzusehen ist. Jedenfalls muß also die Einleitung des „Opus numerorum" von JORDANUS herrühren, und auf diese Weise könnte man eine Stütze der Annahme, daß der Mathematiker JORDANUS mit dem Ordensgeneral JORDANUS SAXO identisch sei, bekommen, wenn es sich bestätigen würde, daß dieser Vorlesungen gehalten hat[1]); in der Tat ist es sehr leicht, den von mir oben besonders erwähnten Passus: „nec in hac quoque parte . . vires subministret" zu verstehen, wenn das „Opus numerorum" ursprünglich eine Vorlesung war. Auf diese Weise erklärte sich auch leicht der Umstand, daß die Beweise der zwei Handschriften Cod. Vatic. Ottob. 309 und Cod. Vatic. Reg. Su. 1268 zuweilen durchaus verschieden sind, wenn man annimmt, daß die Vorlesung mehr als einmal gehalten wurde. Ferner weiß man, daß ALBERTUS MAGNUS durch JORDANUS SAXO für den Dominikanerorden gewonnen wurde, und da die naturphilosophischen Stellen der Einleitung des „Opus numerorum" teilweise an die Lehren des ALBERTUS MAGNUS erinnern, so könnte man auch aus diesem Umstande vermuten, daß JORDANUS SAXO und der Mathematiker JORDANUS identisch sind. Indessen gebe ich gern zu, daß auf das letzte Argument geringerer Wert zu legen ist, da die Naturphilosophie des ALBERTUS MAGNUS zum größten Teil nicht besonders selbständig ist. Übrigens hat vermutlich dem Verfasser des „Opus numerorum" die Einleitung der *Institutio arithmetica* des BOETIUS zum Muster gedient.[2])

1) Vgl. M. CURTZE, *JORDANI NEMORARII geometria*, Thorn 1887, S. VI.

2) Vgl. z. B. BOETIUS, *De institutione arithmetica*, ed. G. FRIEDLEIN, Leipzig 1867, S. 9 Z. 16—26, S. 10 Z. 1—7.

Sur le „Libro de algebra“ de Pedro Nuñez.

Par H. Bosmans à Bruxelles.

I.

L'ouvrage qui fait l'objet de cette note est intitulé:

libro | *de algebra* | *en arithmetica* | *y geometria.* | Compuesto por el Doctor Pedro Nu- | ñez, Cosmographo Mayor del Rey || de Portugal, y Cathedratico Iubi- | lado en la Cathedra de Mathe- || maticas en la Vniuersidad | de Coymbra. (Marque d'imprimeur de Steelsius: Un autel, sur lequel un sceptre s'élève entre deux colombes. En exergue la devise): Concordia res parvae crescvnt. || *en anvers.* | En casa de la Biuda y herederos | de Iuan Stelsio. | 1567. | *con privilegio real.* ||[1])

C'est un volume des plus rares, à tel point que dans son érudite bibliographie des ouvrages sortis des presses des Steelsius, Nuyts n'en parle pas.[2])

D'assez nombreux exemplaires du *Libro de algebra* ont comme adresse d'imprimeur, „En Anvers, En casa de los herederos de Arnoldo Birckman, 1567“. C'est notamment celle qui est donnée par Brunet dans son *Manuel du libraire.*[3]) Da Silva les indique l'une et l'autre dans son dictionnaire[4]), et se demande, à ce propos, s'il faut voir, dans ces ouvrages, deux éditions distinctes parues, la même année et dans la même ville, chez deux libraires différents, ou bien si l'on n'a affaire qu'à une seule et même édition

1) In 8° de 32 p. non numérotées, 681 pp. numérotées au r° seul de 1 à 341 et 3 p. blanches. L'exemplaire dont je me sers appartient à l'Université de Louvain. Il fait partie d'un recueil factice, coté „Sciences 293“, relié aux armes d'Adrien Romain (un paon rouant), et qui lui a appartenu. Je remercie vivement MM. les bibliothécaires de l'Université, et tout specialement M. Wils, pour l'obligeance avec laquelle ils l'ont mis à ma disposition à Bruxelles.

2) *Jean Steelsius, libraire anversois.* Série d'articles publiée dans le Bulletin du bibliophile Belge, **14** et **15**, Bruxelles 1858 et 1859.

3) Tom. **4**, Paris 1863, col. 140.

4) *Diccionario bibliographico Portuguez* **6**, Lisboa 1862, p. 441—442.

avec deux titres. Cette dernière hypothèse est la vraie. Sans avoir eu l'occasion de confronter ensemble des exemplaires de Steelsius et de Birckman, je crois néanmoins pouvoir l'affirmer avec certitude. Non seulement le format, l'année et le nombre de pages sont les mêmes, mais les multiples citations faites d'après Birckman qu'il m'a été possible de contrôler concordent parfaitement avec le texte de Steelsius. Au surplus en mettant ainsi au titre d'une même édition leurs adresses respectives, les éditeurs ne font que se conformer à un usage alors courant au Pays-Bas.

Dans son mémoire sur la vie et les travaux de Pedro Nuñez, Ribeiro dos Sanctos[1]) parle en outre d'une édition qui aurait paru à Bâle, en 1592; „da Officina dos herdeiros de Arnoldo Birak“, en ajoutant toutefois qu'il ne l'a pas vue.

Jusqu'à meilleure information je tiens ce renseignement pour erroné. En 1592, il est vrai, parut, à Bâle, une édition des *Opera* de Nuñez; mais ces *Opera* ne contiennent pas l'algèbre[2]) et l'éditeur en fut Sebastien Henricpetrus. D'autre part Arnoldo Birack est probablement une transcription fautive d'Arnoldo Birckman. Il doit y avoir là une confusion avec les exemplaires qui parurent, en 1567, à Anvers, chez Arnould Birckman.

Le *Libro de algebra* de Nuñez a eu plusieurs versions, toutes restées inédites.

Le celèbre Jean Pretorius le traduisit en latin. Doppelmayr[3]) nous apprend que de son temps le manuscrit original de Pretorius se trouvait encore à la bibliothèque d'Altorff, parmi les autres papiers de ce savant. C'est vraisemblablement le manuscrit renseigné aujourd'hui sous le no. 979,

1) *Memoria da vida e escritos de Pedro Nunes*, publié dans Memorias de litteratura Portugueza, publicadas pela academia real das sciencias de Lisboa. 7, 1806, p. 271.

2) Le titre complet de cette édition des *Opera* de Nuñez en indique bien le contenu: *Petri Nonii Salaciensis Opera. Quae complectuntur primùm dvos Libros, in qvorvm priore tractantur pulcherrima Problemata: in Altero Traduntur ex Mathematicis disciplinis regulae & instrumenta Artis navigandi, quibus varia rerum Astronomicarum φαινόμενα circa coelestium corporum motus explorare possumus. Deinde Annotationes in Aristotelis problema Mechanicum de Motu navigii ex remis: Item in Georgii Pvrbachii planetarum theoricas Annotationes, quibus multa hactenus perperam intellecta, ab aliisq; praeterita exponuntur. Eivsdem de Erratis Orontii Finoei Liber Vnus. Postremò, de Crepvscvlis lib. I. cum libello Allacen de causis Crepusculorum Quae quemadmodum mole exigua videntur, ita virtute ingentia, Lector candide, intelliges.* Cum Gratia & Priuil. Caesareae Majest. Basileae per Sebastianvm Henricpetri. — A la fin: Basileae per Sebastianvm Henricpetri. Anno CIↃ.IↃ.XCII. Mense septembri.

3) *Historische Nachricht von den Nürnbergischen Mathematicis und Künstlern*, Nürnberg 1730, p. 89.

sans nom de traducteur, mais avec le millésime de 1615, dans le catalogue des manuscrits de l'université d'Erlangen.[1]) Il serait probablement possible de tirer la chose au clair en confrontant l'écriture de ce manuscrit avec celle des autographes de PRETORIUS que possède cette bibliothèque.

M. L. DELISLE donne, en outre, dans son *Inventaire général des manuscrits français de la bibliothèque nationale*[2]), sous le no. 1344 (COLBERT): „L'algèbre en arithmetique et geometrie par PIERRE NUÑES, traduit de l'espagnol par GUILLAUME DE RASCAS, Seigneur de Bagarris et dédié à HENRI IV. MS. original". M. BROCARD a déjà appelé l'attention sur ce manuscrit à diverses reprises.[3])

Ces deux versions ne sont probablement pas les seules. Mais des recherches ultérieures m'eussent exposé à franchir les bornes imposées à ce travail. Les résultats précédents ne sont donc qu'une première indication utile qui aurait besoin d'être complétée.

Avant de quitter cet ordre d'idées, je rappellerai que le *Libro de algebra* fut primitivement écrit en portugais. Cette rédaction est perdue et seule la dédicace de NUÑEZ au prince cardinal, l'Infant don HENRIQUE, nous a été conservée dans la langue originale.

Dans cette dédicace l'auteur nous apprend qu'il traduisit lui-même son oeuvre en espagnol. Il voulait, dit-il, lui ménager ainsi des lecteurs plus nombreux, l'espagnol étant beaucoup plus répandu que le portugais.

Autre renseignement curieux. La dédicace est datée de Lisbonne, le 1r décembre 1564, et NUÑEZ nous y dit que son travail était écrit alors depuis plus de trente ans. Le *Libro de algebra* aurait donc été composé, d'après cela, en 1532 ou 1533.

Ceci demande cependant quelques observations.

Entendue de l'original portugais l'assertion de NUÑEZ ne soulève aucune difficulté et je crois bien que c'est ainsi qu'il la comprenait lui même. Elle serait évidemment fausse si on l'appliquait à la version espagnole. Dans cette dernière version, NUÑEZ fait de multiples et incontestables emprunts à des auteurs qui ont écrit bien après 1533. Au surplus il ne s'en cache pas et cite souvent leurs oeuvres en termes

1) *J. C. IRMISCHER, Handschriften-Katalog der königlichen Universitätsbibliothek zu Erlangen.* Frankfurt a. M. und Erlangen 1852, p. 239. Le manuscrit est signalé en ces termes: „979. — *NONII PET., algebra*, ex Hispanico utcunque latine facta, Pap. in 4°. 530 S. v. J. 1615. Pappbd."

2) Tom. 2, Paris 1878, p. 238.

3) L'Intermédiaire des mathématiciens, 9. 1902, p. 41. — *Description et usage d'un nouvel anneau astronomique, d'après un manuscrit inédit.* Sans lieu, ni date, p. 9.

exprès. Nommons, par exemple, l'Arithmétique de CARDAN[1]) qui est de 1539, les six premiers livres des Eléments d'EUCLIDE par PELETIER[2]) qui sont de 1557, les *Quesiti et inventioni diverse* de TARTAGLIA[3]), etc. etc.

En constatant ces emprunts, loin de moi toute pensée de blâme; je ne veux que préciser les choses. Il est naturel qu'avant d'éditer son travail NUÑEZ ait cherché à le mettre au courant des derniers progrès de la science. On ne peut que louer cet effort, et si l'auteur méritait un reproche, ce serait, peut-être, de ne pas l'avoir fait assez grand encore. Chose étonnante, en effet, il semble ignorer presque complétement les algébristes allemands. CHRISTOPHE RUDOLF et MICHEL STIFEL notamment lui sont inconnus. Pas une fois il ne les nomme, et on chercherait vainement, dans toute son algèbre, la moindre trace de leur influence.

II.

Mon intention n'est pas de parcourir le *Libro de algebra*, chapitre par chapitre, comme je l'ai fait, dans la Revue des questions scientifiques pour *l'Algebre* de PELETIER[4]), et ici même pour le *De arte magna* de GOSSELIN[5]); je craindrais de tomber dans des redites. Mais voici quelques points où l'oeuvre de NUÑEZ se distingue nettement des travaux similaires de ses contemporains.

On y remarque tout d'abord une généralité dans les démonstrations, une abstraction dans les énoncés des exercices, très exceptionnels pour l'époque et qui donne au *Libro de algebra* un caractère déjà tout moderne. C'est ainsi que les 110 problèmes d'algèbre, objet du chapitre 5 de la 3ᵉ partie, ne sont plus tirés, comme chez les autres algébristes du temps, du commerce, de l'industrie, ni des usages courants de la vie; ce sont des problèmes sur les nombres. Que si l'auteur emprunte à L. PACIUOLO ou à quelque autre une question où des joueurs, par exemple, se partagent des écus, il a soin de ramener le problème à une recherche sur les nombres. Tel est le cas pour le 110ᵉ problème du chapitre 5 rappelé ci dessus.

---

1) *H. CARDANI Practica arithmetice & mensurandi singularis* . . . [A la dernière page]: Anno a Virgineo partu M. D. XXXIX. Io. Antonius Castellioneus Imprimebat Impensis Bernardi Calusci. — C'est par ex. le prob. 58 du chap. 67 de cet ouvrage (f° GG r° — GG ij r°), que NUÑEZ a en vue dans le passage qu'il dit, au f° 79 r°, avoir emprunté à CARDAN.

2) *I. PELETARII, In EUCLIDIS Elementa geometrica demonstrationum libri sex* . . . Lvgdvni. Apvd Ioan. Tornaesivm et Gvl. Gazeivm. M. D. LVII. L'ouvrage contient, en appendice, huit lettres de PELETIER à des savants en vue, dont une adressée à NUÑEZ, f° (*p* 5) v° — (*p* 6) r°.

3) Ils eurent plusieurs éditions. La première est de Venise 1546

4) Tom. **41**, Bruxelles 1907, p. 117—173.

5) Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, p. 43—66.

Ce même cachet d'abstraction se remarque aussi dans les 77 exercices d'application de l'algèbre à la géométrie qui forment l'objet du dernier chapitre de la troisième partie.

Parmi les ouvrages mathématiques du moyen-âge Nuñez a étudié à fond l'*Arithmetica* de Jordan.[1]) Il y est surtout frappé par l'emploi *fréquent* des lettres introduit par Jordan[2]) dans les démonstrations arithmétiques, Reconnaissant à cet emploi une force probante que n'ont pas les simples vérifications numériques alors en usage en guise de démonstration il fait sienne cette méthode. Son mérite, en cela, est analogue à celui de Maurolyco.[3]) Mais pas plus que le géomètre Sicilien, il ne fait faire de progrès à la méthode de Jordan. C'est ainsi que si chez Jordan les chiffres sont remplacés par des lettres; il n'a cependant pas encore l'idée de conserver, dans les résultats, la trace des données; les sommes, les différences, les produits et les quotient sont chaque fois remplacés par une lettre nouvelle au fur et à mesure qu'ils se présentent dans les calculs. Nuñez et Maurolyco agissent de même et Viète le premier devait faire faire en cette matière un nouveau pas à la science. N'importe, au milieu du 16[e] siècle l'emploi de la notation littérale de Jordan est trop rare, pour qu'il n'y ait pas lieu de signaler à l'attention les auteurs qui en ont reconnu le mérite. Simple verification ne fait souvent pas preuve. Nuñez le sait. Aussi la grande rigueur d'esprit dont il donna tant de preuves, entre autres dans sa polémique contre Oronce Finé, ne pouvait manquer

1) Publiée pour la première fois en 1496 par Lefèvre d'Étaples. — *In hoc opere contenta: Arithmetica decem libris demonstrata. Musica libris demonstrata quatuor. Epitome i libros arithmeticos diui Severinj Boetij. Rithmimachie ludus q̃ & pugna numeror; appellāt.* — A la fin: Has duas Quadriuii partes . . . curarunt . . . Ioannes Higmanus & Volfangus Hopilius suis grauissimis laboribus & impensis. Parrhisii anno salutis Domini . . . 1496 . . . Réédité, sous le même titre, à Paris, en 1514, chez Henri Estienne. Nuñez cite aussi le *De ponderibus* de Jordan de Némore, mais il nous apprend lui même (f° 334 v°) qu'il le fait d'après une copie transcrite sur un manuscrit de l'abbaye de Saint-Victor, à Paris.

2) Sur les *premier* emploi des lettres, voir Eneström, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, p. 85—86.

3) D. Francisci Maurolyci, *Arithmeticorum libri duo nunc primum in lucem editi* . . . Venetiis, Apud Franciscum Franciscium Senensem. M. D. LXXXV. Chasles dit, on le sait, dans *l'Aperçu historique* (p. 345) que Maurolyco „introduisit le premier l'usage des lettres à la place des nombres dans les calculs de l'arithmétique". Je crois devoir rappeler cette erreur de l'illustre historien, pour montrer combien petit fut le nombre des imitateurs de Jordan de Némore.

4) An f° 30 r°, Nuñez après avoir donné une démonstration sur des chiffres y ajoute cette réflexion bien rare chez un algébriste du 16[e] siècle „Y aun que esta demonstracion paresca particular, la razon della es vniuersal, y generalmente se puede accommodar a toda multiplicacion . . .". Le traité *De erratis Orontii Finaei* par Nuñez a été réédité dans ses *Opera* de Bâle, 1592.

de l'avertir de la supériorité des demonstrations de JORDAN DE NÉMORE sur celles qui étaient alors habituellement en usage.

Mais s'il ne mérite que des éloges quand il suit les traces de JORDAN DE NÉMORE le souci de la rigueur n'inspire pas toujours NUÑEZ avec le même bonheur. C'est ainsi qu'on ne saurait guère l'approuver dans les vertes critiques qu'il adresse à PACIUOLO pour avoir admis les racines négatives des équations. Il s'agit, dans le passage suivant, de

$$x + 79 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = -79.$$

„La verdad es, dit NUÑEZ, que el caso es impossible; porque impossible es que numero y cosas sean yguales a cifra, y que 1. co. sea ygual a $\tilde{m} \cdot 79$. y si entendio que $\tilde{m} \cdot 79$. es aun menos que nihil, a que llaman debito, esto es mera vanidad y pura contradition."[1])

Mais il y a bien plus étonnant encore. NUÑEZ n'admet pas même que l'inconnue puisse avoir pour valeur zéro. Que s'il opère parfois comme si cette hypothèse était licite, il s'en excuse en invoquant l'usage et en protestant contre lui. Il s'agit cette fois de l'équation

$$40 = 40 + \frac{3}{5}x, \quad \text{d'où} \quad 0 = \frac{3}{5}x, \quad \text{et} \quad x = 0.$$

„Esto que, dit-il, en este caso auemos obrado ygualando 40. con $40 \cdot \tilde{m} \cdot \frac{3}{5} \cdot co.$ y concluyendo que cifra de numero es ygual a $\frac{3}{5} \cdot co.$ es lo que communmente los Arithmeticos practicos dizen, pero es fuera de my opinion, y lo contrario tengo escripto."[2])

Pour achever de caractériser le *Libro de Algebra* je dirai que NUÑEZ y suppose connues toutes les opérations de l'arithmétique élémentaire. Quant au calcul algébrique, voici un exemple de la division avec sa preuve par la multiplication. Il s'agit de

$$(12x^3 + 18x^2 + 27x + 17) : (4x + 3)$$

ce qui donne pour quotient

$$3x^2 + 2\frac{1}{4}x + 5\frac{1}{16} + \frac{1\frac{13}{16}}{4x+3}.$$

On remarquera que le diviseur s'écrit à gauche du dividende et le quotient au dessous de toute l'opération. La disposition entière des calculs s'écarte beaucoup de celle qui était alors généralement en usage.[3])

1) F° 224 r°. — Voir aussi f° 126 v° etc.

2) F° 165 v°. — Voir aussi f° 21 r°, f° 126 v°. etc.

3) F° 32 r°. L'attention a déjà été appelée, par M. TROPFKE, sur cette disposition des calculs de la division algébrique chez NUÑEZ (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Berlin 1902, p. 325).

„Partidor. $4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3$ $12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

$12 \cdot cu \cdot p\ 9 \cdot ce.$

$9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

$9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 6 \cdot co \cdot \frac{3}{4} \cdot$

$20 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

$20 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 15\frac{3}{16} \cdot$

$1\frac{13}{16} \cdot$

$3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5\frac{1}{16} \cdot \tilde{p} \cdot 1\frac{13}{16} \cdot$

par $\cdot 4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3.$

„La prueua sera que multiplicando $\cdot 3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5\frac{1}{16} \cdot \tilde{p} \cdot 1\frac{13}{16} \cdot$ partidor $4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3 \cdot$ por el partidor haremos la summa principal.

$3 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 2 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 5\frac{1}{16} \cdot$

$4 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 3.$

$12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 20 \cdot co \cdot \frac{1}{4} \cdot$

$9 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 6 \cdot co \cdot \frac{3}{4} \cdot \tilde{p} \cdot 15\frac{3}{16} \cdot$

$1\frac{13}{16} \cdot$

$12 \cdot cu \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot ce \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot co \cdot \tilde{p} \cdot 17.$

III.

On a dit que Nuñez n'avait guère traité la résolution de l'équation du 3e degré.[1]) C'est une indication qui doit être modifiée. Il donne la règle de solution avec plusieurs exemples. Bien plus il énonce même cette règle dans le texte italien original de Tartaglia. La voici telle qu'on peut la lire dans le *Libro de algebra*.[2])

1) Voir Ch. Hutton, *Tracts on mathematical and philosophical subjects* II, London 1812, p. 251: „... without treating on cubics, further than giving some account of the dispute between Tartelea and Cardan concerning their invention; and that in such manner as shows he did not very well understand them".

2) F° 334 r°.

Quando chel cubo con le cose apresso
Se agualia a qualche numero discreto
Trouan dui altri differenti in esso,
Dapoi terrai questo per consueto
Ch'el lor producto sempre si eguale
Al terzo cubo delle cose neto,
El residuo poi suo generale
Delli lor lati cubi ben sotrati
Varra la tua cosa principale.[1])

En style moderne ces vers connus signifient, je crois utile de le rappeler, soit à résoudre

$$x^3 + ax = b$$

déterminez deux inconnues auxiliaires y et z, au moyen des équations

$$y - z = b, \quad yz = \left(\frac{a}{3}\right)^3$$

et vous aurez l'inconnue principale par

$$x = \sqrt[3]{y} - \sqrt[3]{z}.$$

Nuñez, il est vrai, s'arrête ici, tandisque dans ses célèbres vers à Cardan, Tartaglia résout encore

$$x^3 = ax + b \quad \text{et} \quad x^3 + b = ax.$$

Mais la résolution du premier cas suffit au but de Nuñez, car d'après lui, si la règle de Tartaglia est correcte, elle n'est pas pratique à cause de sa complication de radicaux et il faut trouver autre chose.

Voici, en résumé, son très intéressant raisonnement.

Considérons, dil-il, l'équation[2])

$$x^3 + 3x = 36.$$

Il est bien aisé de s'assurer que sa racine est 3. C'est effectivement la seule racine réelle, les deux autres étant $\frac{1}{2}\left(-3 \pm \sqrt{-39}\right)$. Or en appliquant la règle de Tartaglia on trouve

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}.$$

Considérons ensuite l'équation[3])

$$x^3 + 9x = 54$$

1) Voir le commentaire de ces vers chez Cossali: *Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell'algebra* II, Parma 1799, p. 154 et suiv. ou chez Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2², p. 488—489. Je conserve l'orthographe de Nuñez.

2) F° 340 v°. 3) F° 340 v°—341 r°.

Il est de nouveau aisé de s'assurer que sa racine est 3. C'est encore une fois la seule racine réelle, puisque les deux autres sont

$$\frac{3}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-7}\right).$$

Mais en appliquant la règle de Tartaglia on trouve

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{756} + 27} - \sqrt[3]{\sqrt{756} - 27}.$$

Et maintenant il faut céder la plume à Nuñez.[1])

„Ny aura", dit-il, „Arithmetico de tan sotil ingenio, que proponendiole estas dos quantidades

$$R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 325 \cdot \tilde{p} \cdot 18 \cdot \tilde{m} \cdot R \cdot V\ cu \cdot R \cdot 325 \cdot \tilde{m} \cdot 18.$$

$$\left(= \sqrt[3]{\sqrt{325} + 18} - \sqrt[3]{\sqrt{325} - 18}\right)$$

y[2])

$$R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 756 \cdot \tilde{p} \cdot 27 \cdot \tilde{m} \cdot R \cdot V \cdot cu \cdot R \cdot 756 \cdot \tilde{m} \cdot 27.$$

$$\left(= \sqrt[3]{\sqrt{756} + 27} - \sqrt[3]{\sqrt{756} - 27}\right)$$

pueda conoscer que son yguales, y valo pero cada vna dellas 3. Y el impedimento es, venir el valor de la cosa explicado por quantidades irracionales, y los binomios las mas vezes no seren cubos."

Voilà qui est clair et qui explique bien la manière de faire de Nuñez. Il expose un des cas de la règle de Tartaglia, ce qui est très suffisant pour la faire connaître. S'il ne s'étend pas sur les autres, c'est parce qu'à son avis, cette règle est, en fait, peu pratique. Même quand la racine est en réalité rationnelle, comme dans les exemples donnés ci dessus, on la trouve sous une forme si compliquée de radicaux qu'on ne saurait pas y reconnaître la véritable valeur rationnelle de cette racine. Pour résoudre l'équation du 3e degré il faut donc s'y prendre autrement que Tartaglia.

Le procédé de Nuñez est ingénieux et devait devenir fécond entre les mains de ses successeurs. Tel qu'il l'expose il est évidemment moins pratique encore que celui qu'il critique, mais il l'est pour d'autres motifs. Pour qu'on puisse en juger le voici, en deux mots[3]):

Soit

$$x^3 = ax^2 + bx + c$$

l'équation du 3e degré, dans laquelle l'auteur distingue plusieurs cas d'après les signes de a, b et c. En retranchant préalablement aux deux membres une quantité convenablement choisie, on pourra toujours leur

1) Nuñez commet ici une faute de plume et écrit deux fois 576 pour 756.

2) F° 341 r°.

3) Il fait l'objet du chapitre 1 de la 3e partie, f° 123 v°—133 r°.

trouver un diviseur commun du premier degré en x, et après l'avoir supprimé, la proposée sera ramenée au second degré.

Pour nous, l'exactitude de cette règle est intuitive; car soit p une racine de la proposée, en en retranchant membre à membre

$$p^3 = ap^2 + bp + c$$

il vient

$$x^3 - p^3 = a(x^2 - p^2) + b(x - p)$$

qui se décompose en

$$x - p = 0 \quad \text{et} \quad x^2 + px + p^2 = a(x + p) + b.$$

Mais la lecture de NUÑEZ laisse cependant l'impression qu'il n'a entrevu que d'une manière assez confuse ce raisonnement si simple. On se demande surtout s'il a apercu que $x = p$ est toujours l'une des racines de l'équation, même quand p est négatif.

Quoiqu'il en soit, et la remarque est importante, NUÑEZ dit en termes exprès[1]) qu'on n'a pas encore découvert la règle générale à suivre, pour trouver à coup sur le nombre à retrancher aux deux membres et rendre ainsi possible l'abaissement du degré de l'équation.

Il donne cependant à ces sujets quelques conseils.

Le premier est de savoir par coeur les résultats des produits[2])

$$(x + 1)(x + 1), \quad (x + 1)(x + 2), \quad (x + 1)(x + 3), \ldots$$

$$(2x + 1)(x + 1), \quad (2x + 1)(x + 2), \ldots$$

et ainsi de suite jusqu'à 10.

Il indique ensuite certaines formes particulières de l'équation pour lesquelles le diviseur se trouve d'après une règle générale.

Si la proposée est de la forme[3])

$$x^3 = (a + 1)x + a,$$

ajoutez l'unité aux deux membres, il vient

$$x^3 + 1 = (a + 1)(x + 1)$$

et l'on peut supprimer $x + 1$.

Plus généralement, et cette généralisation est exprimée très explicitement, étant donnée[4])

$$x^3 = ax + b$$

s'il existe entre a et b une relation de la forme $p^3 = ap - b$, il vient

$$x^3 + p^3 = a(x + p)$$

et l'on peut diviser par $x + p$.

1) F° 125 v°. 2) F° 125 v°. 3) F° 126 r° et v°.
4) F° 126 r°—127 r°.

De même, de[1])

$$x^3 + a = (a+1)x$$

on tire

$$x^3 - 1 = (a+1)(x-1)$$

et $x-1$ est facteur commun. Après l'avoir supprimé l'équation est abaissée au 2^d degré.

Généralisation analogue à la précédente. Si dans[2])

$$x^3 + b = ax$$

il existe entre a et b, la relation $p^3 = ap - b$, il vient

$$x^3 - p^3 = a(x-p)$$

et l'on pourra affirmer, sans raisonnement ultérieur, „sin otro discurso“, que $x = p$ est toujours racine. Mais cette racine n'est pas la seule. Supprimons aux deux membres le facteur $x - p$, l'équation du 2^d degré obtenue fournira les racines restantes.

Les quatre équations générales[3])

$$\begin{aligned}(1+a+b)x &= x^3 + ax^2 + b\\ (1+a+b)x^2 &= x^3 + ax + b\\ ax^2 + bx &= x^3 + (a+b-1)\\ ax^2 + b &= x^3 + (a+b-1)x\end{aligned}$$

admettent toutes la racine $x = 1$. Elles peuvent s'écrire respectivement:

$$\begin{aligned}x^3 - 1 &= (x-1)(b+1-ax)\\ x^3 - 1 &= (x-1)[(a+b+1)x + b + 1]\\ x^3 - 1 &= (x-1)(ax + a + b)\\ x^3 - 1 &= (x-1)(ax - b + 1)\end{aligned}$$

Pour obtenir les autres racines, on supprime aux deux membres le diviseur commun $x - 1$ et on égale les quotients obtenus

Enfin les trois équations générales[4])

$$\begin{aligned}ax^2 + a &= x^3 + x\\ ax + a &= x^3 + x^2\\ ax^2 + ax &= x^3 + 1\end{aligned}$$

admettent toutes un diviseur commun aux deux membres. Ce diviseur est $x^2 + 1$ pour la première équation et $x + 1$ pour les deux autres.

Toute cette théorie de l'abaissement du degré des équations est très intéressante. Elle frappa vivement les contemporains de Nuñez qui ne

1) F° 127 r° et v°. 2) F° 127 v°—128 r°. 3) F° 128 r°—132 r°.
4) F° 132 r°—133 r°.

lui ménagèrent pas leurs éloges. Ces éloges ont même fait croire à quelques historiens que NUÑEZ était l'inventeur du procédé de la recherche du plus grand commun diviseur algébrique, par la voie des divisions successive des polynômes l'un par l'autre. M. MAURICE CANTOR[1]), par exemple, sans se prononcer cependant pour cette opinion d'une manière tout à fait catégorique, invoque en sa faveur le passage que voici du livre II de *L'Arithmétique* de SIMON STEVIN[2]):

„Probleme LIII.

Estant donnez deux multinomies algebraiques, trouver leur plus grande commune mesure.

Nota. PETRUS NONIUS au commencement de la troisiesme partie de son Algebre, estimoit qu'alors ce probleme n'estoit par generale reigle inuenté[3]); parquoi il en descripuoit quelque maniere a tastons. Nous descriprons sa legitime construction, qui sera semblable à l'operation de l'inuention de la plus grande commune mesure des nombres Arithmetiques entiers du 5 probleme: à sçauoir on diuisera premierement le maieur par le moindre, et puis le diuiseur autrefois par la reste, iusques à ce qu'il ne reste rien.“

Ce passage est équivoque et on conçoit que ceux qui n'avaient pas le texte de NUÑEZ sous les yeux aient pu s'y tromper. A la décharge du géomètre flamand il ne faut pas oublier que, contrairement à son habitude, il a écrit son *Arithmétique* en français, langue qu'il ne maniait, ni avec la facilité, ni avec la précision de sa langue maternelle.

Quoiqu'il en soit, nous venons de résumer intégralement la recherche „à tastons“ de la commune mesure des „multinomies“ chez NUÑEZ. Eh bien! non seulement STEVIN a raison quand il dit que l'algébriste portugais n'a pas inventé une „reigle generale“ pour la recherche du plus grand commun diviseur algébrique, mais avec sa modestie habituelle il lui donne même trop de part dans la découverte, car pas un seul des exemples de NUÑEZ n'est traité par voie de division des deux „multinomies“ données l'une par l'autre.

Qu'en conclure?

Que la lecture de NUÑEZ a probablement suggéré à STEVIN l'idée de rechercher une méthode générale pour déterminer le plus grand commun diviseur de deux polynomes en imitant „l'invention de la plus grande commune mesure des nombres arithmetiques entiers“. Voilà, pour ma

1) *Vorlesungen* 2^2, p. 389.

2) *L'Arithmetiqve de SIMON STEVIN de Brvges* . . . A Leyde, De l'Imprimerie de Christophle Plantin. CIↃ.IↃ. LXXXV, p. 240. — Reproduit dans les *Oeuvres*, Leyde 1634, tom. I, p. 56.

3) *Libro de algebra*, f° 124v°.

part, le sens que j'attache à sa Note. Quant à la découverte elle-même de la méthode, le mérite lui en appartient.

Il est bien clair, d'après ce qui précède, qu'on jugerait mal le *Libro de algebra* en disant simplement, sans correctif, que Nuñez n'y traite pas la résolution de l'équation du 3e degré. La vérité est qu'il ne la traite pas à la manière de Cardan. A tort ou à raison il regarde la formule Tartaglia-Cardan comme manquée, même en dehors du cas irréductible, parce qu'elle est trop compliquée de radicaux. En cela il n'est pas le seul, et dans son essai historique sur la résolution des équations, Adrien Romain n'est pas moins catégorique que lui. A preuve ce passage[1]):

„Inter omnes aequationes quae sequuntur aequationes gradus secundi, primo occurrit aequatio gradus tertii affecti gradu primo (c. à d. de la forme $x^3 \pm ax \pm b = 0$). Eam vero hactenus perfecte et generaliter exhibuit nemo. Hieronymus Cardanus (*libro artis magnae*, cap. 25) ut aequationes gradus tertii affecti gradu primo exhibeat, nullam potest invenire regulam generalem, sed exhibet regulas particulares quindecim, quae sane nec ipsae ne ex minimā parte satisfaciunt."

Les formules de Cardan „ne ex minimā parte satisfaciunt". Comme Nuñez, Romain est donc d'avis qu'il faut trouver mieux et il ajoute qu'il y est arrivé.[2])

En quoi consistait sa méthode?

La partie de l'*In Mahumedis Algebram* où il l'expliquait est malheureusement perdue. On peut cependant la deviner par les calculs qu'il nous a laissés dans ses autres ouvrages. Le *Mathematicae analyseos triumphus*[3]) notamment permet d'affirmer qu'elle avait de l'analogie avec la méthode exposée par Simon Stevin dans son *Appendice algebraique.*[4])

1) *In Mahumedis Algebram*, p. 12. — Voir sur ce rarissime ouvrage mon mémoire: *Le fragment du commentaire d'Adrien Romain sur l'algèbre de Mahumed ben Musa el Chowarezmi*, publié dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles **30**: 2, 1906, p. 267—287. 2) O. c. p. 15.

3) *Mathematicae analyseos Trivmphvs in qvo lateris enneagoni circvlo inscripti ad Radium Circuli exhibetur ratio à Geometris summè desiderata. Ad Illmum & Rmum Principem ac Dominum, D. Ivlivm, Episcopum Herbipolensem, & Franciae Orientalis Ducem, &c. Authore A. Romano, Equite Aurato, Comiti Palatino, Medico Caesareo, atq; ad D. Ioannis Evangelistae Herbipoli Canonico.* Lovanii, Sumptibus authoris. Anno 1609. — J'ai analysé cet ouvrage très rare, dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles **29**: 1, 1905, p. 77—79, d'après un exemplaire appartenant à l'Université de Munich, où il est coté, 199 *Math.*

4) *Appendice Algebraique, de Simon Stevin de Brvges, contenant regle generale de toutes équations.* — *L'Appendice* sort des presses de François van Raphelengen de Leyde. L'exemplaire que j'en connais appartient à l'Université de Louvain, où il est coté *Scienc.* 587. Albert Girard l'a introduit presque intégralement dans le texte même de son édition de *L'Arithmétique de Simon Stevin de Bruges*, Leyde 1625,

Elle reposait évidemment sur ce principe fondamental de la résolution des équations numériques, que deux nombres comprennent entre eux une racine de l'équation, si, substitués dans son premier membre, il lui font prendre des signes contraires.

Nuñez n'a pas été aussi loin, et encore une fois, réduite à de purs tâtonnements, sans règle pour les diriger, sa méthode a des défauts d'un genre différent il est vrai de ceux des formules de Cardan, mais qui l'empêche d'avoir, en pratique, sur ces formules, une supériorité marquée.

Quant à Adrien Romain, il connaissait certainement le *Libro de algebra.* J'en ai la preuve incontestable, car je me sers de l'exemplaire même qui a appartenu à l'illustre professeur de Louvain et de Wurzbourg. Serait-il téméraire d'affirmer qu'il a été frappé par les efforts tentés par Nuñez pour trouver directement une première racine de l'équation et que la lecture de l'algébriste portugais lui a suggéré l'idée de rechercher une règle générale pour y arriver? Quoiqu'il en soit de cette intéressante question d'influence, le mérite d'avoir découvert la règle n'en reviendrait pas moins au géomètre flamand.

IV.

Quant aux équations de degré supérieur à 3, Nuñez, à l'instar des mathématiciens arabes et des algébristes de la renaissance, ne s'occupe que de celles de la forme[1])

$$x^{2m} + a x^m + b = 0$$

dont la résolution peut être ramenée à celle d'une équation du 2^d degré. Outre l'équation générale[2]), il traite, entre autres, de cette manière[3])

$$3x^3 + x^6 = 88, \quad 16x + x^7 = 10x^4.$$

Pour terminer cette note, j'ajoute un mot sur la résolution des équations à plusieurs inconnues.

Cette théorie fait chez Nuñez l'objet du chapitre 6 de la 3^e partie intitulé: „De la regla de la quantidad simple o absoluta.“[4]) La *quantidad,* on le sait, est la deuxième inconnue. Nuñez ne la représente ni par une deuxième lettre, ni même par une deuxième abréviation, il écrit toujours le mot quantidad au long. J'ai déjà observé ailleurs[5]) combien d'algébristes du 16^e siècle, même parmi les plus éminents, n'avaient pas apprécié

p. 351—355 (dans les *Oeuvres,* Leyde 1634, p. 88—89) et en a fait sous le nom de „Reigle“ un corollaire du Probleme LXXVII. Cantor expose la méthode de Stevin dans ses *Vorlesungen* 2^2, p. 628—629.

1) F° 150 r°—151 v°.

2) F° 150 r°.

3) F° 150 v°.

4) F° 224 v°—227 v°

5) *L'Algebre de Jacques Peletier,* publié dans la Revue des questions scientifiques de la société scientifique de Bruxelles 7_3 1, 1907, p. 117—173.

l'utilité des lettres multiples pour représenter les diverses inconnues. Au moment où j'écrivais, je n'avais pas lu Nuñez, car j'eus pu ajouter son nom à ma liste. S'il expose la résolution des équations à plusieurs inconnues, et il l'expose bien, c'est surtout dans le but avoué de démontrer que la méthode est compliquée et qu'il vaut mieux s'en passer.[1]) C'est là aussi, on le sait, l'avis de Gemma Frisius.[2]) Mais qui plus est, Frisius fait cette réflexion en marge de son exemplaire de l'*Arithmetica integra* de Stifel! De Stifel, tant plus clair cependant que Cardan, seul connu par Nuñez!

Tout ce chapitre 6 du *Libro de algebra* est des plus intéressants. L'auteur commence par y résoudre un problème de Cardan.[3])

„Tres erant viri pecuniam habentes", avait dit Cardan. „Primus cum dimidio reliquorum habuit aureos 32. Secundus cum reliquorum tertia parte 28. Tertius cum reliquorum parte quarta 31. Quaeritur quantum quisque habuit?"

L'intérêt du problème provient de ce qu'on le retrouve repris avec les mêmes données numériques par plusieurs des principaux algébristes du seizième siècle et notamment par Peletier.[4]) Il est amusant et surtout instructif, de voir ces maîtres se buter à des difficultés qui de nos jours n'embarrasseraient plus les tout commençans. Peletier après avoir reproduit, comme il le dit, „de poinct en poinct" la solution de Cardan en critique la longueur et la complication; puis il en essaie une solution meilleure dans le style de Stifel. Il y a progrès, mais c'est encore loin de la perfection.

A l'exemple de Peletier, Nuñez suit aussi pas à pas Cardan, tout en imprimant à l'ensemble de la question une marque fort personnelle. Et tout d'abord l'énoncé prend chez lui ce tour abstrait, déjà si moderne, qui donne tant de charme à tout son ouvrage. Les écus, les tonneaux

1) „Ieronymo Cardano hallo muchas Reglas de quantidad, por las quales resuelue muchas questionos que trae, podiendo se muy bien resoluer por las Reglas de la cosa, y con mas facilidad. Y para que esto que dizimos conste ser assi, trataremos vna question suya que por la quantidad resuelue, la qual es esta . . .", f° 226 v°.

2) *Le Commentaire de Gemma Frisius sur l'Arithmetica integra de Stifel* par H. Bosmans, publié dans les Ann. de la soc. scientifique de Bruxelles **30**: 1, 1906, p. 168.

3) *Artis magnae*, cap. 9. Dans les *Hieronymi Cardani Opera*, **4**, Lugduni M. DC. LXIII, p. 241—242.

4) *L'algebre de Iaqves Peletier du Mans departie en deus Liures* . . . A Lion. Par Ian de Tovrnes. M. D. LIIII . . ., p. 107—110. — *Iacobi Peletarii Cenomani, De occvlta parte nvmerorum, qvam algebram vocant, libri duo.* Parisiis, Apud Gulielmum Cauellat . . . 1560 . . ., f° 31 r° et v°.

de vin, les aunes de drap sont bien loin; il s'agit tout bonnement de la recherche de trois nombres.[1] „Tenemos tres numeros", dit-il, „que el primero con la mitad de los otros, haze 32; y el segundo con el tercio de los otros dos, haze 28; y el tercero con el quarto de los otros dos, haze 31; y queremos saber quanto es cada vno dellos?"

La solution de Nuñez, nous venons de le dire, est celle de Cardan. Il y passe par des calculs analogues à ceux de l'algébriste italien, mais notablement plus courts et plus simples. Cependant ils ne le satisfont pas, aussi les termine-t-il par cette réflexion.[2] „Pero nos auemos tratado este mismo exemplo, que es el caso 51, y lo practicamos muy facilmente, y breuemente por la cosa, sin vsar de la quantidad absoluta." Le problème 51 du chapitre 5 de la 3e partie[3] est effectivement le même que celui qui nous occupe et il y est résolu au moyen d'une seule inconnue. Cette solution n'appelle pas de remarque; je n'y insiste pas.

Je suis loin d'avoir signalé tout ce que le *Libro de algebra* renferme de curieux, mais ce que j'en ai dit suffit à prouver sa haute valeur. C'est un ouvrage digne de l'estime dont il jouit au 16e siècle.

---

1) F° 224 v°. 2) F° 225 v°. 3) F° 169 v°—170 r°.

Sur l'auteur de l'„Histoire de la roulette" publiée par Blaise Pascal.

Par M. Stuyvaert à Gand.

Je voudrais présenter ici quelques observations que m'ont suggérées la lecture de certaines œuvres de B. Pascal et la comparaison que j'en ai faite avec l'exposé de M. Cantor dans le 2e tome de ses *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.*

En parlant de l'*Histoire de la Roulette*, M. Cantor dit (p. 883 de la 2e édition) que Pascal se fit l'interprète de Roberval quand ce dernier accusa publiquement Torricelli de larcin scientifique. En d'autres termes, le jugement sévère que M. Cantor porte sur l'*Histoire de la Roulette* atteint Roberval autant que Pascal: tous deux ont, d'après lui, leur part de responsabilité dans cet écrit. Telle est aussi l'opinion de P. Tannery (*Pascal et Lalouvère;* Mém. de la soc. des sc. phys. et nat. de Bordeaux 5_3, 1889, p. 55—84) qui cite presque indifféremment Roberval ou Pascal comme auteur de l'*Histoire de la Roulette.*[1])

Je me demande s'il n'y a pas à faire un pas de plus, et si l'on ne doit pas attribuer à Roberval la rédaction proprement dite de la pièce intitulée *Histoire de la Roulette*, ou au moins d'une notable partie de cet écrit.

Bien que je n'attache qu'une importance relative à des détails de style, je note cependant, dans la pièce en question, les passages suivants (*Œuvres complètes* de Blaise Pascal III, Paris 1866, p. 337): „il espéra *de* tirer de lui la solution de la Roulette . . ."; et plus loin: „ce fut alors qu'il commença *de* l'appeler par ce nom tiré du grec . . .". Or Pascal ne se sert pas habituellement de ces expressions. Nous le voyons au con-

1) L'édition originale de cet écrit est anonyme et ne porte ni lieu ni année d'impression. Le titre est: *Histoire de la rovlette Appellée autrement la trochoïde ov la cycloïde où l'on rapporte par quels degrez on est arriué à la connoissance de la nature de cette ligne.* L'écrit est composé de 8 pages in 8°; et à la fin se trouve le date: „ce 10me Octobre 1658". Il y a une édition latine avec le titre: *Historia trochoidis siue cycloïdis, gallicè, la roulette. In qua narratur quibus gradibus ad intimam illius lineae naturam cognoscendam peruentum sit.* Cette édition, qui est aussi anonyme et ne porte ni lieu ni année d'impression, contient 8 pages in 8°. La bibliothèque nationale de Paris possède les deux éditions.

traire écrire à M. Le Pailleur (ibid. p. 50) „j'espère vous faire voir . . ."; et, dans la *Suite de l'Histoire de la Roulette* (ibid. p. 354), „ce fut dans le mois de septembre qu'il commença *à* écrire . . .". Ainsi Pascal n'emploie pas la préposition *de* après les verbes *espérer* et *commencer*, au moins pas toujours; il est possible toutefois que l'on rencontre des exemples du contraire, notamment dans les *Provinciales.*

Lorsque je lis dans l'*Histoire de la Roulette* (ibid. p. 338): „on reçut leurs solutions presque en même temps, l'une de M. de Fermat . . ., l'autre de feu M. Descartes et toutes deux différentes de celle de M. de Roberval; de telle sorte qu'en les voyant toutes, il n'est pas difficile de reconnaître quelle est celle *de l'auteur;* car il est vrai qu'elle a un caractère tout particulier et qu'elle est prise par une voie si belle . . .", le mot que je viens de souligner doit désigner pour moi *l'auteur* du texte que j'ai sous les yeux, au moins si je m'en rapporte à l'usage actuel, mais au XVIIème siècle l'usage était sans doute différent, et le mot souligné doit désigner *l'auteur de la Roulette.* En tout cas ce passage présente une certaine obscurité que n'a pas d'ailleurs la version latine (ibid. p 344): „*ita tamen ut qui eas omnes videat, illico illius demonstrationem internoscat qui primus problema dissolvit*". La même obscurité se rencontre un peu plus loin, car je lis (ibid. p. 340): „je lui fis donc mander que cette voie de la première découverte était la quadrature que *l'auteur* avait trouvée . . .". C'est encore moi qui souligne le mot auteur désignant Roberval et remplacé dans le texte latin par Robervallius.

Ce sont là des arguments assez minces pour décider si Roberval a rédigé tout ou partie de l'*Histoire de la Roulette.* On peut avoir des raisons plus fortes de croire la chose quand on s'est habitué au style de B. Pascal: alors on a *l'impression* que le morceau n'est pas de lui. Mais une impression est quelque chose de personnel et de difficile à communiquer. Toutefois je ferai remarquer que Pascal, peut-être pour avoir trop usé du dilemme, avait contracté l'habitude, presque la manie de phrases à deux membres symétriques. Or des phrases de ce genre on n'en rencontre guère dans l'*Histoire de la Roulette,* tandis qu'elles abondent dans d'autres écrits, notamment dans la *Suite de l'Histoire de la Roulette,* d'où je tire les deux exemples suivants: (l. c. p. 353) „. . . s'il eût eu en main les méthodes et les démonstrations géométriques de la vérité, ce n'eût pas été par cette conformité qu'il se fût assuré de sa solution — mais qu'il en eût jugé plutôt, et de celle de M. de Roberval même par ses propres preuves . . ."; (ibid. p. 353—354) „. . . qu'il n'y a point assurément de déshonneur à n'avoir point résolu un problème, qu'il y a peu de gloire à y réussir — et qu'il y a beaucoup de honte à s'attribuer des inventions étrangères".

Sans doute on a prétendu, je le sais bien, qu'il n'est guère possible de distinguer l'un de l'autre, à leur style, les grands prosateurs du XVII[ième] siècle; mais, en disant cela, on a surtout en vue Pascal, Arnault, Nicole. En est-il de même de Roberval?

Que Pascal ait eu sous la main une note écrite de Roberval, ou que celui-ci lui ait donné ses renseignements de vive voix, la chose en somme n'importe pas tant. L'essentiel, comme M. Cantor le démontre, est que Pascal n'a pu prendre ses informations que chez Roberval. Un détail pourrait peut-être faire douter un instant: l'éloge que l'*Histoire de la Roulette* fait de Roberval est tellement outré que l'on pourrait hésiter à attribuer le texte à Roberval même, si l'on ne savait pas, d'autre part, que la vanité humaine est sans bornes.

Je ne pense pas que Pascal se soit jamais montré historien de mathématiques très érudit, et en 1658 il s'était depuis longtemps éloigné de l'étude des sciences exactes. Or il est remarquable combien l'*Histoire de la Roulette* est précise en ce qui concerne la quadrature de la cycloïde; elle cherche à établir la date de cette découverte (1636) avec un luxe de détails qui trahit encore Roberval. Par contre, en ce qui concerne la cubature du solide engendré par la cycloïde, et surtout la question des tangentes, on ajoute, sans grand appareil d'arguments, que ces deux problèmes furent résolus par Roberval *dans ce même temps*, et que „l'invention des touchantes se fit par une méthode qu'il trouva *alors* et qu'il divulgua *incontinent*". Ces locutions sont passablement élastiques et leur manque de précision serait un manque de bonne foi si, comme M. Cantor l'établit (l. c. p. 890), la méthode en question, qui est la composition des mouvements, n'a pu être appliquée par Roberval à la cycloïde qu'en 1639 au plus tôt.

Que les arguments invoqués par Roberval pour établir son droit de priorité soient valables ou non, je dois admettre que Pascal les a trouvés probants; rien ne m'autorise à douter de sa sincérité sur ce point. Mais alors, dans les *Problemata de Cycloïde* (l. c. III, p. 322), où il n'a cité que Galilée et Torricelli, il a, dans son esprit, fait tort involontairement à Roberval, son aîné, l'ami de son père, un des familiers de sa maison. Il peut avoir eu de regrets dans la suite; Roberval peut s'être plaint: le *post-scriptum* des *Réflexions sur les prix concernant la Cycloïde* (l. c. p. 333) semble l'écho de cette plainte et annonce une rectification.

Or les détails que Roberval donne pour établir son droit, sont trop nombreux et trop minutieux pour être transmis oralement. Rien d'impossible à ce que Pascal ait reçu de Roberval des renseignements écrits et qu'il ait, par scrupule de sincérité, respecté le texte de son ami.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3 : **12, 15, 22, 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162, 163—165,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 61—64.

1^3 : 163—165. Zu der Stelle in PLATONS *Timaeus* S. 32 B, die von den mittleren Proportionalen handelt, hat Herr JUNGE (BM **8**$_3$, 1907, S. 64) bemerkt, daß die Stelle den Begriff des Irrationalen nicht enthält. Folgende Bemerkung betrifft dieselbe Stelle, aber eine andere Frage, nämlich die, wie PLATON dazu kam zu behaupten, daß Flächen durch ein, Körper aber niemals durch ein, sondern immer durch zwei Mittelglieder verbunden werden. Herr CANTOR erklärt diesen Ausspruch PLATONS in der dritten Auflage in derselben Weise wie in den früheren Auflagen. Die Flächen und Körper sollen nur als Zahlen angesehen werden können. Daraus zieht Herr CANTOR Schlüsse auf die arithmetischen Kenntnisse der pythagoreischen Schule und PLATONS. Ich glaube in meiner von Herrn CANTOR nicht erwähnten Abhandlung *Über zwei Stellen in Platons „Timaeus" und im Hauptwerke von Coppernicus* (Jahresber. der Fürstenschule zu Grimma 1898) nachgewiesen zu haben, daß die Stelle nicht arithmetisch, sondern durch Bezugnahme auf das delische Problem erklärt werden muß. Ist dies zutreffend, so sind die erwähnten Schlüsse nicht mehr berechtigt. Z. B. darf man dann die Stelle nicht mehr als Beweis dafür ansehen, daß PLATON die Sätze EUKLID VIII: 11—12 gekannt habe.

Aber selbst wenn Herr CANTOR die arithmetische Deutung beibehalten wollte, möchte in der Erläuterung manches anders gestaltet sein. Die *Timaeus*-Stelle hat eine Anzahl eingehender Untersuchungen veranlaßt, von denen Herr CANTOR nur die von MARTIN und HULTSCH anführt. Seine Erklärung schließt sich an MARTIN an, der beim Einschieben der zwei mittleren Proportionalen zwischen zwei Größen die Proportionen nicht in der *stetigen* Form schreibt, die durch die Worte PLATONS verlangt wird: Feuer zu Luft wie Luft zu Wasser und Luft zu Wasser wie Wasser zu Erde. Auf die unrichtige Ansetzung der Proportionen hat BOECKH in seinem *Excursus* (1865), neuerdings wieder Herr JUNGE hingewiesen (*Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* Sonderabdruck, Halle 1907, S. 16). Es ist allerdings anzuerkennen, daß Herr CANTOR

---

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

dieselbe Größe der geometrischen Mittel erhält wie bei der richtigen Einschiebung. Da er nämlich mit Martin als Faktoren der Flächen- und Körperzahlen nur Primzahlen zuläßt (eine Beschränkung, die nach meiner Meinung nicht begründet werden kann), so ergibt sich die von Martin nicht beachtete, von Könitzer (1846) erkannte Notwendigkeit, als Größen, zwischen denen Mittel einzuschieben sind, nur Quadrate und Kuben zu nehmen. Das tut Herr Cantor und verbessert so die Darstellung Martins wesentlich, weil es unter diesen Bedingungen in der Tat zwischen Flächenzahlen nur ein, zwischen Körperzahlen immer nur zwei rationale Mittel gibt, und zwar auch in der Martin-Cantorschen Schreibweise der Proportionen, die freilich dadurch noch nicht gerechtfertigt ist.

Th. Häbler.

1^3 : 165. Der Bericht über Archytas' Satz und Beweis ist mißlungen; $\frac{n}{n+1}$ ist nicht ein Epimorion. Unter Benutzung der Cantorschen Bezeichnungen kann der Beweis des Archytas auf folgende Weise wiedergegeben werden. Nach der Definition (vgl. Boethii Arithmetik I: 24: „superparticularis est numerus ad alterum comparatus, quotiens habet in se totum minorem et eius aliquam partem") ist der Nenner ν des Bruches $\frac{\mu}{\nu}$ durch $\mu - \nu$ teilbar, und da $\mu = \nu + (\mu - \nu)$, so muß, wenn man $\mu - \nu = \delta$ setzt, sowohl μ als ν durch δ teilbar sein. Aber nach der Annahme sind μ und ν relative Primzahlen, also ist $\delta = 1$, oder $\mu = \nu + 1$, was zu beweisen war.

Übrigens ist für Archytas dieser Satz nur ein Hilfssatz. Was er eigentlich beweisen will, ist nämlich, daß, wenn α ein Epimorion und β das entsprechende Hypo-Epimorion ist, so gibt es keine ganze Zahl $\varkappa$ zwischen α und β, die so beschaffen ist, daß $\alpha : \varkappa = \varkappa : \beta$ ist (vgl. Boethii Musik IV : 2).

G. Eneström.

1^3 : 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183, 203, 213, 225, 236, 245, 270, 287, 297, 298, 310, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 64—66.

1^3 : 335. Wenn Herr Cantor sagt (Z. 9—11): „daß auch jene [d. h. Euklides und Archimedes] schon alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorzubringen imstande gewesen seien, ist eine Behauptung, welche auf keinerlei alten Bericht sich stützt", so hat er ganz gewiß recht. Wenn er aber behauptet, daß Apollonios in dieser Beziehung „das vervollständigte, was Euklides und Archimedes nur von der Ellipse wußten", so geht er zu weit. Aus der von Eutokios aufbewahrten Angabe des Geminos, die den Ausdruck: ὕστερον Ἀπολλώνιος καθόλου τι ἐθεώρησεν enthält, darf man nicht mit Bestimmtheit folgern, daß kein einziger Mathematiker vor Apollonios die fragliche Beobachtung gemacht hatte, sondern nur, daß Geminos keine ältere Schrift als die des Apollonios kannte, wo gelehrt wurde, wie man alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorbringen konnte. Außerdem scheint es, als ob Geminos keine eingehende Kenntnis der Geschichte der Kegelschnitte vor Apollonios gehabt hätte. Zuerst gibt er an, was die Alten gewußt hatten, und erwähnt dann, daß Apollonios „später" die allgemeinere Konstruktion bemerkte. Ob „die Alten" alle Mathematiker vor Apollonios und „später" wirklich „zuerst" bedeutet, ist meines Erachtens unmöglich genau festzustellen. Statt: „was

EUKLIDES und ARCHIMEDES nur von der Ellipse wußten" ist also: „was EUKLIDES und ARCHIMEDES, soweit bekannt ist, nur in betreff der Ellipse angegeben hatten" zu setzen.

Selbstverständlich wäre die Kenntnis von Interesse, ob nicht wenigstens ARCHIMEDES wirklich wußte, daß man alle Kegelschnitte auf jedem Kegel hervorbringen kann. Wenn Herr CANTOR dies in Abrede stellt, so ist wohl der Grund dazu, daß sich seines Erachtens ein ungeheuerer Unterschied („une immense différence") zwischen dem allgemeinen Fall und dem von ARCHIMEDES angegebenen Spezialfall vorfindet (siehe M. CANTOR, *M. ZEUTHEN et sa géométrie supérieure de l'antiquité;* Bullet. d. sc. mathém. **19**$_2$, 1895, S. 67). Meiner Ansicht nach kann der Unterschied für einen Mathematiker ersten Ranges wie ARCHIMEDES nicht besonders erheblich gewesen sein (vgl. die Bemerkung zu **1**^{3}: 310, BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66), und die Frage ist nur, ob ARCHIMEDES irgendeinen Anlaß gehabt hat, sich mit den allgemeinen Fall zu beschäftigen. Aber auf diese Frage dürfte es zurzeit unmöglich sein, eine bestimmte Antwort zu bekommen.

G. ENESTRÖM.

1^3: 335. Vgl. die Bemerkung zu **1**^{3}: 310 (BM **8**$_3$, 1907/8, S. 66).

1^3: 339—340. Es ist sehr erfreulich, daß Herr CANTOR hier in der dritten Auflage einige Notizen zur Geschichte des vom historischen Gesichtspunkte aus wichtigen Problems des „Ortes zu drei oder vier Geraden" bringt, worauf freilich ZEUTHEN in einer schon acht Jahre vor dem Erscheinen der zweiten Auflage veröffentlichten Arbeit aufmerksam machte.

Dagegen bin ich weniger mit dem Schluß des betreffenden Absatzes der dritten Auflage der *Vorlesungen* einverstanden. Nachdem Herr CANTOR die fraglichen Notizen nach APOLLONIOS und PAPPOS mitgeteilt hat, fügt er hinzu (S. 340): „Das ist alles, was aus alten Quellen bekannt ist. Wenn man nun versucht hat, jenes Ortsproblem unter Zugrundelegung des III. Buches des APOLLONIUS vollständig zu erledigen, so kann man in diesem Wiederherstellungsversuche die ganze geometrische Begabung seines Verfassers bewundern, aber ein geschichtliches Ergebnis ist es darum keineswegs". Ich gebe gern zu, daß diese Bemerkung buchstäblich richtig ist, aber es kann nicht der Aufmerksamkeit des Herrn CANTOR entgangen sein, daß seine *Vorlesungen* nicht nur geschichtliche Ergebnisse, sondern außerdem eine überaus große Anzahl von mehr oder weniger wahrscheinlichen Schlußfolgerungen aus solchen Ergebnissen enthalten, und da nicht einmal ZEUTHEN selbst behauptet hat, daß seine Lösung des allgemeinen Problems ein geschichtliches Ergebnis im beschränktesten Sinne sei, so muß die Bemerkung des Herrn CANTOR als durchaus gegenstandslos und darum leicht irreleitend betrachtet werden. Auf der anderen Seite verschweigt Herr CANTOR einen Umstand, der meiner Ansicht nach fast den Wert eines geschichtlichen Ergebnisses besitzt, nämlich daß es Herrn ZEUTHEN gelungen ist, gerade auf Grund der drei letzten Sätze des 3. Buches des APOLLONIOS das Ortsproblem zu lösen für einen gewissen Spezialfall (die vier gegebenen Geraden bilden ein Paralleltrapez), und zwar auf eine sehr einfache Weise, deren Auffindung kaum eine besonders große geometrische Begabung erfordert, wenn die drei Sätze schon vorliegen. Stellt man nämlich diesen Umstand mit

dem Vorworte des Apollonios zusammen, kann man kaum umhin zuzugeben, daß dieser das Problem wenigstens für den erwähnten Spezialfall gelöst hat. Ferner hat Zeuthen gezeigt, daß man durch die Hilfsmittel, die schon vor Apollonios bekannt waren, das allgemeine Problem auf die Lösung des Spezialfalles reduzieren kann, und meiner Ansicht nach verdiente auch dieser Umstand in den *Vorlesungen* erwähnt zu werden. Möglicherweise hat Apollonios den allgemeinen Fall in seiner verlorenen Schrift über den bestimmten Schnitt („de sectione determinata") behandelt (vgl. H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter,* Kopenhagen 1896, S. 215).

G. Eneström.

1³ : 344. Die Angabe, daß eine von Proklos erwähnte Schrift des Apollonios *περὶ τοῦ κοχλίου* (über die Schraube) „von gänzlich unbekanntem Inhalte" ist, konnte sicherlich 1880 sehr verzeihlich sein, aber in einer Arbeit mit dem Druckjahre 1907 ist die Angabe ein wenig auffällig. Schon 1881 bemerkte Paul Tannery (*Quelques fragments d'Apollonius de Perge;* Bullet. d. sc. mathém. 5_2, 1881, S. 125), indem er teils auf Proklos, teils auf eine Stelle bei Pappos hinwies: „Il est donc clair que l'écrit cité par Proclus renfermait au moins la théorie géométrique de l'hélice", und die Richtigkeit dieser Bemerkung kann wohl kaum bezweifelt werden. Etwa gleichzeitig mit Tannerys obenerwähntem Artikel fügte J. L. Heiberg in seine Apollonius-Ausgabe (II, S. 117—118) die betreffenden Stellen aus Proklos und Pappos ein. Seitdem haben auch andere Fachgenossen darauf aufmerksam gemacht, daß Apollonios in der fraglichen Schrift offenbar die Schraubenlinie behandelt hat (siehe z. B. G. Loria, *Il periodo aureo della geometria greca,* Modena 1895, S. 196; K. Tittel, *De Gemini studiis mathematicis,* Leipzig 1895, S. 66).

G. Eneström.

1³ : 344. Außer den von Herrn Cantor erwähnten geometrischen Schriften des Apollonios gab es noch eine elementargeometrische Arbeit, die ebenfalls verloren gegangen ist. Die Aufschlüsse, die Proklos über diese Arbeit bringt, hat P. Tannery (*Quelques fragments d'Apollonius de Perge*; Bullet. d. sc. mathém. 5_2, 1881, S. 124—136) zusammengestellt und erläutert. Nach J. G. van Pesch (*De Procli fontibus,* Leiden 1900, S. 143) hatte Proklos wahrscheinlich die Arbeit selbst zur Hand.

G. Eneström.

1³ : 348. Es scheint mir nicht ganz ohne Interesse zu sein, hier ausdrücklich hervorzuheben, daß Proklos (*In primum Euclidis elementorum librum commentarii*, ed. Friedlein, Leipzig 1873, S. 74) die Arbeit des Apollonius über ungeordnete Irrationalgrößen erwähnt (*τὰ περὶ τῶν ἀτάκτων ἀλόγων, ἃ ὁ Ἀπολλώνιος ἐπὶ πλέον ἐξειργάσατο*). Wie es jetzt steht, ist es nicht klar, was Herr Cantor mit den zwei parenthetischen Zusätzen „*τεταγμένος* des Proklus" und „*ἄτακτος*" meint.

G. Eneström.

1³ : 351, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 66.

1^3 : 365. Warum es nicht anzunehmen ist, daß POSEIDONIOS von Alexandria ein Werk verfaßt habe, worin die von HERON zitierte physikalische Definition vorkommen könnte, ist mir nicht recht verständlich, aber jedenfalls ist diese Frage von untergeordneter Bedeutung. Wichtiger ist dagegen die Frage, ob HERON wirklich POSEIDONIOS von Rhodos gemeint haben kann. Nach der Ansicht des Herrn CANTOR ist dies „wohl möglich", aber aus den von R. MEIER (*De Heronis aetate*, Leipzig 1905, S. 20—21) angeführten Gründen scheint es mir höchst unwahrscheinlich, daß HERON an der fraglichen Stelle von POSEIDONIOS von Rhodos spricht. Der von HERON erwähnte POSEIDONIOS scheint nämlich vor ARCHIMEDES gelebt zu haben und jedenfalls bezeichnet seine Definition einen unvollkommeneren Standpunkt als den des ARCHIMEDES. Will man nicht annehmen, daß sich die Stelle auf POSEIDONIOS von Alexandria bezieht, so muß man meines Erachtens an einen dritten POSEIDONIOS denken, der jedenfalls vor ARCHIMEDES gelebt hat. G. ENESTRÖM.

1^3 : 368. Der von EUTOKIOS in seinem Kommentar zu *De sphaera et cylindro* (siehe ARCHIMEDES, *Opera*, ed. J. L. HEIBERG III, Leipzig 1881, S. 140) erwähnte, sonst durchaus unbekannte HERONAS, der nach EUTOKIOS einen Kommentar zu NIKOMACHOS' Arithmetik verfaßt hat, ist möglicherweise identisch mit dem HERUNDES oder HEROMIDES, den ANARITIUS in seinem Kommentar zu den Elementen zitiert (siehe *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. CURTZE, Leipzig 1899, S. 3—4). Auf diese Möglichkeit hat übrigens auch CURTZE an der soeben erwähnten Stelle hingewiesen.

G. ENESTRÖM.

1^3 : 380, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 66—67.

1^3 : 388. Wenn Herr CANTOR hier Z. 21—30 gewisse Umstände erwähnt, und dann die Bemerkung hinzufügt, daß diese Umstände einander gegenseitig als Stütze zu dienen geeignet sind, so setzt diese Bemerkung voraus, teils daß die sogenannten HERONschen Definitionen und die von HULTSCH herausgegebene Geometrie echt sind, teils daß der POSEIDONIOS, der in HERONS Mechanik erwähnt wird, wirklich POSEIDONIOS von Rhodos ist. Aber die Richtigkeit dieser Voraussetzungen ist zum mindesten sehr unsicher (vgl. oben die Bemerkung zu 1^3 : 365), und dadurch verliert eigentlich der ganze Passus seine Bedeutung. Jedenfalls ist es ungenau zu sagen, daß „POSIDONIUS von Rhodos ... in HERONS Mechanik vorkommt", da Herr CANTOR selbst S. 365 dies Vorkommen nicht als eine Tatsache, sondern nur als „wohl möglich" bezeichnet hat.

G. ENESTRÖM.

1^3 : 406. Der Ansicht, daß die Abhandlung von K. TITTEL *De Gemini studiis mathematicis* (1895) über das mathematische Werk des GEMINOS ziemlich abschließend ist, dürften weder die Philologen noch die Historiker der Mathematik beipflichten, und vermutlich beansprucht Herr TITTEL selbst gar nicht, daß seine, freilich sehr dankenswerte Abhandlung als ziemlich abschließend betrachtet werden soll; ihr vollständiger Titel lautet: *De Gemini stoici*

studiis mathematicis quaestiones philologae. Über die Ansicht eines sachkundigen Philologen siehe Wilhelm Schmidt, *Bericht über griechische Mathematiker und Mechaniker* (1890—1901); Jahresber. üb. d. Fortschr. d. class. Altertumswiss. **108**, 1901, S. 99. Die wichtige Frage, ob der Aganis des Anaritius mit Geminos identisch ist, und, wenn dies wirklich der Fall ist, welche Folgerungen man daraus ziehen kann in betreff des mathematischen Werkes des Geminos, wird in der Abhandlung von Tittel nicht behandelt.

G. Eneström.

1³ : 409. Wie Herr Cantor bei der Bearbeitung der 3. Auflage der *Vorlesungen* dazu gekommen ist, Z. 25 — 26 nach Posidonius die Worte: „der wiederholt durch Heron erwähnt worden ist" einzufügen, ist mir nicht recht verständlich. In den Heronschen Schriften kommt meines Wissens der Name Poseidonios nur ein einziges Mal vor, und dort handelt es sich höchstwahrscheinlich nicht um Poseidonios von Rhodos, sondern um einen anderen Poseidonios, der vor Archimedes gelebt hat (vgl. oben die Bemerkung zu **1**³ : **365**). In ein paar höchstwahrscheinlich unechten Schriften von Heron kommen freilich Sätze vor, die sehr wohl von Poseidonios von Rhodos herrühren könnten, aber, soviel ich weiß, wird der Name Poseidonios dabei gar nicht genannt. Daß der von Anaritius zweimal erwähnte Abthiniatus mit Poseidonios identisch sein kann, will ich nicht in Abrede stellen, aber es wäre wohl fast zu kühn, zu behaupten, daß die zwei fraglichen Stellen, die Anaritius nach seiner eigenen Aussage aus Simplikios entnommen hat, ursprünglich in dem jetzt verlorenen Kommentar des Heron standen. G. Eneström.

1³ : 410. Unter Bezugnahme auf eine Bemerkung von K. Tittel (*De Gemini studiis mathematicis,* Leipzig 1895, S. 65—66) hat Herr Cantor hier Z. 32—33 die Worte: „wenn sie [= die Entdeckung] wirklich ihm [Geminus] zuzuschreiben ist, woran eine spätere Stelle bei Proklos wieder zweifeln läßt" eingefügt. Meines Erachtens wäre es besser gewesen, den ganzen Bericht (12 Druckzeilen) über die „Entdeckung" zu streichen, denn teils ist der betreffende Satz ziemlich belanglos, teils sagt Proclus nur, daß sich der Beweis derselben bei Geminos findet. Außerdem handelt es sich um die Schraubenlinie, und da Herr Cantor diese Raumkurve hier zum erstenmal erwähnt, so kann der Leser leicht glauben, daß Geminos, soweit jetzt bekannt ist, diese Kurve zuerst behandelt hat. Aber in Wirklichkeit ist dieselbe schon von Apollonios untersucht worden (vgl. oben die Bemerkung zu **1**³ : **344**), und wenn man mit Herrn Cantor Heron vor Geminos setzt, so hatte dieser in betreff des fraglichen Gegenstandes noch einen Vorgänger (vgl. Herons Mechanik, Ausg. von L. Nix, Leipzig 1901, S. 104—106).

G. Eneström.

1³ : **429, 431, 432,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67.

1³ : 432. Nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn J. L. Heiberg beruht die in einer früheren Bemerkung (BM 8_3, 1907/8, S. 67) zitierte Angabe von P. Ramus sicherlich auf einem Gedächtnisfehler oder auf einer Verwechselung. Im Kataloge der Bibliothek des Diego de Hurtado de Mendoza

findet sich nämlich keine Handschrift von NIKOMACHOS' Geometrie, wohl aber die arithmetische Schrift und die Sammlung der griechischen Arbeiten über Musik mit Einschluß der Harmonik des NIKOMACHOS. G. ENESTRÖM.

1^3: 433. Die bestimmte Angabe, daß OCREATUS ein „Schriftsteller des XII. S." war, ist etwas auffallend, da Herr CANTOR S. 906 teils keinen Grund angibt, warum OCREATUS in das 12. Jahrhundert zu setzen ist, sondern vielmehr hervorhebt, daß die Form „Baiotensem" auf einen im übrigen unbekannten ATELHART von Bayeux hinweist, teils bemerkt, daß die Pariser Handschrift, wo sich der Traktat des OCREATUS findet, aus dem 13. Jahrhundert stammt. Hier, wie in vielen ähnlichen Fällen, muß man die Erklärung in der ersten Auflage der *Vorlesungen* suchen. Dort gab Herr CANTOR nämlich (S. 777) ausdrücklich an, daß der Lehrer des OCREATUS ATELHART VON BATH war; in die zweite Auflage schaltete er indessen (S. 852) drei Zeilen ein, wodurch diese Angabe als höchst unsicher hingestellt wird, aber ohne den Wortlaut der ersten Stelle, wo OCREATUS erwähnt wird, zu ändern. Vgl. unten die Bemerkung zu 1^3: 906.

Wahrscheinlich beruht der Name „regula NICOMACHI" darauf, daß BOËTIUS, der den Satz $a^2 = (a-d)(a+d) + d^2$ im zweiten Buche (Satz 43) seiner *Institutio arithmetica* aufgeführt und bewiesen hat, dabei bemerkt (ed. FRIEDLEIN, Leipzig 1867, S. 143): „illud quoque subtilius, quod multi huius disciplinae periti nisi NICOMACHUS nunquam antea perspexerunt". Der Satz findet sich auch in JORDANI *Arithmetica* (Satz 3 des 10. Buches), aber ohne daß NIKOMACHOS erwähnt wird. G. ENESTRÖM.

1^3: 452. Hier wäre ein Verweis auf S. 339—340 erwünscht, und dies um so mehr, weil das Register unter dem Stichworte „Aufgabe des PAPPUS" keine vorangehende Stelle angibt, wo die Aufgabe erwähnt wird (diese Stelle muß man im Register unter dem Stichworte „Ort zu 3 oder 4 Geraden" suchen). Daß „seit DESCARTES die Aufmerksamkeit der Mathematiker aufs neue auf sie gelenkt, der Name der Aufgabe des PAPPUS vorzugsweise geblieben ist", ist wohl nicht unrichtig, aber es liegt sehr nahe, die Bemerkung so aufzufassen, als ob der Name von DESCARTES herrührte, oder wenigstens sehr alt wäre. Bei DESCARTES kommt meines Wissens kein besonderer Name vor, denn seine Randanmerkung „Réponse à la question de PAPPUS" besagt ganz wie die Randbemerkung „Exemple tiré de PAPPUS" nur, daß er die Frage aus PAPPOS entnommen hat. Auch nicht bei NEWTON (siehe *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Editio ultima, Amsterdam 1723, S. 70) habe ich den Namen gefunden, und nach ZEUTHEN rührt er von CHASLES her. ZEUTHEN selbst benutzt nicht den Namen „Aufgabe des PAPPUS".

G. ENESTRÖM.

1^3: 464. Das „positive Zeugnis" des ABULFARADSCH, DIOFANTOS sei Zeitgenosse des Kaisers JULIANUS gewesen, dürfte kaum die geringste Bedeutung haben. P. TANNERY hat in seinem Artikel *A quelle époque vivait DIOPHANTE?* (Bullet. d. sc. mathém. 3_2, 1879, S. 264) hervorgehoben, daß ABULFARADSCH allem Anscheine nach den Mathematiker DIOFANTOS mit einem bekannten Sophisten dieses Namens, der wirklich ein Zeitgenosse des JULIANUS war, verwechselt hat. G. ENESTRÖM.

1³ : 488, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67.

1³ : 498. Die Angaben: „Proklus hat also wirklich zu allen Büchern der euklidischen Elementen, wenige ausgenommen, einen Kommentar verfaßt" [Z. 17—19] und „Die Scholien des Proklus zu späteren Büchern hat C. Wachsmuth entdeckt" [Fußnote 3] dürften zu kategorisch sein. In seiner von Herrn Cantor S. 499 zitierten Arbeit weist Heiberg darauf hin, daß das Wort ***προλαμβανόμενα*** im Titel der von Wachsmuth aufgefundenen Scholiensammlung eher bedeutet, daß nur die Scholien zum ersten Buche von Proklos herrühren; und er bemerkt außerdem, daß der Zweifel, ob Proklos seinen Kommentar wirklich fortgesetzt hat, durch das vollständige Stillschweigen aller Quellen von einer solchen Fortsetzung im höchsten Grade gesteigert wird, und daß die Frage auch nicht nach dem von Wachsmuth veröffentlichten Material als erledigt betrachtet werden kann. Dieselbe Ansicht vertritt auch J. G. van Pesch (*De Procli fontibus*, Leiden 1900, S. 56—57). Später hat Heiberg selbst ein Scholium zu Elem. X : 9 aufgefunden (siehe *Paralipomena zu Euclid*; Hermes **38**, 1903, S. 341), worin Proklos als Gewährsmann ausdrücklich genannt wird, aber diesen Umstand betrachtet Heiberg nicht als entscheidend, und er ist nur damit einverstanden, daß die Wachsmuthschen Scholien zu den übrigen Büchern der Elemente aus Proklos exzerpiert sein können. Dagegen ist Wachsmuths Schüler R. Meier (*De Heronis aetate*, Leipzig 1905, S. 27—28) der Ansicht, daß diese Scholien wirklich Proklos zuzuweisen sind. Jedenfalls ist die Frage noch als ein Streitpunkt zu bezeichnen, und die bestimmten Angaben des Herrn Cantor sind um so irreleitender, weil er dabei auf keine spätere Schrift als die Heibergsche aus dem Jahre 1882 verweist.

G. Eneström.

1³ : 500, 502, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67.

1³: 503—504. Mit Recht hebt A. von Braunmühl in seiner Besprechung der neuen Auflage der *Vorlesungen* (Deutsche Literaturzeitung **28**, 1907, Sp. 2102) hervor, daß die Aufgabe des Geschichtschreibers der Mathematik nicht darin besteht, alle die unbedeutendsten Einzelheiten anzuführen, die im Laufe der Jahrhunderte ans Tageslicht traten. Von diesem Standpunkt ist es also zu beanstanden, daß Herr Cantor 25 Zeilen verwendet, um eine apokryphische Geschichte in betreff des winzigen Mathematikers Filoponos ausführlich zu erzählen (21 Zeilen) und dann kurz zu widerlegen (4 Zeilen).

G. Eneström.

1³: 504. Wir besitzen seit einigen Jahren ein Aktenstück, woraus hervorgeht, daß die Rechnung mit ägyptischen Stammbrüchen schon im 5. Jahrhundert den griechischen Mathematikern in Alexandria geläufig war. Dies Aktenstück, das von einem gewissen Paterios herrührt, ist uns von Proklos aufbewahrt worden; veröffentlicht wurde es von W. Kroll im 2. Bande von *Procli in Platonis rem publicam commentarii* (Leipzig 1901, S. 40—42) zusammen mit einem Kommentar von F. Hultsch (S. 409—412). Es handelt sich um die Berechnung von gewissen Längen x, y, z, s, t, u, v, die so beschaffen sind, daß

$$5 : 4 = 4 : x, \quad 5 : 3 = 3 : y, \quad x : z = z : y, \quad 4 : x = x : s, \quad 4 : z = z : t,$$
$$3 : z = z : u, \quad 3 : y = y : v,$$

und PATERIOS findet, daß

$$x = 3\frac{1}{5}, \quad y = 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{20}, \quad z = 2\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}, \quad s = 2\frac{1}{2}\,\frac{1}{20}\,\frac{1}{100}, \quad t = 1\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}\,\frac{1}{25},$$
$$u = 1\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{15}\,\frac{1}{50}, \quad v = 1\frac{1}{15}\,\frac{1}{75}.$$

Aus der Art, wie die Größen x, y, z, s, t, u, v gebildet wurden, folgt, daß

$$x + y = 5, \quad s + t = 4, \quad u + v = 3,$$

und PATERIOS weist nach, daß die gefundenen Zahlen diesen Bedingungen genügen.

G. ENESTRÖM.

1³ : 509, 510, 513, 515, 528, 545, 563—564, 576, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67—70.

1³ : 576. In betreff der verschollenen Astronomie des BOETIUS bemerke ich, daß sich nach HOUZEAU und LANCASTER (*Bibliographie générale de l'astronomie* **1**, Bruxelles 1887, S. 458) eine Handschrift derselben aus dem 9. Jahrhundert in der Klosterbibliothek in St. Gallen finden würde. Bevor die Richtigkeit der Angabe bestätigt worden ist, muß sie allerdings als sehr verdächtig betrachtet werden.

G. ENESTRÖM.

1³ : 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704, 706, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70.

1³ : 706. Ein weiterer Beleg dafür, daß im christlichen Mittelalter die Form ARCHIMENIDES gewöhnlich war, und daß also eine Schrift, die diese Form enthält, gar nicht eine arabische Quelle gehabt haben muß, bietet die *Geometria speculativa* des BRADWARDIN. Dort findet sich z. B. folgender Passus: „hoc ut habetur ab eodem ARCHIMENIDE in praedicto libello" (siehe M. CHASLES, *Geschichte der Geometrie* übertragen durch L. A. SOHNCKE, Halle 1839, S. 613).

G. ENESTRÖM.

1³ : 713, 715—716, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70.

1³ : 715—716. Herr SUTER hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß die Identität sowohl des „alius liber arithmeticus" als des „liber" mit der Algebra ALKHWARISMIS noch besser belegt wird, wenn man bzw. auf die Stellen (S. 5 und 21 der ROSENschen Übersetzung): „and that any number may be divided into units" und: „Whenever one number is to be multiplied by another, the one must be repeated as many times as the other contains units" hinweist. Besonders die zweite Stelle dürfte für die Frage durchaus entscheidend sein. In der von LIBRI veröffentlichten lateinischen Übersetzung lautet diese Stelle: „unus omnium duorum numerorum quorum unus in alterum multiplicatur, duplicatur secundum quantitatem unitatum que est in altero".

Hinzuzufügen ist noch, daß in einer Handschrift (Cod. S. Marco Florent. 216 Bl. 80ᵃ) die Übersetzung von ALKHWARISMIS Algebra ausdrücklich als „Liber de numero" bezeichnet wird.

G. ENESTRÖM.

1^3 : 717, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71.

1^3 : 717. Was Herr Cantor hier über das Multiplikationsverfahren bei den Arabern sagt, kann sehr wohl an sich richtig sein, aber durch den Verweis auf S. 610—611 muß der Leser irregeleitet werden. Die Angabe S. 717: „das Produkt wird jeweil über die betreffende Ziffer des Multiplikandus geschrieben" ist nämlich nur dann richtig, wenn die *untere* Zahl Multiplikandus genannt wird; dagegen entspricht die Angabe S. 611: „das Produkt erscheint über dem Multiplikandus oder gar statt dessen, da man auch wohl so weit geht, die Ziffern des Multiplikandus selbst wegzulöschen" dem Verfahren der Araber, nur wenn die *obere* Zahl Multiplikandus genannt wird, denn die untere Zahl wurde nicht weggelöscht. Unter solchen Umständen ist es natürlich unmöglich, daß der nicht sachkundige Leser aus der Cantorschen Darstellung herauslesen kann, wie die Araber bei der Multiplikation verfuhren. Nun wurde aber dies Verfahren wesentlich von den Algorithmikern des christlichen Mittelalters (ich sehe dabei von Leonardo Pisano ab) angewendet, und es kann darum von Interesse sein, eine genaue Auseinandersetzung des Verfahrens zu geben. Dabei ist es angebracht, die *untere* Zahl Multiplikandus zu nennen, wie Herr Cantor ohne Zweifel S. 717 getan hat, denn in Wirklichkeit spielte bei den Arabern diese Zahl die Rolle unseres Multiplikandus. Allerdings scheint im christlichen Mittelalter gewöhnlich die *obere* Zahl „numerus multiplicandus" (oder „multiplicatus") genannt worden zu sein, während die untere Zahl den Namen „numerus multiplicans" bekam (nur in der von Curtze herausgegebenen alten Algorismusschrift wird die untere Zahl „multiplicandus" genannt).

Bei Alkhwarismi kommt (*Algorithmi de numero indorum*, ed. Boncompagni, Rom 1857, S. 10—12) das Beispiel $2326 \times 214 = 497764$ vor. Die Ausrechnung selbst wird nicht gegeben, aber die Regeln sind so deutlich, daß man daraus wesentlich die ganze Rechnung wiederherstellen kann (vgl. G. Friedlein, *Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen*, Erlangen 1869, S. 133). Alkhwarismi nimmt als Multiplikandus (der Term selbst kommt freilich nicht bei ihm vor) die kleinere Zahl 214 und schreibt die zwei Zahlen so, daß die Einheitsziffer des Multiplikandus unter der höchsten Ziffer des Multiplikators steht, also auf folgende Weise $\begin{array}{l}\;\;2326\\214.\end{array}$ Dann multipliziert er diese Ziffer von links nach rechts mit den drei Ziffern des Multiplikandus und setzt die Einheitsziffer jeden Produktes über die entsprechende Ziffer des Multiplikandus. Da Alkhwarismi nicht ausdrücklich angibt, daß die Ziffern des Multiplikators weggelöscht werden sollen, so ist es wohl möglich, daß er, wie Friedlein (a. a. O.) annimmt, die Ziffern der Produkte etwas höher setzte, wodurch man das folgende Bild bekommen würde $\begin{array}{l}428\\\;\;2326.\\214\end{array}$ Da aber die ältesten lateinischen Algorismusschriften (darunter auch der *Liber algorismi de pratica arismetrice*) ziemlich einstimmig vorschreiben, daß die Ziffern der Produkte unmittelbar über die entsprechenden Ziffern des Multiplikandus gesetzt und die unnötigen Ziffern des Multiplikators allmählich weggelöscht werden sollen, so ist es wohl höchstwahrscheinlich, daß das Bild $\begin{array}{l}428326\\214\end{array}$ dem Verfahren Alkhwarismis entspricht.

Jetzt rückt er den Multiplikandus 214 um eine Stelle nach rechts, so daß die Aufstellung $\begin{matrix}428326\\ \;214\end{matrix}$ wird, und multipliziert die zweite Ziffer 3 des Multiplikators mit den drei Ziffern des Multiplikandus. Ob die neuen Teilprodukte sofort mit den entsprechenden Ziffern der Zahl 428 zusammengelegt werden oder vorläufig über diese geschrieben werden sollen, ersieht man nicht mit Sicherheit aus dem Texte, aber vermutlich benutzte ALKHWARISMI das erste Verfahren, ganz wie seine Nachfolger im christlichen Abendlande, und man bekommt also das Bild $\begin{matrix}492226\\ \;214\end{matrix}$. Auf dieselbe Weise verfährt ALKHWARISMI in betreff der zwei übrigen Ziffern des Multiplikators und bekommt dadurch zuletzt das Bild $\begin{matrix}497764\\ \quad 214\end{matrix}$, wo die obere Zahl das gesuchte Produkt ist. Hätte man dagegen keine Ziffern weggelöscht und die Teilprodukte nicht sofort zusammengelegt, so würde sich das letzte Bild auf folgende Weise gestaltet haben:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 4 \\ 122 \\ 6326 \\ 428284 \\ 2326 \\ 214, \end{array}$$

so daß man zuletzt die Addition der Einzelprodukte auszuführen hätte, um das Produkt 497764 zu bekommen.

Vergleicht man das jetzt auseinandergesetzte Verfahren mit dem unsrigen, so sieht man leicht, daß der wesentliche Unterschied darin besteht, daß die Araber nicht rechts wie wir, sondern links begannen; die ursprüngliche Aufstellung sowie die Verschiebung des Multiplikandus nach rechts ist nämlich dadurch bedingt und dient nur dazu, die Stellen der einzelnen Teilprodukte zu bestimmen. Aber daß man ursprünglich die Ausrechnung links begann, beruhte offenbar darauf, daß man die unnötigen Ziffern des Multiplikators weglöschte, und das Verfahren war in diesem Falle sehr zweckmäßig, weil man nur zwei Zeilen in Anspruch zu nehmen brauchte. Daß das Verfahren auch beibehalten wurde, nachdem das Weglöschen unnötiger Ziffern unmöglich war, ist dagegen nur als eine Wirkung der „vis inertiae“ zu erklären.

G. ENESTRÖM.

1³ : 718, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 71.

1³ : 719. Außer der in der Fußnote 1) genannten Übersetzung, die wahrscheinlich von GHERARDO CREMONESE herrührt (vgl. was Herr CANTOR weiter unten S. 803 und 908 bemerkt), gibt es eine andere von ROBERTUS CASTRENSIS, die uns im Cod. Vindob. 4770 Bl. 1—12ᵇ, sowie im Cod. Dresd. C 80 Bl. 340ᵃ—348ᵇ aufbewahrt worden ist (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 90). Diese Übersetzung ist von besonderem Interesse, weil sie wahrscheinlich den ältesten deutschen Cossisten bekannt war. E. WAPPLER hat darauf hingewiesen (*Zur Geschichte der Mathematik im 15. Jahrhundert;* Zeitschr. für Mathem. **45**, 1900, Hist. Abt. S. 55—56), daß WIDMANN einen Auszug daraus in den

Cod. Dresd. C 80 Bl. 301[a] eingetragen hat, möglicherweise nicht direkt aus dem Cod. Vindob. 4770, sondern aus dem Cod. Lips. 1470. Daß auch Chr. Rudolff höchstwahrscheinlich die Übersetzung kannte, geht aus folgendem Passus seiner Arbeit: *Behend vnnd hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre* (Straßburg 1525, Bl. G vi[b]) hervor:

> Das bezeugen alte bücher nit vor wenig jaren von der coss geschribē/ in welchē die quantitetn / als dragma / res / substantia etc. nit durch character sunder durch gantz geschribne wort dargegeben sein/vnd sunderlich in practicirung eins yeden exempls / die frag gesetzt / ein ding / mit sölchen worten / ponatur vna res.

In der Übersetzung des Robertus Castrensis kommt nämlich gerade der Term „substantia" vor, während dieser Term, soweit jetzt bekannt, sonst nicht angewendet worden ist. Freilich sollen nach Curtze im Cod. Vindob. 4770 für x^0 und x^1 bzw. die Terme „numerus" und „radix" benutzt werden, aber das bedeutet nicht notwendigerweise, daß diese zwei Terme dort ausschließlich zur Anwendung kommen.

G. Eneström.

1³ : 720, 730, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 71—72.

1³ : 730. Die Frage, was Alkhwarismis verlorene Schrift über die Vermehrung und die Verminderung eigentlich enthielt, dürfte nicht so einfach sein, als Herr Cantor annimmt. Im christlichen Mittelalter gab es nämlich nicht nur einen „Liber augmenti et diminutionis", sondern auch ein „Capitulum aggregationis et diminutionis", das ebenfalls aus dem Arabischen übersetzt worden war und einen ganz anderen Gegenstand als die Methode der zwei Fehler (oder eine besondere Art dieser Methode) behandelte. Das „Capitulum aggregationis et diminutionis" gehört der lateinischen Übersetzung von Alkhwarismis Algebra an, die Libri in seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (I, Paris 1837, S. 253—289) veröffentlichte, und entspricht, was wir Rechnung mit algebraischen Ausdrücken nennen könnten, zunächst Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division von Ausdrücken von der Form $\pm ax^2 \pm bx \pm c$. Offenbar kann eine arabische Schrift, von der man nur den Titel „Über die Vermehrung und die Verminderung" kennt, ebensogut den Gegenstand des „Capitulum aggregationis et diminutionis" als den Gegenstand des „Liber augmenti et diminutionis" behandelt haben. Nun kann man ja einwerfen, daß das fragliche „Capitulum" nur ein Abschnitt der Alkhwarismischen Algebra ist, aber in Wirklichkeit kann dieser Abschnitt als eine Einleitung zur eigentlichen Algebra, d. h. zur Behandlung der Gleichungen bei Alkhwarismi, betrachtet werden, und es ist darum gar nicht unmöglich, daß ein Abschreiber daraus einen besonderen Traktat bildete. Auf der anderen Seite gibt es einen Umstand, der darauf hinzuweisen scheint, daß „Über die Vermehrung und die Verminderung" nicht „Methode der zwei Fehler" bedeutete oder wenigstens nicht immer diese Bedeutung hatte. Im *Fihrist* wird nämlich erwähnt (siehe Suter, Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **6**, 1892, S. 37), daß Abû Kâmil teils eine Schrift „Über die Vermehrung und die Verminderung", teils ein „Buch der beiden Fehler" verfaßt hat. Freilich kann, wie Suter (a. a. O. S. 70) bemerkt, der Text des *Fihrist* hier verstümmelt sein, z. B. so, daß

ursprünglich zwischen den zwei Titeln: „es wird auch genannt“ stand, aber dies ist lediglich eine Vermutung.

G. Eneström.

1^3 : **734, 736—737,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72.

1^3 : 737. In der Fußnote 1 gibt Herr Cantor an, die bekannte Hypothese vom Ursprung des Wortes *sinus* stamme von dem Pariser Orientalisten Munk her. Es hat aber schon E. Strachey in den Noten (S. 111) seines Buches *Bija Ganita, or the Algebra of the Hindus,* London 1813, auf die Identität: ind. dschiva = arab. dschîb oder dschaib = lat. sinus aufmerksam gemacht. — Das genannte Buch Stracheys hätte überhaupt wegen seiner interessanten Noten zur indischen Mathematik von Herrn Cantor zitiert werden dürfen.

H. Suter.

1^3 : **738, 743, 748, 750,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72.

1^3 : 764. Da Herr Cantor einige bei Alkarkhi vorkommende Multiplikationsmethoden nennt, die auf griechische Quellen hinweisen, füge ich hinzu, daß Alkarkhi auch die von Ocreatus erwähnte „regula Nicomachi“ lehrt, freilich für einen anderen Zweck als Ocreatus. Um die Multiplikation $83 \cdot 83$ auszuführen gibt Alkarkhi (siehe die Übersetzung von Hochheim I, Magdeburg 1878, S. 8) folgendes Verfahren an: $(83 + 3) 8 \cdot 10 + 3 \cdot 3$. Setzt man hier $83 = a$, $3 = b$, kann man das Verfahren durch die Formel $a^2 = (a + b)(a - b) + b^2$ ausdrücken, also genau die Formel, die dem Verfahren des Ocreatus zugrunde liegt, obgleich dieser nicht den Spezialfall $a - b = 10k$, sondern den Spezialfall $a + b = 10$ berücksichtigt.

G. Eneström.

1^3 : 770. Aus der Cantorschen Darstellung bekommt der Leser sehr leicht die Vorstellung, daß Alkarkhi regelmäßig zwei Wurzelwerte der Form $ax^2 + c = bx$ angibt. Dies ist indessen nicht der Fall. Nach Woepcke (*Extrait du Fakhri*, Paris 1853, S. 67) finden sich im ganzen *Fakhri* nur drei Gleichungen dieser Form, wo zwei Wurzelwerte angegeben werden, nämlich außer der von Herrn Cantor erwähnten Gleichung $x^2 + 21 = 10x$ noch die zwei Gleichungen $24 + x^2 = 10x$ und $x^2 + 16 = 10x$. Bei den übrigen Aufgaben, die zur Form $ax^2 + c = bx$ führen, wird nur eine einzige Lösung mitgeteilt. An vielen Stellen ist der Grund dieses Verfahrens ersichtlich, aber an anderen Stellen (II : 11, 44; III : 12, 13) sind die beiden Lösungen gleichwertig. Jedenfalls scheint Alkarkhi nicht wie Alkhwarismi den negativen Wert der Quadratwurzel vorgezogen zu haben, denn in zwei der vier soeben zitierten Fälle entspricht die Lösung dem positiven Wert der Quadratwurzel.

G. Eneström.

1^3 : **780, 781, 794, 800,** siehe BM **8**$_3$, 1907, S. 72—73.

1^3 : 801. Die Angabe, daß im Traktate *De pratica arismetrice* bei der Ausziehung der Quadratwurzel, die wirklich berechnete ganze Zahl „als Zähler

eines Bruches gilt, dessen Nenner aus einer mit n Nullen versehenen Einheit besteht", ist nicht ganz genau, denn daraus muß man folgern, daß als Resultat ein Bruch von der Form $\frac{k}{10^n}$ auftritt; auch die vorangehende Bemerkung: „natürlich nicht in einer Schreibart, wie sie den modernen Dezimalbrüchen ... anhaftet" veranlaßt zu dieser Folgerung. In Wirklichkeit wird im Traktate folgendes Verfahren benutzt (vgl. Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 405). Um $\sqrt{2}$ zu ermitteln, wird zuerst die Quadratwurzel aus 2000000 gezogen und als Näherungswert ergibt sich 1414. Hieraus wird gefolgert, daß die ganze Zahl 1 ist, und das übrige, das natürlich tatsächlich 0·414 beträgt, wird sofort durch wiederholte Multiplikation mit 60 in den Sexagesimalbruch $24' 50'' 24'''$ verwandelt, so daß $\sqrt{2^0} = 1^0 24' 50'' 24'''$. Da es zurzeit gar nicht sicher ist, daß der Traktat *De pratica arismetrice* von Johannes Hispalensis herrührt (vgl. Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 114) und auch nicht nachgewiesen worden ist, daß der Traktat schon im 12. Jahrhundert vorhanden war, so ist es von Interesse zu bemerken, daß das nämliche Verfahren bei der Ausziehung von Quadratwurzeln in einer nachweislich vor 1168 verfaßten Algorismusschrift vorkommt, die M. Curtze in den Abhandl. zur Gesch. der Mathem. 8, 1898 (S. 17—27) herausgegeben hat. Hier wird nämlich (S. 26—27) $\sqrt{26}$ dadurch berechnet, daß zuerst als Näherungswert von $\sqrt{260000}$ die ganze Zahl 509 wie gewöhnlich bestimmt wird, und daraus wie im Traktate *De pratica arismetrice* gefolgert, daß $\sqrt{26^0} = 5^0 5' 24''$. Daß das Resultat unter der Form $\frac{509}{100}$ geschrieben werden kann, wird nicht mit einem einzigen Worte angedeutet. G. Eneström.

1³ : 801. Das am Schlusse der Boncompagnischen Ausgabe des *Liber algorismi de pratica arismetrice* hinzugefügte magische Quadrat gehört *ganz gewiß nicht* dem Traktate an. Soweit jetzt bekannt ist, findet sich dieses Quadrat *nur* am Schlusse der von Boncompagni benutzten Handschrift Cod. Paris. 7359, und diese stammt nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn H. Omont aus dem Ende des 13. oder dem Anfang des 14. Jahrhunderts. In allen übrigen bisher bekannten Handschriften des Traktates fehlt das Quadrat, und es steht mit dem vorangehenden Texte in keinem Zusammenhange.

G. Eneström.

1³ : 802. Die Angabe: „Da [d. h. im Traktate *De pratica arismetrice*] kommt das Wort *differentia* mehrfach vor, ... aber es bedeutet nur die Stelle, bis zu welcher man vor- beziehungsweise zurückrückt. Das gleiche Wort im gleichen Sinne hat auch der Übersetzer der kleinen Abhandlung, welche wir als die des Alchwarismi selbst anerkennen, angewandt", ist nicht ganz richtig. Zum erstenmal wird das Wort „differentia" im Traktate *De pratica arismetrice* (S. 27 der Boncompagnischen Ausgabe) auf folgende Weise definiert: „Singulis limitibus cum numeris a se procreatis Indi dederunt nomina, primum scilicet limitem cum numeris a se procreatis uocantes differentiam unitatum, ... secundum autem cum numeris prouenientibus a se differentiam decenorum ..". Aber auf der vorangehenden Seite des Traktates wurde an-

gegeben, daß 1 „primus limes“, 10 „secundus limes“, usw. ist. Also bedeutet „differentia“ nach der Definition zunächst nicht eine Stelle, sondern eine Gruppe von neun Zahlen $A \cdot 10^n$ ($A = 1, 2, \ldots, 9$). Dieselbe Bedeutung hat das Wort am Anfange des Traktates *Algoritmi de numero indorum*, wo es (S. 3 der Boncompagnischen Ausgabe) heißt: „Prima est differentia unitatum, in qua duplicatur et triplicatur quicquid est inter unum et .IX.“.

Nun ist es aber klar, daß wenn man eine Zahl schreibt, so nimmt die Ziffer der ersten „differentia“ d. h. die Einheitsziffer, immer die erste Stelle rechts ein, die Ziffer der zweiten „differentia“ die zweite Stelle, usw., so daß man in vielen Fällen das Wort „differentia“ ganz einfach mit „Stelle“ übersetzen kann, und in diesem beschränkteren Sinne ist die Angabe des Herrn Cantor richtig.

Da ich oben Anlaß gehabt habe, die Bedeutung des Wortes „limes“ zu erwähnen, so füge ich hinzu, daß dies Wort im Traktate *De pratica arismetrice* auch eine andere Bedeutung hat, und zwar dieselbe als „differentia“ nach der ursprünglichen Definition. Dieselbe Seite des Traktates (S. 27), wo „differentia“ definiert worden ist, enthält nämlich den folgenden Passus: „Constat ... unumquemque limitem .9. numeros continere, primum numeros unitatum, secundum decenorum, ... et similiter ceteros“. G. Eneström.

1³ : 802, 805—806, 815, 855, 857, 859, 862, 863, 867, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 73—74.

1³ : 867. Die Angabe, daß sich der Näherungswert $\sqrt{2} = \frac{17}{12}$ im 66. Kapitel der „*Geometria Gerberti*“ findet, ist sicherlich korrekt, aber es wäre vielleicht nicht ganz überflüssig zu bemerken, daß die Ausgaben der Geometrie hier zum Teil andere Angaben haben. Bei Olleris steht (S. 459 Z. 6) in der Ausgabe selbst „unum et bissem“ [d. i. $\frac{5}{3}$], aber Olleris hat später (S. 595 Z. 12) die Lesart in „unum et quincuncem“ [d. i. $\frac{17}{12}$] verbessert. Bei Bubnov steht (S. 352) „unum et triens lateris“ [d. i. $\frac{4}{3}$], und in Wirklichkeit sind die römischen Bruchzeichen für „quincunx“ und „triens“ nur wenig verschieden, aber sehr merkwürdig ist es jedenfalls, daß Bubnov nicht einmal in seinem kritischen Apparate die viel wahrscheinlichere Lesart „quincuncem“ erwähnt. G. Eneström.

1³ : 869, 875—876, 877, 878, 882, 889, 893, 900, siehe BM **8**₃, 1907, S. 74—78.

1³ : 900. Wie schon von Th. H. Martin (*Les signes numéraux et l'arithmétique chez les peuples de l'antiquité et du moyen-âge:* Annali di matem. **5**, 1863, S. 367) hervorgehoben worden ist, hat man gar keinen besonderen Grund anzunehmen, daß sich Oddos Worte: „Hanc [= artem abaci] antiquitus graece conscriptam, a Boetio credimus in latinum translatam. Sed quia liber hujus artis difficilis legentibus ...“ auf die „*Geometria Boetii*“ beziehen. Schon der Umstand, daß Oddo den Ausdruck „liber hujus artis“ anwendet, macht es wahrscheinlich, daß er nicht die „*Geometria Boetii*“ meint, sondern eine Schrift, die speziell „ars abaci“ behandelt, und die von Oddo benutzten Terme „summa“ [= Multiplikandus]

und „fundamentum“ [= Multiplikator] weisen auf eine andere Quelle als die „*Geometria Boetii*“ hin. Außerdem findet sich in der „*Geometria Boetii*“ nicht die geringste Andeutung, daß die Stelle über den Abakus aus dem Griechischen übersetzt worden ist. G. Eneström.

1³ : 902, 906, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 78—79.

1³ : 906. Wie Herr Cantor dazu gekommen ist, den *Prologus Ocreati in Helceph* einen Auszug aus einer arabischen Schrift über Multiplikation und Division zu nennen, dürfte schwer zu erraten sein. Der Verfasser des *Prologus* sagt selbst: „festino aggredi Helcep sarracenicum tractare de multiplicatione ... et divisione“ und ein paar Zeilen weiter unten gebraucht er das Wort „compendium“. Aber „Helcep“ ist offenbar nur ein anderer Name für „Algorismus“ (vgl. „ars Helcep“ S. 136 Z. 19 der Henryschen Ausgabe), und daß der *Prologus* ein Auszug aus einer arabischen Schrift ist, kann man daraus nicht folgern. Ebensowenig gibt die Lektüre des *Prologus* zu einer solchen Folgerung Anlaß; im Gegenteil bekommt man dadurch den Eindruck, daß der Verfasser ein junger Mann war, der mit ziemlich geringem Erfolg versuchte, das was er teils aus abendländischen, teils — unmittelbar oder mittelbar — aus arabischen Quellen gelernt hatte, zu bearbeiten. Freilich ist die Henrysche Ausgabe sehr schlecht (ob dies auf der Handschrift beruht oder darauf, daß Herr Henry die Handschrift nicht lesen konnte, bin ich nicht imstande zu entscheiden), aber dennoch ist es nicht schwer auszufinden, was der *Prologus* eigentlich enthält. Nach einer kurzen Einleitung über Zahlen und Ziffern (im ganzen Traktate werden nur römische Ziffern angewendet und Null wird überall durch τ bezeichnet), werden zuerst gewisse einfachere Arten von Multiplikation gelehrt, nämlich die „regula Nicomachi“, sowie eine ähnliche Regel, ferner die komplementäre Multiplikation, die Regel $ab = a^2 + a(b-a)$ und zuletzt die Multiplikation auf Grund der Euklidischen Definition (vgl. *Elementa* VII Def. 15). Weiter wird die gewöhnliche Multiplikation unter Benutzung der zwei Beispiele $33 \cdot 33 = 1089$ und $1200 \cdot 1200 = 1440000$ auseinandergesetzt, und als Proben der Richtigkeit der Operation werden die zwei Divisionen $\frac{1089}{33} = 33$ und $\frac{1440000}{1200} = 1200$ ausgeführt. Dann werden die Regeln der zwei Operationen kurz zusammengefaßt und endlich wird angegeben, wie man verfahren soll, wenn nach der Division etwas übrigbleibt; als Beispiel wird $\frac{148}{16} = 9\frac{1}{4}$ benutzt. Die letzten fünf Zeilen („Omnis numerus ... quinque bis“) scheinen ursprünglich eine Randbemerkung gewesen zu sein, und ihr Sinn ist ohne Zweifel, daß ganz allgemein $(a+b)(a+b) = a^2 + b^2 + 2ab$ und speziell $35 \cdot 35 = 30 \cdot 30 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \cdot 30$, so daß in der letzten Zeile „quinquies“ gestrichen werden und in der vorletzten Zeile V statt CC stehen soll.

Aus welcher arabischen Quelle die Kenntnisse des Ocreatus entstammen, wird wohl nie ermittelt werden können. Wenn „Helceph“ wirklich eine Verketzerung von „Al kâfî“ ist, liegt es ja nahe, zu vermuten, daß diese Quelle die Schrift Alkarkhis war, und dort findet sich tatsächlich teils ein Spezialfall der „Regula Nicomachi“ (vgl. oben die Bemerkung zu **1³** : 764), teils die Euklidische Definition der Multiplikation, aber diese war natürlich schon im 12. Jahrhundert im Abendlande bekannt, und die unverstümmelte Form

„NICOMACHUS“ deutet gewiß nicht auf eine arabische Quelle hin. Die Regel $ab = a^2 + a(b - a)$ findet sich bei IBN ALBANNA (siehe die Übersetzung von A. MARRE, Atti dell' accad. pontif. dei Nuovi Lincei **17** [1863—1864], S. 304), aber vermutlich lebte OCREATUS vor diesem. Der übrige Inhalt des *Prologus* könnte ebensogut aus einer abendländischen als aus einer arabischen Quelle entstammen.

Ob der *Prologus* im 12. oder im 13. Jahrhundert verfaßt wurde, dürfte zurzeit unmöglich sein zu entscheiden. Das Zeichen τ für Null sowie die ausschließliche Benutzung römischer Ziffern könnte auf eine frühe Abfassungszeit des Traktates hindeuten, aber meines Erachtens darf man daraus keine bestimmten Folgerungen ziehen. Indessen scheint es mir höchstwahrscheinlich, daß der Traktat spätestens in der ersten Hälfte des 13. Jahrhunderts verfaßt worden ist.

G. ENESTRÖM.

1² : 908, 909, 910, 911, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79—80.

---

2 : 5, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286; **8**$_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502.

---

2 : 11. In betreff der bei LEONARDO PISANO vorkommenden Probezahlen kann bemerkt werden, daß LEONARDO ausdrücklich hervorhebt (*Liber abbaci*, ed. BONCOMPAGNI, S. 34), daß alle Primzahlen als Probezahlen benutzt werden können („possunt enim multiplicationes ... per alias quasdam pensas probari, scilicet per eam de 7 et de omnibus numeris asam [= Primzahlen] existentibus“). Die Dreizehnerprobe wird tatsächlich S. 42 angewendet. Daß bei LEONARDO „dem eigentlichen Dividieren verhältnismäßig geringe Aufmerksamkeit gewidmet ist“, kann ich nicht finden. LEONARDO gibt zuerst (S. 31) die allgemeine Regel an und lehrt dann ausführlich folgende 12 Divisionen (S. 31—36, 43—47), bei denen die Divisoren Primzahlen sind: 18456 : 17; 18456 : 19; 13976 : 23; 24059 : 31; 780005 : 59; 5917200 : 97; 1349 : 257; 30749 : 307; 574930 : 563; 5950000 : 743; 17849 : 1973; 1235689 : 4007. Diese Beispiele dürften wohl genügen, um das Verfahren auseinanderzusetzen. Auch die Bemerkung des Herrn CANTOR: „Die Teilung wird meist durch die einzelnen Faktoren des Divisors nach einander vollzogen“ scheint mir nicht genau zu sein, denn in Wirklichkeit kommen bei LEONARDO nur drei solche Teilungen vor, nämlich 749 : 75; 67898 : 1760; 81540 : 8190.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 14—15, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209.

---

2 : 17. Es verdient hervorgehoben zu werden, daß LEONARDO die Zahlen, die er *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* nennt, als Linien repräsentiert, er sagt nämlich: „Sit itaque numerus .*e*. linea prima ... numerus quoque .*c*. sit linea sexta“. Sein Verfahren ist also durchaus dasselbe, das EUKLIDES im 7. Buche der Elemente anwendet. Da Herr CANTOR weiter unten (S. 61) von „einem vereinzelten Vorkommen“ solcher Buchstabenanwendung bei LEONARDO redet, so erlaube ich mir beispielsweise auf S. 395—397, 399, 419, 432—434, 436, 439 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe des *Liber abbaci* hinzuweisen, wo ebenfalls allgemeine Buchstaben statt besonderer bestimmter Zahlen benutzt werden.

G. ENESTRÖM.

2 : 20, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310.

2 : 34. Leonardo Pisano bemerkt nicht an der von Herrn Cantor zitierten Stelle, daß der Gleichung $ax^2 + c = bx$ „regelmäßig zwei Wurzelwerte Genüge leisten". Zuerst gibt Leonardo den Wert $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ an, und fügt dann hinzu (S. 409 Z. 14—16): „et si id quod remanserit [nämlich nachdem der Wurzelausdruck von $\frac{b}{2a}$ subtrahiert worden ist] non erit radix quesiti census, tunc addes id quod extraxisti super numerum, de quo extraxisti et habebis radicem quesiti census", und einige Zeilen weiter unten wiederholt er dieselbe Bemerkung mit den Worten: „cum non soluetur questio cum diminutione, soluetur sine dubio cum additatione". Was er wirklich bemerkt, ist also, daß, wenn eine Aufgabe durch die Gleichung $ax^2 + c = bx$ gelöst wird, so genügt entweder $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ oder $x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ der gestellten Aufgabe.

Aus den soeben zitierten Stellen könnte man vermuten, daß Leonardo in betreff der Aufgaben, die zu der Gleichung $ax^2 + c = bx$ führen, nur eine einzige Lösung berücksichtigt. Indessen finden sich bei ihm solche Probleme, für welche er wirklich zwei Lösungen angibt, z. B. S. 414—415, wo er ausdrücklich hervorhebt, daß eine gewisse Aufgabe, die der Gleichung $\frac{20}{x} = \frac{60}{x+2} - 5$ entspricht, die zwei Lösungen $x = 2$ und $x = 4$ hat. Auch hier nennt er in erster Linie die Lösung, die durch *Subtraktion* der Quadratwurzel erhalten wird.

G. Eneström.

2 : 37, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80—81. — **2 : 46,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 51,** siehe BM. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106.

2 : 52. Daß Leonardo, nachdem er die Gleichung $\frac{7}{20}x^2 + \frac{64}{5}x = 64$ hergeleitet hatte, den Wert von x „unter Benutzung von Sexagesimalbrüchen ausrechnete" (siehe Z. 18—19), ist entweder eine nicht ganz deutliche Angabe oder lediglich eine Vermutung des Herrn Cantor; es sollte vielmehr heißen, daß Leonardo den Wert von $\sqrt{517\frac{11}{49}}$ ohne weiteres in Sexagesimalbrüchen angab („egredientur $\frac{11}{49}517$ pro quadrato linee .*lq*., de quorum radice, que est secundum propinquitatem 22 et minuta 44 et secunda 33 et tertia 15 et quarta 7") und daraus den Wert von x durch einfache Subtraktion berechnete. Die Angabe, daß Leonardo den Wert von x unter Benutzung von Sexagesimalbrüchen ausrechnete, kann wohl nichts anderes bedeuten, als daß Leonardo zuerst die Zahl $517\frac{11}{49} = \frac{25344}{49}$ mit $60^8 = 167{,}961{,}600{,}000{,}000$ multiplizierte, dann die Quadratwurzel $\frac{1}{7} \cdot 2{,}063{,}205{,}949 = 294{,}743{,}707$ berechnete und zuletzt die gefundene Zahl viermal durch 60 dividierte. Aber daß Leonardo dies sehr beschwerliche Verfahren anwendete, hat man nicht den geringsten

Grund anzunehmen. Ohne Zweifel bediente er sich zuerst des Verfahrens, das er in seinem *Liber abbaci* (S. 355—356 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe) ausdrücklich gelehrt hatte, und das Herr CANTOR S. 30—31 auseinandersetzt, und verwandelte dann die berechnete Zahl in Sexagesimalbrüche ganz wie der Verfasser des von BONCOMPAGNI 1857 herausgegebenen *Liber algorismi de pratica arismetrice.*

G. ENESTRÖM.

2 : 53, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201 — **2 : 57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2 : 59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287. — **2 : 63,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2 : 67,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73, 82, 87,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 88,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S. 395. — **2 : 89, 90,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503.

2 : 91. In der 3. Nummer (1907) der Tribune publique der *Encyclopédie des sciences mathématiques* hat V. MORTET (S. 7) darauf hingewiesen, daß der von CH. HENRY herausgegebene „Algorisme“ nicht überall eine wörtliche Übersetzung des „Carmen de algorismo“ bringt. Teils hieraus, teils aus dem Umstande, daß der „Algorisme“ sechs („6 parties sont daugorisme“), aber das „Carmen de algorismo“ sieben Rechenoperationen anzeigt, schließt MORTET, daß der „Algorisme“ und das „Carmen de algorismo“ vielleicht nur aus einer gemeinsamen Quelle geschöpft haben; ob der „Algorisme“ eine wörtliche Übersetzung oder mehr eine Bearbeitung dieser älteren Algorismusschrift sei, könne selbstverständlich zurzeit nicht entschieden werden.

In betreff dieser Bemerkung hebe ich zuerst hervor, daß der von MORTET zitierte Passus „6 parties sont daugorisme“ belanglos ist, da der „Algorisme“ unmittelbar nach diesem Passus nur fünf Rechenoperationen erwähnt aber tatsächlich noch zwei in der Einleitung nicht erwähnte Operationen, nämlich Division und Kubikwurzelausziehen lehrt. Dagegen ist es richtig, daß der „Algorisme“ nicht überall eine wörtliche Übersetzung des „Carmen de algorismo“ enthält, und die von MORTET aufgestellte Hypothese *kann* also richtig sein. Auf der anderen Seite ist die ganze Frage von untergeordnetem Interesse, und, aus diesem Grunde bin ich geneigt, bis auf weiteres die einfachere Hypothese, daß der „Algorisme“ wesentlich eine Übersetzung des „Carmen de algorismo“ sei, zu empfehlen.

G. ENESTRÖM.

2 : 91—92, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396. — **2 : 97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107; **7**$_3$, 1906/7, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **8**$_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 101,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325; **6**$_3$, 1905, S. 396. — **2 : 104—105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 106,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 380. — **2 : 111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 116,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504; **6**$_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406; **6**$_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504

2 : 128. Wie M. CURTZE (BM **1**$_3$, 1900, S. 504) berichtet hat, beabsichtigte er 1900 zusammen mit P. TANNERY die *Practica geometriae* des DOMINICUS DE CLAVASIO herauszugeben. Auf CURTZES Anregung übernahm TANNERY später die endgültige Redaktion der Arbeit, und aus einer Bemerkung im Journal

des savants 1904, S. 462 scheint es, als ob die Arbeit im August 1904 beinahe fertig war; A. Favaro hat dieselbe sogar als von Tannery schon veröffentlicht aufgeführt (siehe *Paolo Tannery, Nota commemorativa*, Padova 1905, S. 5). Leider muß diese Angabe auf einem Mißverständnis beruhen, und merkwürdigerweise ist es nicht einmal gelungen, die Abschrift der *Practica geometriae* wiederzufinden, die Curtze verfertigte und an Tannery sandte.

Da Herr Cantor S. 127 angibt, daß sich zahlreiche Handschriften der *Practica geometriae* erhalten haben, erlaube ich mir, diese durchaus richtige Angabe dahin zu präzisieren, daß Curtze 1899 vierzehn solche Handschriften kannte (siehe Centralblatt für Bibliothekswesen **16**, 1899, S. 270—271), nämlich: 1. Cod. Lips. 1469; 2. Cod. Lips. 1470; 3. Cod. Amplon. Fol. 37; 4. Cod. Amplon. Fol. 393; 5. Cod. Amplon. Fol. 385; 6. Cod. Amplon. Qu. 352; 7. Cod. Cracov. 568; 8. Cod. Cracov. 1919; 9. Cod. lat. Monac. 410; 10. Cod. lat. Monac. 14908; 11. Cod. Seitenstett. XLVI; 12. Cod. Paris. lat. 7378A; 13. eine Handschrift in Madrid; 14. eine Handschrift in Oxford.

G. Eneström.

2 : 129, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 144,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381. — **2 : 145,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 148,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2 : 150—151,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288. — **2 : 155—156,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 87—88. — **2 : 163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382. — **2 : 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140.

---

2 : 178—179. Hier wird auseinandergesetzt, wie Johann von Gmunden verfuhr, um Quadratwurzeln aus Sexagesimalbrüchen auszuziehen. Vor dem Berichte hierüber wird bemerkt: „Ganz neu ist ja deren Anwendung [d. h. die Anwendung von Sexagesimalbrüchen in diesem Falle] auch nicht. Johannes von Luna hat schon sich ihrer ganz ähnlich bedient. Aber dort waren Sexagesimalbrüche nicht schon im Laufe der Rechnung benutzt"; und nach dem Berichte fügt Herr Cantor hinzu: „Das ist . . . ein Verfahren, welches offenbar nicht zu den Arabern gelangt oder durch deren Vermittelung noch nicht wieder in das Abendland gedrungen war".

Aber in Wirklichkeit ist das Verfahren des Johann von Gmunden durchaus identisch mit dem im *Liber algorismi de pratica arismetrice* (ed. Boncompagni, Rom 1857, S. 90—93) auseinandergesetzten. Vorher wurde in diesem Traktate (a. a. O. S. 86—90) das Verfahren in betreff ganzer Zahlen gelehrt, und dann kommt der von Johann von Gmunden behandelte Fall. Hier unten bringe ich zum Abdruck einen Auszug aus den Vorschriften des *Liber algorismi de pratica arismetrice*.

> Si autem cuiuslibet numeri integri cum fractionibus uolueris inuenire radicem . . ., reduc eas ad inferiores differentias habentes radicem, uidelicet ad secunda, uel ad quarta . . . Quibus sic reductis, et prepositis illis quodlibet, sed paribus circulis, inuenias radicem earum pretermittendo, [„pretermittere" kann hier mit „verwahren" übersetzt werden] semper differentias secundum medietatem prepositorum circulorum . . .

Die Regeln, die hiernach folgen, sind vielleicht an sich nicht ganz deutlich, aber das Verfahren ist genau dasselbe, das für Quadratwurzelausziehen aus ganzen Zahlen gilt, und für diesen Fall sind die Regeln des Traktates vollständig klar. Es handelt sich um die Ausziehung der Quadratwurzel aus 2 (vgl. oben die Bemerkung zu **1**^{3} : 801), und nachdem $\sqrt{2000000} \sim 1414$ berechnet worden ist, wird bemerkt, daß die Einheit die ganze Zahl der Wurzel ist. Dann fährt der Verfasser des Traktates fort:

> Deinde tres differentias pretermissas, que sunt ·4·1·4·, multiplicamus in ·60·, et ex multiplicatione proueniunt ·2·4·8·4·0. Sed quia hic numerus cum circulo quinque differentias occupat, ideo duas ultimas, scilicet ·2·4·, que excedunt medietatem circulorum assummimus, et eas deletas de loco suo sub unitate separatim posita locamus; et sunt ibi minuta . . .

Dann wird auf dieselbe Weise 840 mit 60 vervielfacht und wieder drei Ziffern wie vorher abgeschnitten, wodurch die Zahl der Sekunden der Wurzel erhalten wird, usw. Überhaupt kann man die Vorschriften des *Liber algorismi de pratica arismetrice* genau so wiedergeben, wie Herr Cantor S. 178—179 die Vorschriften des Johann von Gmunden wiedergegeben hat. Da nun der fragliche Traktat im Mittelalter ziemlich verbreitet war, so ist es sehr wahrscheinlich, daß Johann von Gmunden sein Verfahren unmittelbar oder mittelbar aus demselben entnommen hat; möglich ist allerdings, daß sowohl er als der Verfasser des Traktates eine gemeinsame ältere Quelle benutzt haben. G. Eneström.

2 : 206, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313. — **2 : 210,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 397—398.

2 : 228. In betreff der Angabe: „als benutzt werden [von Widman] . . . angegeben: . . . Julius Frontinus für Feldmesserisches“ vgl. unten die zweite Bemerkung zu **2** : 234, woraus hervorgeht, daß „Längen- und Flächenmaße“ statt „Feldmesserisches“ zu setzen ist. G. Eneström.

2 : 228. Herr Cantor teilt hier mit, welche Aufschlüsse die Leipziger Universitätsakten über Widman bringen, übergeht aber stillschweigend die Notiz von C. Wimpina (vgl. den Abdruck dieser Notiz von B. Boncompagni im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, S. 209). Abgesehen von den bibliographischen Aufschlüssen gibt Wimpina an, daß Widman, nachdem er einige Jahre in Leipzig Unterricht erteilt hatte, die Universität verließ und 1498 in seiner Vaterstadt Eger wohnhaft war. Aus einem Ausspruche von Wimpina („Claret adhuc annos natos uno forte supra triginta“) könnte man versucht sein zu folgern, daß Widman im Jahre 1498 nur 31 Jahre alt war, also 1467 geboren ist, aber ohne Zweifel bedeutet „uno forte supra triginta“ nicht „etwa ein und dreißig Jahre alt“, sondern „etwas mehr als dreißig Jahre alt“: da nun Widman schon 1480 Student war und 1486 Vorlesungen über Algebra ankündigte, so war er kaum vor 1464 geboren, also im Jahre 1498 wenigstens 34 Jahre alt. Daß Widman eine Leipziger Professur inne hatte, hat man meines Wissens nicht den geringsten Grund zu vermuten. G. Eneström.

2 : 229, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505.

---

2 : 229. Außer dem großen Rechenbuch hat Widman noch einige kleinere arithmetische Schriften veröffentlicht, nämlich:

Regula falsi apud philozophantes augmenti et decrementi appellata omnium regulis algobre demptis optima (20 Bl.);
Algorithmus linealis (14 Bl.);
Algorithmus integrorum cum probis annexis (12 Bl.);
Algorithmus minutiarum phisicarum (6 Bl.);
Tractatus proportionum plusquam aureus (17 Bl.);
Algorithmus minutiarum vulgarium (5 Bl.).

Alle diese Schriften sind anonym, und weder Druckjahr noch Ort ist angegeben, aber am Ende des *Algorithmus linealis* findet sich das Signet des Martinus Herbipolensis, der 1490—1512 Buchdrucker in Leipzig war. Da alle Schriften offenbar derselben Druckerei entstammen, so kann man behaupten, daß sie alle in Leipzig, wahrscheinlich wenige Jahre nach dem Erscheinen des Rechenbuchs veröffentlicht wurden; aus einer Angabe von C. Wimpina (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, S. 209) scheint übrigens hervorzugehen, daß die fünf letzten Schriften vor 1498 gedruckt waren. Die Schriften sind äußerst selten; die fünf ersten besitzt die Ratsschulbibliothek in Zwickau, und von der letzten Schrift findet sich ein Exemplar in der Universitätsbibliothek in Leipzig. Ausführliche Auskunft über die sechs Schriften hat E. Wappler in seinem *Beitrag zur Geschichte der Mathematik* (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **5**, 1890, S. 147—168) gegeben.

G. Eneström.

---

2 : 229. Die quadratische Einmaleinstafel findet sich schon in einer von Narducci (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **15**, 1882, S. 135—162) veröffentlichten Abakusschrift aus dem Ende des 12. Jahrhunderts. Diese Tafel kommt auch im Anhange des *Liber algorismi de pratica arismetrice* vor (siehe die Ausgabe von Boncompagni, Rom 1857, S. 103).

In betreff der dreieckigen Einmaleinstafel legt man meines Erachtens gewöhnlich zuviel Wert auf die auch von Herrn Cantor zitierte Stelle des Widmanschen Rechenbuches (Bl. 13^b der Ausgabe von 1526), wo angegeben wird, daß diese Tafel „gezogen auss Hebreyscher zungen oder Jüdischer“ ist. Im allgemeinen sind Widmans historische Notizen wenig zuverlässig, und vermutlich soll hier „Arabischer“ statt „Hebreyscher“ oder statt „Jüdischer“ gelesen werden. Nun weiß man ja, daß die dreieckige Einmaleinstafel in der von Widman angegebenen Form schon in einer vor 1168 vorhandenen lateinischen Algorismusschrift vorkommt (siehe Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **8**, 1898, S. 18), und ob Widman seine Notiz aus dieser Schrift oder aus einer späteren entnommen hat, dürfte von untergeordneter Bedeutung sein. Daß er eine hebräische Algorismusschrift benutzt hat, scheint mir wenig wahrscheinlich. Allerdings kann diese, wie Herr Cantor betont, keineswegs das Buch des Elias Misrachi sein, denn nach Steinschneider enthält das hebräische Original dieser Schrift *nicht* die Einmaleinstafel der Druckausgabe von 1546—1547 (siehe unten die Bemerkung zu 2 : 413).

G. Eneström.

---

2 : 230. Es ist allerdings richtig, daß sich WIDMAN in der zweiten Abteilung, wo die Lehre von den Proportionen behandelt ist, auf JULIUS FRONTINUS beruft, aber meiner Ansicht nach liegt hier eine Verwechslung von zwei Namen vor. Um diese Ansicht zu begründen, mache ich darauf aufmerksam, daß die Zitate von WIDMAN nicht selten unzuverlässig sind. An der von Herrn CANTOR zitierten Stelle wird neben FRONTINUS auch „JORDANUS inn dem sechsten beschluss seines rechenbuchs“ erwähnt, was wohl „im sechsten Buche der *Arithmetica* JORDANI“ bedeuten soll, aber im ganzen 6. Buche kommt überhaupt kein Satz über Vervielfachung von Proportionen vor, sondern dies wird im 5. Buche gelehrt. Ebensowenig bezieht sich der 27. Satz des zweiten Buches der *Arithmetica* JORDANI auf Subtraktion von Proportionen, wie WIDMAN unmittelbar nachher (Bl. 56^b der Auflage von 1526) behauptet. Ein wenig ungenau ist ebenfalls die Berufung auf EUKLIDES am Anfange der dritten Abteilung (Bl. 163^b der Auflage von 1526): „Nu soltu wissen das punctus nicht annders ist (als EUCLIDES spricht) Dañ ayn ding das kain tayl hat vnnd allso ist punctus ain klain ding das nicht zu taylen ist“, denn EUKLIDES nennt gewiß nicht den Punkt „ein kleines Ding“.

Unter solchen Umständen, und da weder vor noch nach WIDMAN ein Werk von FRONTINUS über die Proportionen erwähnt worden ist, liegt es meines Erachtens sehr nahe, die Berufung auf FRONTINUS als einen Schreibfehler statt BOETIUS zu erklären. BOETIUS wird von WIDMAN einige Seiten vorher (Bl. 48^b, 49^b der Auflage von 1526) zitiert und an der von Herrn CANTOR hervorgehobenen Stelle, wo der Satz: diapente + diatesseron = diapason vorkommt, könnte BOETIUS' *Institutio arithmetica* II: 48, wo eigentlich dieser Satz enthalten ist, gemeint sein. Außerdem sind FRONTINUS und BOETIUS die einzigen von WIDMAN erwähnten römischen Verfasser, und darum konnte er die zwei Namen leicht verwechseln. Daß übrigens WIDMANS historische Angaben im allgemeinen nur mit großer Vorsicht zu benutzen sind, geht auch aus einer von WAPPLER (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **5**, 1890, S. 155) angeführten Stelle hervor, wo WIDMAN behauptet, daß „JOHANNES DE SACROBUSCO . . hanc artem [= Algorismum] de arabico in latinum transtulit“.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 230. Aus dem, was Herr CANTOR Z. 23—26 bemerkt, könnte man glauben, daß WIDMAN vielleicht das Problem vom Eierkauf ersonnen hat, um den Beweis zu führen, wie tief er in den Sinn der beiden Zeichen plus und minus eingedrungen war. Aber in Wirklichkeit hat WIDMAN dies Problem gar nicht ersonnen, sondern sicherlich dasselbe, ganz wie die meisten anderen Aufgaben, aus einer älteren Schrift entnommen. Möglicherweise war seine Quelle die von M. CURTZE in den Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **7**, 1895, S. 40—49 zum Abdruck gebrachte „Regula falsarum posicionum declaranda per 12 regulas sive questiones“, wo (S. 47) die folgende Aufgabe vorkommt: „Septem ova demptis 2 denariis sunt empta pro 5 ₰ et uno ovo: queritur quanti precii est ovum“; freilich wird die Aufgabe dort vermittels der „Regula falsi“ gelöst. Meiner Ansicht nach hat WIDMAN diese an sich sehr schlecht gewählte Aufgabe nach einer unwesentlichen Änderung der Zahlen in sein Rechenbuch eingetragen lediglich um anzugeben, daß die Gleichung $ax - b = cx + d$ durch $x = \frac{b+d}{a-c}$ erfüllt wird. Daß WIDMAN statt „demptis“

das Minuszeichen und statt „et" das Pluszeichen benutzt, deutet meines Erachtens auf keine besondere Absicht hin. Aus der lateinischen Dresdener Algebra weiß man, daß Widman schon 1486 mit dem Sinn der Zeichen + und — vertraut war.

G. Eneström.

---

2 : 232. Die Erklärung des Ausdruckes „Regula sententiarum" als „unbestimmte Aufgaben, die mehrere Lösungen zulassen" ist ein wenig irreleitend. In Wirklichkeit sollte es „undeutliche Aufgaben" oder „vieldeutige Aufgaben" heißen (vgl. Leonardo Pisano, *Liber abbaci*, ed. Boncompagni, Rom 1857, S. 170), und die „Regula sententiarum" ist also nur eine Spitzfindigkeit ohne wissenschaftlichen Wert. Das einzige Beispiel, das Widman bringt, ist das folgende: „7 ist $\frac{1}{3}$ von $\frac{1}{4}$ von ainer zal, Nu wil ich wissen wie vil 9 ist $\frac{1}{5}$ vō der selbigē zal". Nach der ersten Angabe ist die Zahl offenbar 84, aber die zweite Angabe ist undeutlich, und Widman gibt an, daß sie auf vier verschiedene Weisen verstanden werden kann.

Dagegen kommen bei Widman wirklich unbestimmte Aufgaben im gewöhnlichen Sinne vor, z. B. die Aufgabe „Schaff/Esel/Ochsen" (siehe Bl. 130[b] der Auflage von 1526). Es handelt sich hier um eine Aufgabe, die wir durch die zwei Gleichungen $x + y + z = 100$, $\frac{1}{20}x + y + 3z = 100$ ausdrücken würden. Aus dem, was Widman sagt, kann man folgern, daß sein Verfahren der Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten entspricht. Hierdurch erhält man also $\frac{19}{20}x - 2z = 0$ oder $19x = 40z$, eine Gleichung, der offenbar die Werte $x = 40$, $z = 19$ genügen. Dann wird selbstverständlich $y = 41$, aber wie Probleme dieser Art, die nicht so einfach sind, gelöst werden sollen, geht aus dem Verfahren nicht hervor. Eine andere unbestimmte Aufgabe genau derselben Art (Bl. 89[a, b] der zitierten Auflage) entspricht der Lösung der Gleichung $35x + 18y = 24(x + y)$, also $11x = 6y$ und Widman gibt die richtige Lösung $x = 6$, $y = 11$ an. Endlich kommt am Ende der Arbeit die gewöhnliche Aufgabe in betreff „person an ainer zech, alls man, frawen, vnd Junckfrawen" (Bl. 189[b] der zitierten Auflage), aber hier wird nur das Resultat ohne weiteres gegeben.

G. Eneström.

---

2 : 234. In Widmans Arbeit wird nicht nur angedeutet, daß er die Algebra kannte, sondern darin kommt auch eine wirkliche algebraische Lösung einer Aufgabe vor. Auf diese Stelle (Bl. 215[b]—216[b] der Auflage von 1489, Bl. 174[b]—175[a] der Auflage von 1526) hat schon Drobisch aufmerksam gemacht, und J. Tropfke hat dieselbe in seiner *Geschichte der Elementar-Mathematik* (I, Leipzig 1902, S. 317) zum Abdruck gebracht. Es handelt sich um das Einschreiben eines Quadrates in einen Halbkreis, dessen Durchmesser 12 ist, und Widmans Lösung ist wesentlich die folgende: Nennt man die Seite des Quadrates x, so bilden die Strecken x und $2x$ zusammen mit dem Durchmesser 12 ein rechtwinkliges Dreieck, so daß $x^2 + (2x)^2 = (12)^2$, woraus $x = \sqrt{28\frac{4}{5}}$. Für x benutzt Widman ein Zeichen, das dem der späteren Cossisten ähnelt, für x^2 schreibt er Zensus und die Quadratwurzel bezeichnet er durch *ra.* oder ℞. (in der Auflage von 1526 kommt nur *ra.* vor).

G. Eneström.

---

2 : 234. Die Angabe: „Die dritte Abteilung [von WIDMANS Arbeit] ... beruft sich, wie schon gesagt worden ist, auf JULIUS FRONTINUS“, kann buchstäblich richtig sein, aber ist jedenfalls sehr irreleitend. In dieser dritten Abteilung wird FRONTINUS im Vorübergehen ein einziges Mal erwähnt, und dabei handelt es sich lediglich um gewisse Längen- und Flächenmaße. Die betreffende Stelle lautet (Bl. 175^b, 176^a der Auflage von 1526):

> darumb soltu mercken das alweg, partica ist 36 pedes in quadrato vñ in muro 6 vñ 12 oz [= unciae] 1 pes vnd in quadrato 144. Vnd wye wol vyl vnd mancherlay mass sein als dann klerlichen ausstrucket JULIUS FRONTINUS vñ ander mer die da schreiben in diser kunst ...

Ich habe behauptet, daß die fragliche Angabe sehr irreleitend ist, und als Beleg dieser Behauptung genügt es, darauf hinzuweisen, daß Herr CANTOR selbst irregeführt worden ist; S. 237 sagt er nämlich: „Das wichtigste geschichtliche Ergebnis der dritten Abteilung wird unbedingt darin bestehen, daß sie so gut wie ausser Zweifel setzt, daß das feldmesserische Werk des FRONTINUS ... auch am Ende des XV. Jahrhunderts noch vorhanden gewesen sein muß, um von WIDMAN als Quelle genannt werden zu können“. Aber aus dem obigen wörtlichen Zitate geht hervor, das WIDMAN gar nicht ein Werk des FRONTINUS als Quelle genannt hat, denn jener erwähnt nur ganz beiläufig, daß dieser über einen metrologischen Gegenstand geschrieben hat (vgl. HULTSCH, *Metrologicorum scriptorum reliquiae* II, Leipzig 1866, S. 56—57).

Ohne Zweifel beruht die irreleitende Angabe der *Vorlesungen* darauf, daß Herr CANTOR leider die Arbeit WIDMANS nicht zur Verfügung gehabt hat (vgl. *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst*, Leipzig 1875, S. 181), und darum die Angabe von DROBISCH: „in doctrina de mensuris [WIDMANNUS appellat] JULIUM FRONTINUM“ mißverstanden hat.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 234. Der Nachweis, daß WIDMAN sowohl in der „Regula lucri“ als in der „Regula excessus“ wesentlich dasselbe Verfahren anwendete, sowie die Frage, ob er nicht selbst bemerkt hat, daß er so zweimal unter zwei verschiedenen Namen das gleiche Verfahren lehrte, ist durchaus ohne Interesse, weil bei WIDMAN das Wort „Regula“ oder „Regel“ gewöhnlich nicht, wie Herr CANTOR hier anzunehmen scheint, Regel in unserem Sinne, sondern vielmehr Art von Aufgaben bedeutet (vgl. was Herr CANTOR selbst S. 232 Z. 8—11 sagt). Im allgemeinen ist nämlich für WIDMAN nicht die algebraische Formel, wodurch eine Aufgabe gelöst werden kann, sondern die Art der Aufgabe die Hauptsache; nun handelt es sich bei der „Regula lucri“ um Zinsprobleme, bei der „Regula excessus“ dagegen um eine Aufgabe, die wir durch die Gleichung $x(x+4) = 96$ ausdrücken würden, und diese zwei „Regeln“ repräsentieren von WIDMANS Standpunkt zwei verschiedene Arten von Aufgaben. Das, was Herr CANTOR S. 233 (Z. 12—13 von unten) „Gattung von Aufgaben“ nennt, d. h. Aufgaben, die durch dieselbe algebraische Formel gelöst werden, existiert eigentlich nicht für WIDMAN, so daß die von Herrn CANTOR gestellte Frage geradezu sinnlos ist. Mit ebensogutem Rechte könnte man z. B. die Frage aufwerfen, ob WIDMAN nicht gewußt hat, daß er in der ersten „Regula pulchra“ (es gibt nämlich drei „Regeln“ mit diesem Namen) dasselbe Verfahren als in der „Regula transversa“ lehrte; die erste Regel entspricht der Gleichung

$2\left[2\left\{2x-a\right\}-b\right]-c=d$, die zweite der Gleichung $\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}x-a\right\}-b\right]-c=d$, also handelt es sich in beiden Fällen um eine Gleichung ersten Grades. Aber, wie gesagt, haben solche Fragen von Widmans Gesichtspunkte aus keinen Sinn.

G. Eneström.

---

2 : 237. Z. 2—3 sollte das Zitat: „Das centrum das ist die zall die do ist von centruz biss in winckel" gestrichen werden, da es nicht belehrend sondern nur irreleitend ist Dies Zitat ist von Drobisch aus Widmans Aufgabe: „Wilt du aber wissen das centrum eynes triangels equilateri" (Bl. 169ª der Auflage von 1526) entnommen, und hier bedeutet „centrum eynes triangels" der Radius des Umkreises. Nun meint aber Widman gewöhnlich mit „centrum" den Mittelpunkt eines Kreises und definiert diesen Term auf folgende Weise (Bl. 164ª der Auflage von 1526): „ain punct ist von wölchn all lini aussgstreckt biss an die circūferēcz gleich sein Vñ der selbige punct wird Centrum genant des circkels". In dem von Herrn Cantor aus Drobischs Abhandlung entnommenen Zitate bedeutet darum „centrum" an der zweiten Stelle den Mittelpunkt des Umkreises, und jetzt versteht man leicht, daß Widmans Ausdruck sprachlich schlecht ist aber im Grunde einen verständigen Sinn hat. Aber dies kann der Leser der *Vorlesungen* gewiß nicht aus dem losgerückten Zitate erraten, und für ihn muß Widmans Ausdrucksweise durchaus unsinnig erscheinen. Jedenfalls enthält das Zitat nicht, wie man aus den Cantorschen Worten: „Das sind einige von den vorkommenden Erklärungen" annehmen muß, eine Erklärung des Termes „centrum", sondern eine Erklärung des von Widman ganz gelegentlich benutzten Ausdruckes „centrum eynes triangels".

G. Eneström.

---

2 : 237. Vgl. oben die zweite Bemerkung zu **2** : 234.

---

2 : 238. Hier werden die meisten Aufschlüsse, die Gerhardt an der von Herrn Cantor zitierten Stelle in betreff des Mönches Aquinus zusammengestellt hat, mitgeteilt. Nicht ohne Interesse wäre es indessen, hinzuzufügen, daß Gerhardt nach Quetif und Echard eine von Aquinus verfaßte Schrift mit dem Titel *De numerorum et sonorum proportionibus* erwähnt. Vielleicht wäre es möglich, diese Schrift wiederzufinden. Es ist nicht unwahrscheinlich, daß H. Grammateus dieselbe gekannt und für seinen Traktat *Algorithmus proportionum una cum monochordi generis dyatonici compositione* (Krakau 1514) benutzt hat, denn Grammateus war ein Schüler von A. Stiborius, der selbst Schüler von Aquinus war.

G. Eneström.

---

2 : 240. Die Angabe, daß in einem Beispiel der von Frater Fridericus (1455—1464) verfertigten algebraischen Handschrift (Cod. lat. Monac. 14908) die Regel Ta yen angewandt ist, verdient etwas deutlicher ausgedrückt zu werden. In der Tat wird in dieser Handschrift die fragliche Regel, soweit jetzt bekannt, zum erstenmal in einem abendländischen Traktat allgemein gegeben, das heißt: es wird gelehrt, daß und wie man die Hilfszahlen bestimmen soll, die Herr Cantor im ersten Bande (1^2, S. 644) der *Vorlesungen* durch

k_1, k_2, k_3 bezeichnet hat. Es wird nämlich hervorgehoben, daß man zu untersuchen hat, mit welcher Zahl das Produkt zweier der gegebenen Divisoren multipliziert werden soll, damit man nach Teilung mit dem dritten Divisor den Rest 1 bekomme. Benutzt man die Bezeichnungen der zitierten Stelle des ersten Bandes der *Vorlesungen*, kann man die Vorschrift so ausdrücken, daß man durch Probieren eine Zahl k_1 bestimmt, die der Bedingung $k_1 m_2 m_3 \equiv 1 \pmod{m_1}$ genügt. Wie man weiter verfahren soll, hat schon LEONARDO PISANO angegeben.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 240. Aus dem Cod. lat. Monac. 14908 hat CURTZE an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle auch einige lateinische Beispiele zu der Algebra zum Abdruck gebracht, darunter eine Aufgabe, die durch die Gleichung $x^2 + 25 = 15x$ gelöst wird. Diese hat natürlich die zwei Wurzeln $x = \frac{15}{2} \pm \sqrt{\frac{125}{4}}$, die beide positiv sind, aber der Verfasser des Traktates bemerkt: „Et quia hic non potest processus fieri secundum viam diminucionis, igitur necessarium est, quod fiat secundum viam addicionis. Nam quinta regula algebre hanc habet ex natura sue demonstracionis libertatem et hoc privilegium." Diese Bemerkung hat CURTZE erklärt durch Hinweis darauf, daß die Wurzel $\frac{15}{2} - \sqrt{\frac{125}{4}}$ eine andere in der Aufgabe vorkommende Größe negativ machen würde. Es ist also möglich, daß der Verfasser des Traktates sonst wirklich zwei Lösungen angegeben hätte, aber es ist ebensosehr möglich, daß er nur entweder $\frac{15}{2} - \sqrt{\frac{125}{4}}$ oder $\frac{15}{2} + \sqrt{\frac{125}{4}}$ als Lösung aufgeführt haben würde.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 242, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505.

---

2 : 242. Die Angabe (Z. 23—24): „Dagegen erscheint der Subtractionsstrich mit der Aussprache m i n n e r", sollte eigentlich heißen: „In den von WAPPLER 1887 und 1899 veröffentlichten Auszügen wird so gut wie ausschließlich das Wort m i n n e r bei den Subtraktionen benutzt; an einer einzigen Stelle erscheint das Zeichen —, und zwar einmal als gewöhnliches Minuszeichen, zweimal in einer verwandten Bedeutung". Die betreffende Stelle lautet:

> Aber 3 𝒩 — 2 ϑ stund 6 ϑ vnd 5 𝒩 . . . Darnach mache 2 ϑ stund 6 ϑ macht 12 ʒ — vnd mach 2 ϑ stund 5 𝒩 10 ϑ —.

Es handelt sich um das Produkt $(3 - 2x)(6x + 5)$, und statt zu sagen: „$-2x$ multipliziert mit $6x$ macht $-12x^2$" sagt der Verfasser (oder der Abschreiber?) der deutschen Dresdener Algebra: „$2x$ multipliziert mit $6x$ macht $12x^2$ —".

Jedenfalls ist diese Stelle von besonderem Interesse, weil sie zu beweisen scheint, daß der Subtraktionsstrich schon vor WIDMAN benutzt worden ist. WAPPLER hat nämlich nachträglich ermittelt (siehe A b h a n d l. z u r G e s c h. d. M a t h e m. **9**, 1899, S. 539, Fußnote 2), daß die Nachschrift der deutschen Dresdener Algebra lautet: „factum 81 altera post exaltacionis crucis" [= verfertigt am Ostersonnabend 1481] und im Jahre 1481 war WIDMAN ein sehr junger Student in Leipzig, der sicherlich noch nichts über die Algebra geschrieben

hatte. Die zitierte Fußnote von Wappler übersah ich, als ich meine Anfrage: *Ist Johannes Widman Verfasser der „Dresdener Algebra"?* (Biblioth. Mathem. $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 90) redigierte, sonst würde ich eine darin vorkommende Bemerkung etwas anders ausgedrückt haben.

In betreff des Multiplikationswortes „stund" ist zu bemerken, daß es allerdings in den von Wappler 1887 veröffentlichten Auszügen aus der deutschen Dresdener Algebra regelmäßig vorkommt; dagegen steht in dem von Wappler 1899 zum Abdruck gebrachten Beispiel (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 539—540) nicht „stund", sondern „mol". G. Eneström.

---

2 : 243, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382.

2 : 243. In betreff meiner letzten Bemerkung (BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382) teilt mir Herr Tropfke mit, daß er in Wirklichkeit das Zeichen der bekannten Größe der Dresdener lateinischen Algebra als Anfangsbuchstaben des Wortes „dragma" betrachtet, und daß seiner Ansicht nach der Abschreiber das richtige Zeichen verstümmelt hat. Diese Verstümmelung beruht nach Herrn Tropfke wahrscheinlich darauf, daß das richtige Zeichen einem φ ähnelte und von dem Abschreiber als ein solches aufgefaßt wurde. Mit dieser Erklärung kann ich sehr wohl einverstanden sein. In der Tat ähnelt in Rudolffs Algebra (1525) das Zeichen der bekannten Größe fast mehr einem verschnörkelten *d* als einem φ; auf der anderen Seite konnte der unkundige Abschreiber der Dresdener lateinischen Algebra das Zeichen seiner Vorlage, vorausgesetzt daß es mit dem Rudolffschen übereinstimmte, sehr leicht als ein φ gelesen haben. Daß er nicht φ sondern ϕ schrieb, ist ja nicht auffällig, wenn man die Form Φ in Betracht zieht. G. Eneström.

---

2 : 245, 246, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383.

---

2 : 246. Mit Recht bemerkt Herr Cantor (Z. 28), daß das „Compendium de ʒ et re" der lateinischen Dresdener Algebra viele Rechenfehler enthält. Im allgemeinen sind diese ohne Interesse, aber wenigstens einer dürfte verdienen, hervorgehoben zu werden, weil es sich um eine Aufgabe zu handeln scheint, die zu imaginären Lösungen führen würde. Die betreffende Gleichung (S. 15 des Wapplerschen Abdruckes) ist $6x^3 + 18x = 10x^2$, die abgesehen von der Wurzel $x = 0$ die zwei imaginären Wurzeln $x = \frac{5 \pm \sqrt{-83}}{6}$ hat. Indessen kommen diese Wurzeln nicht zum Vorschein, denn in der Handschrift findet sich als Lösung $\sqrt{3 - \left(\frac{5}{6}\right)^2}$, d. h. für die Gleichung $x^2 + b = ax$ wird die Formel $x = \sqrt{b - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$ benutzt. Daß hier der Fehler *ausschließlich* auf dem Abschreiber beruht, scheint mir weniger wahrscheinlich. G. Eneström.

---

2 : 247, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383—384.

2 : 249. Die ursprünglich von E. Wappler (*Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert,* Zwickau 1887, S. 10) herrührende Vermutung, daß

das von WIDMAN in seiner zweiten Vorlesungsanzeige erwähnte kleine kurzgefaßte Buch („compendiosus libellus") gerade die *Behende und hubsche Rechenung* vom Jahre 1489 war, halte ich für höchst unwahrscheinlich. Die zweite Vorlesungsanzeige ist offenbar älter als die dritte (aus dem Jahre 1486), rührt also spätestens aus dem Jahre 1486 her, und damals war die *Behende und hubsche Rechenung* vermutlich noch nicht verfaßt; nach WIDMANS Vorwort wurde das Buch auf SIEGMUND ALTMANNS Anregung bearbeitet. Jedenfalls kann dies Buch gewiß nicht ein „compendiosus libellus" genannt werden, und der „libellus" war offenbar lateinisch geschrieben. Dagegen ist es wohl möglich, daß die von WIDMAN erwähnte Schrift mit dem später von ihm veröffentlichten *Algorithmus integrorum cum probis annexis* identisch sei.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 250, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 82. — **2 : 253**, siehe BM 2_3, 1901, S. 353. — **2 : 273**, siehe BM 1_3, 1900, S. 505. — **2 : 274**, siehe BM 3_3, 1902, S. 325. — **2 : 281**, siehe BM 5_3, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506; 2_3, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM 1_3, 1900, S. 506—507. — **2 : 296**, siehe BM 2_3, 1901, S. 354.

---

2 : 304. Wenn Herr CANTOR hier die PEACOCKsche Erklärung des Wortes „consolare" sehr scharfsinnig nennt, so ist es angebracht, sich der alten Regel „de gustibus non est disputandum" zu erinnern. Dagegen erlaube ich mir zu bemerken, daß das Wort lange Zeit vor dem Erscheinen der Arithmetik von Treviso angewendet worden ist. Am Anfange des 11. Kapitels des *Liber abbaci*, das gerade die Überschrift „Incipit capitulum undecimum de *consolamine* monetarum" hat, definiert LEONARDO PISANO den Term „consolare" auf folgende Weise: „Moneta consolari dicitur, quando ponitur in libra ipsius aliqua data argenti quantitas". Zieht man jetzt in Betracht, daß „consolatus" schon im klassischen Latein die Bedeutung „ermutigt" hat, so liegt wohl der Gedanke ziemlich nahe, der Term „consolare" habe gar nichts mit astrologischen Träumereien zu tun, sondern sei geradezu das klassische Wort „consolari". Jedenfalls ist es angebracht zu erwähnen, daß der Term wenigstens auf LEONARDO PISANO zurückgeht.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 305, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 88. — **2 : 313**, siehe BM 1_3, 1900, S. 507. — **2 : 314**, siehe BM 7_3, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317**, siehe BM 5_3, 1904, S. 69; 7_3, 1906/7, S. 384.

2 : 319. In der 7. Distinction behandelt PACIUOLO auch (Bl. $105^{a,b}$) ein paar unbestimmte Probleme und bedient sich dabei der Regel der zwei Fehler, also ganz wie der anonyme Verfasser eines algebraischen Traktates aus der Mitte des 15. Jahrhunderts (vgl. BM 5_3, 1904, S. 202). Das erste Problem führt zu zwei Gleichungen von der Form

$$x + y + z + t = k, \qquad ax + by + cz + dt = k,$$

und PACIUOLOS Lösung ist wesentlich die folgende. Man wählt zwei Reihen von Zahlen x_1, y_1, z_1, t_1; x_2, y_2, z_2, t_x aus, die den Gleichungen

$$x_1 + y_1 + z_1 + t_1 = k, \qquad x_2 + y_2 + z_2 + t_2 = k$$

genügen, und bestimmt die Zahlen

$$\varepsilon_1 = k - (ax_1 + by_1 + cz_1 + dt_1), \qquad \varepsilon_2 = k - (ax_2 + by_2 + cz_2 + dt_2);$$

dann ist

$$x = \frac{\varepsilon_1 x_2 - \varepsilon_2 x_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad y = \frac{\varepsilon_1 y_2 - \varepsilon_2 y_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad z = \frac{\varepsilon_1 z_2 - \varepsilon_2 z_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad t = \frac{\varepsilon_1 t_2 - \varepsilon_2 t_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

Man sieht sofort, daß diese Werte den zwei Gleichungen genügen, aber gar nicht ganzzahlig zu sein brauchen, obgleich es sich um Anzahlen von Ziegen, Schweinen usw. handelt. Nur dadurch, daß die Versuchszahlen auf passende Weise gewählt sind, bekommt Paciuolo für die gesuchten Größen ganzzahlige Werte. Das zweite Problem ist eine gewöhnliche Zechenaufgabe mit Männern, Frauen und Kindern, und nur das Resultat wird angegeben. Paciuolo fügt hinzu: „Ma ingegnate a ponere: in modo che te vẽga persone sane: perche poi summando se fossero rotte li pezzi de fanciuli con quelli de le donne e de li homini non farienno persone . 20 .“. Er weiß also selbst, daß das Verfahren nicht immer ganzzahlige Werte gibt. Tartaglia, der in seiner Arbeit *General trattato di numeri et misure* (I, Venedig 1556, Bl. 277ª) Paciuolos Lösung erwähnt, bemängelt diesen, weil „non è vero, che la [nämlich die Frage] risolua totalmente per la detta position doppia, come finge“ und bemerkt, daß Fragen dieser Art zum Teil durch Herumtasten, zum Teil durch methodisches Verfahren gelöst werden. Nähere Auskunft hierüber verspricht Tartaglia später gelegentlich zu geben.

G. Eneström.

---

2 : 320, siehe BM **7**₃, 1906/7, S. 88—89. — **2 : 322,** siehe BM **6**₃, 1905, S. 399.

---

2 : 322. Wie Herr Cantor richtig hervorhebt, erwähnt Paciuolo die zweifache Möglichkeit der Auflösung der Gleichung $x^2 + c = bx$, aber daraus darf man nicht folgern, daß für Paciuolo Aufgaben, die durch diese Gleichung gelöst werden, wirklich zwei Lösungen hatten. Am Ende des Bl. 145ª behandelt Paciuolo die Aufgabe: Eine Zahl zu bestimmen, deren Quadrat um 4 vergrößert gleich das Fünffache der Zahl selbst ist, und gibt als Lösung nur $\sqrt{\frac{25}{4} - 4} + \frac{5}{2}$ an. Dann fährt er fort: „Ma ale volte varra la cosa a questo capitulo la $\frac{1}{2}$ · de le cose meno ditta ℞.“. Ebenso drückt sich Paciuolo an einer folgenden Stelle (Bl. 147ª Z. 7—9; vgl. Bl. 147ᵇ Z. 30—31) aus: „Ma a le volte se haue la verita a luno modo. A le volte a laltro. El perche se cauando la ℞. del ditto remanente de la mita de le cose non satisfacesse al thema. E tu la ditta ℞. agiongi a la mita de le cose.“ Hier scheint Paciuolo als Lösung der Gleichung $x^2 + c = bx$ in erster Linie $\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ anzugeben und nur wenn diese nicht angewendet werden kann, $\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$ als Lösung anzuerkennen.

Herr Cantor lenkt auch die Aufmerksamkeit darauf, daß Paciuolo die Bedingung $\frac{b^2}{4} \geq c$ ausdrücklich aufstellt. Ich erlaube mir die Bemerkung hinzuzufügen, daß Paciuolo nicht den Fall $\frac{b^2}{4} = c$ ganz einfach als Spezialfall der allgemeinen Formel behandelt, d. h. er ist nicht dazu gekommen, die Null als eine Größe zu betrachten, deren Quadratwurzel selbst Null ist. Unter-

solchen Umständen ist es kaum möglich die Gleichung $x^2 + \frac{b^2}{4} = bx$ *algebraisch* zu lösen, und daß PACIUOLO nicht auf algebraischem Wege zur Lösung $x = \frac{b}{2}$ gekommen war, sieht man daraus, daß er in erster Linie als Wurzel der Gleichung $x^2 + 6\frac{1}{4} = 5x$ die Quadratwurzel aus $6\frac{1}{4}$ angibt („sel n⁰ fosse eq̄le al quadrato de la $\cdot\frac{1}{2}\cdot$ de le cose alora la . ℞. de ditto q̄drato: cioe essa mita de cose serebe el quesito").   G. ENESTRÖM.

2 : 325, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 339,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 351,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87.

---

2 : 358. Herr CANTOR übergeht hier stillschweigend ein bei CHUQUET vorkommendes Beispiel der Auflösung quadratischer Gleichungen, das meines Erachtens von besonders großem Interesse ist, nämlich das 2. Beispiel der Seite 805 der Ausgabe von MARRE. Es handelt sich um die Gleichung $3x^2 + 12 = 12x$ und gemäß der von CHUQUET aufgestellten allgemeinen Regel wird als Lösung $x = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$ angegeben. In betreff des Wurzelwertes fügt CHUQUET hinzu: „reste .0. Donc ℞.²0. adioustee ou soustraicte auec .2. ou de .2. monte .2. qui est le nōbᵉ. que lon demande". CHUQUET rechnet also hier mit Null als mit einer wirklichen Größe und wenn man von den indischen Mathematikern absieht, so ist dies meines Wissens nicht vor CHUQUET vorgekommen. In der Geschichte der Verallgemeinerung des Zahlenbegriffs bezeichnet also das *Triparty* des CHUQUET einen Fortschritt, der bisher unbeachtet zu sein scheint (vgl. z. B. J. TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 155; *Encyclopédie des sciences mathématiques* I: 1, Leipzig 1904, S. 33, Fußnote 147).

G. ENESTRÖM.

---

2 : 358. Die Angabe: „Für CHUQUET . . . gab es also keine Auflösung $x = 0$" ist zum mindesten ein wenig irreleitend, denn tatsächlich gibt es bei CHUQUET Aufgaben, wo bei der Auflösung eine der gesuchten Größen den Wert Null bekommt, ohne daß er diesen Wert als unmöglich verwirft (siehe z. B. S. 641 der Ausgabe von MARRE: „Et Je treuue .30. 20. 10. 0. et moins .10. qui sont les cinq nombres que Je vouloye auoir").

Schwieriger ist dagegen zu entscheiden, ob CHUQUET Null als Wurzel einer aufgestellten *Gleichung* anerkennen will. In den meisten Fällen, wo wir die Lösung $x = 0$ angeben würden, behauptet er ausdrücklich, daß die gesuchte Größe „impossible" oder „irreperible" sei, aber zuweilen fehlt diese Behauptung, z. B. S. 778 der Ausgabe von MARRE, wo es sich um die Gleichung $\sqrt{\frac{12x}{3x}} = \sqrt{5}$ handelt. Aus dieser Gleichung leitet CHUQUET zuerst $\sqrt{4} = \sqrt{5}$ her und bemerkt dann: „Et pour tant que les parties sont sembles et Inegales cest signe que le nombre que lon βche(!) est .0.".   G. ENESTRÖM

2 : 360, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314. — **2 : 379,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82 — **2 : 395,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/07, S. 211.

---

2 : 398. Über Christoff Rudolffs Lebensverhältnisse kennt man eigentlich fast gar nichts. Daß er in Jauer in Schlesien geboren wurde, ist ja sehr wahrscheinlich, da er sich selbst „vom Jawer" nennt. Daß er ein Schüler des Grammateus war, erwähnt er am Schluß seiner Algebra, und die betreffende Stelle hat Gerhardt (*Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 38, Fußnote 2) vollständig zum Abdruck gebracht. Sonst habe ich nur die folgende, freilich sehr unbedeutende biographische Notiz über Rudolff auffinden können, die er selbst im 210. Beispiele seiner Algebra (Bl. R ii[b]) mitgeteilt hat:

> Mit diesem exempl ward ich zu Breslaw von meinē guten freund Johansen Seckerwitz, Rechenmeister daselbs, durch die coss zu machē ersucht, war zur selbigen zeyt der regl quantitatis nit bericht.

Es handelt sich um eine Aufgabe, die durch die folgenden drei Systeme von Gleichungen gelöst wird:

$$6x_1 + 9y_1 + 15z_1 = 32 \cdot 7, \qquad x_1 + y_1 + z_1 = 32,$$
$$6x_2 + 9y_2 + 15z_2 = 32 \cdot 10, \qquad x_2 + y_2 + z_2 = 32,$$
$$6x_3 + 9y_3 + 15z_3 = 32 \cdot 13, \qquad x_3 + y_3 + z_3 = 32,$$

und bei deren Lösung Rudolff selbst die sogenannte „regula quantitatis", d. h. zwei unbekannte Größen anwendet. Rudolff hat sich also vor 1525 einige Zeit in Breslau aufgehalten. Daß er schon 1544 gestorben war, scheint aus einer Stelle der *Arithmetica integra* (Bl. 226[a]) hervorzugehen, wo Stifel Rudolff erwähnt und dabei den Ausdruck „iam in Christo quiescentem" anwendet.

Herr Cantor nennt die erste von Rudolff veröffentlichte Arbeit „eine Coss", und in der Tat ist *Die Coss* der von Stifel herrührende Titel der Neuausgabe von 1553—1554, während Rudolff selbst seiner Arbeit den Titel *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeincklich die Coss genēnt werden* gab.

In seiner Widmungsschrift erwähnt Rudolff, daß er „in kürz dise regeln Algebre in latein . . . in druck geben" will, aber erschienen ist diese lateinische Ausgabe sicherlich nicht. Dagegen ist sie vielleicht handschriftlich aufbewahrt, und Chasles (siehe *Geschichte der Geometrie*, übertr. von L. A. Sohncke, Halle 1839, S. 638—639; vgl. *Catalogo della biblioteca Boncompagni* I, Roma 1898, S. 137) erwähnt eine andere lateinische Übersetzung im Cod. 7365 der Nationalbibliothek in Paris.

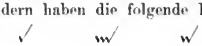
G. Eneström.

---

2 : 399, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107—108.

---

2 : 399. Die Wurzelzeichen bei Rudolff sehen nicht so aus, wie Herr Cantor Z. 15 angibt, sondern haben die folgende Form



Wenn man unter Bezugnahme auf die in der Dresdener lateinischen Algebra vorkommenden Punkte (vgl. was Herr CANTOR weiter oben S. 243 nach WAPPLER mitteilt) den kleineren Strich des Quadratwurzelzeichens als einen Punkt auffaßt, so könnte man sagen, daß RUDOLFF als Quadrat-, Kubik- und Biquadratwurzelzeichen bzw. ein, drei und zwei miteinander durch kleine schräge Striche verbundene Punkte benutzt und in jedem Falle an der rechten Seite des letzten Punktes einen längeren schrägen Strich, der aufwärts führt, hinzufügt. Diese Wurzelzeichen hat auch J. SCHEYBL in seiner Algebra benutzt (siehe *EUCLIDIS . . . sex libri priores . . . algebrae porro regulae . . .*, Basileae 1550, S. 35).

Die meisten Abbildungen der RUDOLFFschen Zeichen für $\sqrt[3]{\ }$ und $\sqrt[4]{\ }$, die ich gesehen habe, sind ungenau, wenn auch nicht so ungenau wie die der *Vorlesungen*. Gut sind die Abbildungen in GERHARDTS zweitem Artikel *Zur Geschichte der Algebra in Deutschland* (Monatsber. d. Akad. d. Wiss. zu Berlin 1870, S. 152); TROPFKE (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 191) hat unrichtig vor dem ersten Punkte einen kleinen Strich, und noch weniger genau sind die Abbildungen bei TREUTLEIN (*Die deutsche Coss;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **2**, 1879, S. 45), wo der erste Punkt in ein *c*-ähnliches Zeichen verwandelt worden ist.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß RUDOLFF immer seine Wurzelzeichen „Punkte" nennt (vgl. z. B. GERHARDT, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 57, Fußnote 2), obgleich sie tatsächlich wie Haken oder wie Haken mit Zickzacklinie aussehen.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 401, 405, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89.

---

2 : 413. Der Passus (Z. 32—34): „Dazu gehört weniger ein in Dreiecksgestalt angeordnetes Einmaleins, für welches wir (S. 229) einen jüdischen Vorgänger denken müssen" sollte gestrichen werden, denn nach STEINSCHNEIDER (*Intorno a JOHANNES DE LINERIIS (DE LIVERIIS) e JOHANNES SICULUS;* Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, S. 350; vgl. *Brani dell'aritmetica d'ELIA MISRACHI*, Rom 1866, S. 59—62) kommt die fragliche Tafel in der hebräischen Originalausgabe (1534) der Schrift des MISRACHI *nicht* vor. WERTHEIM, der nur die Ausgabe oder vielleicht richtiger die Bearbeitung von MÜNSTER und SCHECKENFUCHS (1546—1547) benutzt hat, irrt folglich, wenn er in seiner Schrift *Die Arithmetik des ELIA MISRACHI* (2. Aufl., Braunschweig 1896, S. 17) behauptet, daß MISRACHI den Gebrauch des Einmaleins lehrte.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 419. Hier gibt Herr CANTOR nach UNGER Auskunft über die verschiedenen von JACOB KÖBEL verfaßten Rechenbücher. Indessen hat KÖBEL noch ein Rechenbuch veröffentlicht, das meines Wissens in keiner historischen oder bibliographischen Arbeit beschrieben worden ist. Der Titel lautet:

Ein Neuw Rechē ‖ püchlein/ Wie mañ uff den | Linien vnd Spacien/ mit Re | chenpfenningen/ leichtlich Re | chen Lernen solle/ Mit viln zusetzen/ vor | nie Getrückt/ vnd ytzunt zu Op | penheym offenbart. | Wie mann ein Wurtzel/ auß einer ‖ Quadryrten/ oder Cubirten Zalen/ auff | den Linien

vnd Spacien Erlernen solle. ‖ Wie man̄ Ewiglich alle Zeit Jar ‖ vn̄ Monat/ ein Neuwē Monschein/ uff den Linien vn̄ Spacien/ nach Mittelm Lauff/ Erfaren solle. Getrückt zu Oppenheym/ Mit ‖ Keyserlichē Freiheiten/ vn̄ schwerē penē ‖ inn VI: Jaren nit nachtzutrücken.

Die Auflage hat 100 römisch numerierte und dann noch 4 ungezählte Blätter, die das Register enthalten. Ob als Format Quart oder Oktav angegeben werden soll, dürfte kaum entschieden werden können; die Bogen A, C, F, I, M, P, S enthalten 8, die Bogen Aa, B, D, E, G, H, K, L, N, O, Q 4 Blätter. Am Ende der letzten Seite findet sich das Druckjahr „Anno etc. 1.5.22 .·.". Der Verfasser ist nicht auf dem Titelblatt genannt, aber das Vorwort beginnt: „Jacob Köbel Statschreiber zu Oppenheym etc. Zu dem Leser".

Der Titel der Auflage ist nicht vollständig, denn das Buch enthält nicht nur Rechnen auf Linien. Der vierte Teil (Bl. LXVII—LXXVIII) bringt Bruchlehre, der fünfte Teil (Bl. LXXVIII—XCII) Regeldetri sowie verwandte Regeln nebst einigen Scherzaufgaben. Den Schluß bildet die im Titel erwähnte Mondrechnung.

Von dieser Auflage besitze ich selbst ein Exemplar; ein anderes Exemplar besaß M. Chasles (siehe *Catalogue de la bibliothèque scientifique . . . de M. Chasles*, Paris 1881, S. 206). G. Eneström.

---

2 : 420, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 83.

---

2 : 420. In seinem Rechenbuch von 1522 bediente sich Köbel des Linienrechnens sowohl bei der Kubik- als bei der Quadratwurzelausziehung. Als Beispiel der Kubikwurzelausziehung kommt bei ihm $\sqrt[3]{12167} = 23$ vor (Bl. LIX—LX). G. Eneström.

---

2 : 420. Die zwei in der Fußnote 7 zitierten, jetzt nicht leicht zugänglichen Programme von B. Berlet sind 1892 zum zweitenmal herausgegeben unter dem Titel: *Adam Riese, sein Leben, seine Rechenbücher und seine Art zu rechnen. Die Coss von Adam Riese* (Leipzig 1892, VIII + 62 S. + Porträt + Facsim.), versehen mit einem Vorwort, worin die früheren bibliographischen Angaben teilweise ergänzt wurden. G. Eneström.

---

2 : 421. Z. 10 dürfte „die drei ersten" statt „jedes" zu setzen sein. Vermutlich hängt die Angabe des Herrn Cantor damit zusammen, daß er S. 422 auf Grund eines Mißverständnisses eine nicht existierende Auflage des *Büchleins auff den Schöffel, Eimer vnd Pfundtgewicht* aufgeführt hat (vgl. die folgende Bemerkung). G. Eneström.

---

2 : 422. Z. 25 soll ohne Zweifel „1536" statt „1533" stehen; wenigstens kennen Berlet und Unger nur eine Auflage vom *Büchlein auff den Schöffel, Eimer vnd Pfundtgewicht*, nämlich die 1536 von Lotter in Leipzig gedruckte. Freilich steht dort auf dem Titelblatt: „durch Adam Riesen 1533", und vermutlich hat Herr Cantor daraus gefolgert, daß das Büchlein schon 1533 nicht nur verfaßt, sondern auch herausgegeben wurde. G. Eneström.

---

2 : 425, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507.

---

2 : 426. Hinsichtlich der acht bei Rudolff vorkommenden Gleichungsformen ist besonders die Behandlung der sechsten von Interesse, weil daraus hervorgeht, wie wenig man noch am Anfange des 16. Jahrhunderts damit vertraut war, daß eine Gleichung mehr als eine Wurzel haben kann. Nachdem nämlich Rudolff die Lösung $x = \frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$ der Gleichung $ax^2 + c = bx$ angegeben hat, fährt er fort (Bl. H i[a]):

> Bey diser equation soltu merckē, wañ die größer quātitet mer inhelt dañ die kleiner so muß radix quadrata addirt werdē. bedeüt aber die größer minder dann die kleiner so muß sie subtrahirt werden von $\frac{1}{2}$ des mittern quocients.

Nun bedeutet nach Rudolffs Terminologie (vgl. Bl. G vii[a]) „die größer quantitet" den Koeffizienten von x^2 und „die kleiner quantitet" den Koeffizienten von x^0, aber aus seinen Beispielen geht hervor, daß diese Ausdrücke hier bzw. die Koeffizienten von x und x^0 bedeuten müssen. Seine Bemerkung enthält also, daß die Gleichung $ax^2 + c = bx$ nur eine einzige Lösung hat, nämlich $x = \frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$, wenn $b > c$, und $x = \frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}}$, wenn $b < c$ (vgl. Treutlein, *Die deutsche Coss;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **2**, 1879, S. 75). Wie Rudolff diese durchaus willkürliche Regel aufstellen konnte, gibt er nicht an; am Schluß seines vom Jahre 1526 datierten Rechenbuches hat er auch anerkannt, daß sie unrichtig ist, und daß jede Gleichung von der Form $ax^2 + c = bx$ in Wirklichkeit zwei Wurzeln hat, obgleich die Aufgabe, die durch die Gleichung gelöst werden soll, sehr oft derart ist, daß die eine Wurzel nicht angewendet werden kann (vgl. Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland,* München 1877, S. 58, Fußnote 2). Auf diese Berichtigung (die Stifel in die Neuausgabe der Rudolffschen Arbeit Bl. 143[b] eingefügt hat) deuten die ziemlich dunkeln Worte des Herrn Cantor (S. 427 Z. 21—22) hin: „Ja auch die Zwiespaltigkeit, um Rudolffs Ausdruck anzuwenden, bringt er erst nachträglich zur Rede".

G. Eneström.

---

2 : 427, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314—315.

---

2 : 427. Es ist richtig, daß Rudolff die zweite Unbekannte, die er „quantitet" nennt, durch q darstellt, aber diese Abkürzung ist nicht die einzige und noch weniger die erste, die er anwendet. In der Tat wird „quantitet" Bl. P vii[a] definiert, und in den Rechnungen werden dann teils das ganze Wort quantitet (z. B. Bl. P vii[b] Z. 1), teils die Abkürzungen quanti: (z. B. Bl. Q i[b] Z. 1), quant: (z. B. Bl. Q iii[a] Z. 13), quantit: (z. B. Bl. Q iv[b] Z. 10), quāt: (z. B. Bl. Q viii[a] Z. 3 v. u.), quā (z. B. Bl. Q viii[a] Z. 2 v. u.), quan (z. B. Bl. Q viii[a] Z. 5 v. u.) und qu (z. B. Bl. R i[b] Z. 5) benutzt. Erst Bl. R i[a] erscheint die Abkürzung q oder q:, und von nun an wendet Rudolff dieselbe vorzugsweise an. Der hier hervorgehobene Umstand ist für die Geschichte der mathematischen Zeichensprache von Interesse, weil er zeigt, wie sich die Zeichen allmählich und fast unbewußt aus den Abkürzungen entwickelten.

G. Eneström.

---

2 : 428. Außer der von Herrn Cantor erwähnten unbestimmten Aufgabe gibt es in Rudolffs Algebra noch viele andere Aufgaben dieser Art (siehe Bl. Lviii[a, b] Ri[a], Riv[a]—Rvii[a]). Von besonderem Interesse sind die fünf Aufgaben 213—217, weil die Lösungen ganze Zahlen sein müssen; es handelt sich nämlich um Personen, die zu einer Zeche zusammenkommen oder um Verkauf von Pferden, Ochsen usw. In jeder Aufgabe werden drei Zahlen gesucht, und Rudolff löst die Aufgabe dadurch, daß er die erste Zahl als die eigentlich Unbekannte annimmt, und die zwei übrigen als Funktionen dieser Unbekannten ausdrückt. Auf diese Weise bekommt er vorläufig für die fünf Aufgaben bzw. die Lösungen:

[213] $x, \quad 30 - 3\frac{2}{3}x, \quad 2\frac{2}{3}x;$

[214] $x, \quad 20 - 5x, \quad 4x;$

[215] $x, \quad 6\frac{2}{3} - 1\frac{2}{3}x, \quad 13\frac{1}{3} + \frac{2}{3}x;$

[216] $x, \quad 26 - 2x, \quad x - 7;$

[217] $x, \quad 100 - 3\frac{2}{19}x, \quad 2\frac{2}{19}x.$

Dann gibt er an, wie viele ganzzahlige Werte x in jedem Falle haben kann, nämlich:

$$[213]\ x = 3,\ 6; \quad [214]\ x = 1,\ 2,\ 3; \quad [215]\ x = 1;$$
$$[216]\ x = 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12; \quad [217]\ x = 19.$$

Die Aufgaben [214] und [216] sind ja sehr einfach, da man nur zu beobachten hat, daß x nicht zu groß oder zu klein genommen wird. Auch die Aufgaben [213] und [217] sind nicht besonders verwickelt, weil man sofort sieht, daß x ein Multipel von 3 bzw. von 19 sein muß. Etwas schwieriger ist die Aufgabe [215], weil x so gewählt werden muß, daß $\frac{1+2x}{3}$ eine ganze Zahl wird. Auch hier gibt Rudolff die Lösung richtig und vollständig an, denn der Wert $x = 4$, wodurch die zweite Zahl 0 wird, was von seinem Gesichtspunkte aus unzulässig.

Rudolffs Verfahren kann als der erste Schritt zu einer methodischen Lösung unbestimmter Aufgaben ersten Grades in ganzen Zahlen bezeichnet werden. Den zweiten Schritt machte Bachet de Méziriac, indem er zeigte, wie man die ganzzahligen Werte der Ausdrücke von der Form $\frac{a+bx}{c}$ ermitteln soll.

G. Eneström.

---

2 : 429, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202.

---

2 : 429. Den meisten Lesern dürfte es unverständlich sein, wie Herr Cantor behaupten kann (Z. 1—2), daß die Druckwerke des Apianus und des Riese, wo die „regula cecis“ vorkommt, später als Rudolffs Rechenbuch, dessen Druckjahr nach der zweiten Auflage der *Vorlesungen* (S. 398) 1532 ist, veröffentlicht wurden. In betreff des Rechenbuches von Apianus (1532) erklärt sich die Sache, wenn man die erste Auflage der *Vorlesungen* einsieht, denn dort findet man (S. 365) die gewöhnliche Angabe (1526) hinsichtlich des Druckjahres des Rechenbuches von Rudolff. Unerklärlich ist dagegen die Cantorsche

Behauptung in bezug auf Riese, denn Berlet (*Adam Riese*, Leipzig 1892, S. 24) und Unger (*Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung*, Leipzig 1888, S. 50) haben darauf hingewiesen, daß Riese die „regula cecis" in seiner *Rechenung auff der linihen vnd federn* behandelt, und dies Buch erschien, wie Herr Cantor sowohl in der ersten als in der zweiten Auflage (S. 421) der *Vorlesungen* richtig angibt, schon 1522. Nun kennt man allerdings kein Exemplar dieser ersten Auflage, aber Unger hat ein Exemplar der zweiten, im Jahre 1525 erschienenen Auflage eingesehen, und da er ausdrücklich angibt, daß sich darin die „regula cecis" findet, kann man schon hieraus folgern, daß diese Regel jedenfalls in einem vor Rudolffs Rechenbuch veröffentlichten Druckwerke vorkommt. Daß die Regel auch in der ersten Auflage von 1522 vorkam, hat man nicht den geringsten Grund zu bezweifeln.

Über Rieses Verfahren bekommt man bei Berlet (a. a. O.) und Unger (a. a. O. S. 100) nähere Auskunft. Sind drei Unbekannte vorhanden, so eliminiert Riese zuerst eine derselben und erhält dadurch eine Gleichung von der Form $ax + by = c$. Dann zerlegt er durch Probieren c in zwei Teile so, daß der eine Teil durch a und der andere Teil durch b teilbar ist, also ganz wie Initius Algebras (vgl. Biblioth. Mathem. **7**$_3$, 1906/7, S. 392). Sind nur zwei Unbekannte vorhanden, so handelt es sich natürlich um eine bestimmte Aufgabe, ist dagegen die Zahl der Unbekannten größer als drei, so muß man c in mehr als zwei Teile zerlegen.

Daß ein Beispiel der „regula cecis" schon in Widmans Rechenbuch von 1489 vorkommt, habe ich oben in der Bemerkung zu **2** : 232 erwähnt.

G. Eneström.

---

2 : 430, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145.

---

2 : 437—438. Wenn es sich lediglich um eine Geschichte der sogenannten Divinationsaufgaben und deren Lösungen handelt, so kann ohne Zweifel die Behandlung des hier erwähnten Kunststückchens Stifels sowie die Bemerkung: „welchem wir nirgend anderswo begegnet zu sein uns erinnern können" von Interesse sein — ich kenne auch keinen früheren Verfasser, bei dem genau dies Kunststückchen vorkommt. Legt man dagegen Gewicht auf die Herausarbeitung des eigentlichen mathematischen Ideengehalts (vgl. Biblioth. Mathem. **8**$_3$, 1907/8, S. 10, Fußnote 1), so ist hier eine andere Behandlungsweise erwünscht. Dann sollte zuerst darauf hingewiesen werden, daß das Kunststückchen offenbar ein sehr einfaches Beispiel der Ta-yen-Regel ist, die Herr Cantor in den *Vorlesungen* schon vielfach erwähnt und behandelt hat (siehe **1**^{2}, S. 643—644; **2**^{2}, S. 26, 240, 287, 428). Nun kannte man schon im 15. Jahrhundert in Deutschland, wie ein solches Beispiel gelöst werden soll (vgl. oben die Bemerkung zu **2** : 240), und die einzige Schwierigkeit in diesem Falle ist offenbar, ein Multipel von a zu finden, das durch $a + 1$ geteilt 1 als Rest liefert. Daß a^2 ein solches Multipel ist, ersieht man sogleich, weil $a^2 = (a+1)(a-1)+1$, und dadurch wird der lange von Herrn Cantor gebrachte Beweis ohne weiteres unnötig, denn es genügt auf S. 644 des 1. Bandes der *Vorlesungen* zu verweisen. Auf der anderen Seite war es im 16. Jahrhundert nicht ganz leicht zu entdecken, daß a^2 wirklich das gesuchte Multipel ist, und aus diesem

Grunde verdient ohne Zweifel das Beispiel erwähnt zu werden; sonst gibt es bekanntlich in fast jedem größeren Rechenbuch des 16. Jahrhunderts Probleme ähnlicher Art, d. h. wo es sich darum handelt, Zahlen zu bestimmen, wenn man die Reste kennt, die bei gewissen Divisionen übrigbleiben.

G. Eneström.

---

2 : 440, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325.

---

2 : 444. Auch Köbel hat Kubikwurzelausziehungen mittels Rechenpfennigen gelehrt (siehe oben die Bemerkung zu 2 : 420).

---

2 : 449, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140.

---

2 : 452. Hier sollte Z. 8 meines Erachtens $\sqrt{3} \sim \frac{16}{9}$ statt $3 \sim \left(\frac{16}{9}\right)^2$ gesetzt und der folgende Passus (Z. 9—14): „Es ist hier ... Durchmesser galt" gestrichen werden. Es ist durchaus richtig, daß S. Günther am Ende der von Herrn Cantor zitierten Fußnote die Annäherungsformel $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \sim \left(\frac{2}{3} a\right)^2$, d. h. $\sqrt{3} \sim \frac{16}{9}$ als „einen ganz eigenartigen Versuch, die beiden ältesten Werte von π durch eine anderweite Flächentransformationsaufgabe unter einander in Beziehung zu setzen" bezeichnet, aber Herr Cantor würde sicherlich seinem alten Schüler einen wirklichen Dienst erwiesen haben, wenn er die Günthersche Bemerkung *lediglich* als einen Scherz betrachtet hätte. Man braucht nämlich nicht besonders scharfsinnig zu sein, um einzusehen, wie unzutreffend diese Bemerkung ist, da es sich gar nicht um zwei Werte von π sondern um $\sqrt{3}$ und $\frac{16}{9}$ handelt, und diese zwei Zahlen sind ja *nur* aus dem Grunde untereinander in Beziehung gesetzt, weil die eine eine *irrationale* Zahl ist. Wenn Herr Cantor selbst die Formel $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \sim \left(\frac{2}{3} a\right)^2$ einen „ungemein eigentümlichen Zufall, wenn wirklich ein Zufall" nennt, so erlaube ich mir auf S. 377—378 der 3. Auflage des 1. Bandes der *Vorlesungen* hinzuweisen, wo er durchaus vergessen hat, einen „ungemein eigentümlichen Zufall" genau derselben Art hervorzuheben. Hier erwähnt Herr Cantor, daß bei Heron zweimal eine geometrische Konstruktion vorkommt, die der Annahme $\sqrt{3} \sim \frac{7}{4}$ entspricht. Da nun bekanntlich bei den Indern der Wert $\pi = \left(\frac{7}{4}\right)^2$ nachgewiesen worden ist, so ist es eigentlich eine Inkonsequenz, daß Herr Cantor nicht an dieser Stelle die folgende Bemerkung einfügt: „Es soll hier auf den ungemein eigentümlichen Zufall aufmerksam gemacht werden, daß von den beiden als gleichwertig angenommenen Zahlen die eine $\left(\frac{7}{4}\right)^2$ bei den Indern, die andere 3 bei nahezu allen Völkern des Altertums als die Verhältniszahl des Kreisumfangs zu seinem Durchmesser galt". Denn der Verfasser der *Geometria deutsch* kannte sicherlich ebensowenig den ägyptischen Wert für π als Heron den indischen.

G. Eneström.

2:454, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2:474,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141. — **2:479—480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385. — **2:481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **8**$_3$, 1907/8, S. 83. — **2:482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2:483,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 291. — **2:484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:486, 489,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2:497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2:503, 505,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2:509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2:510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:524,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 90. — **2:527,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2:529,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91. — **2:530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:531,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212. — **2:532,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 292; **8**$_3$, 1907/8, S. 84. — **2:535,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:536,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2:537,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2:539,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 293. — **2:541,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2:547,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 84 — **2:548,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2:550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355. — **2:554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2:561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2:565,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2:566,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 85. — **2:567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2:569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2:576,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2:580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207; **8**$_3$, 1907/8, S. 85—86. — **2:582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2:585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2:592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:593,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2:594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2:597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2:602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270.

---

2 : 603. Die hier nach einem Antiquariatskataloge zitierte, angeblich 1600 in London gedruckte und von einem gewissen Hamson herrührende englische Übersetzung von Pitiscus' Trigonometrie existiert sicherlich nicht; vermutlich ist 1600 Druckfehler statt 1630, wie Hamson ganz gewiß Druckfehler statt Handson ist. Die erste englische Übersetzung von Pitiscus' Trigonometrie ist ohne Zweifel die 1614 in London erschienene; diese hat den Titel:

„Trigonometry: or the doctrine of triangles. Now translated into English by Ra. Handson. Whereunto is added (for the Marriners vie) certaine Nauticall questions, together with the finding of the variation of the compasse. All performed arithmetically, without Mappe, Sphaere, Globe, or Astrolabe, by the said R. H.".

Die Arbeit ist in Quartformat und besteht aus drei Teilen [I : (12) + 176 S.; II : 33 + (3) S.; III : (92) S.]. Der dritte Teil hat den Spezialtitel: „A canon of triangles: or, the tables of sines, tangents and secants, the radius assumed to be 100,000".

Eine spätere Auflage dieser Übersetzung mit dem Druckjahre 1630 findet sich im British museum, und vermutlich ist diese Auflage in dem von Herrn Cantor zitierten Antiquariatskataloge gemeint.

G. Eneström.

2:603—604, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108. — **2:605,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 86. — **2:610,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 388. — **2:611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S.277; **2**$_3$, 1901, S. 146.

2 : 612. Da Z. 19—23 die Göttinger Handschrift der Algebra des Initius Algebras im Vorübergehen erwähnt wird, könnte man die Bemerkungen, die sich auf diese Arbeit beziehen, hier unterbringen. Jetzt beschränke ich mich darauf hinzuweisen, daß die Algebra einen kleinen Beitrag zur Geschichte der Auffindung der Faktoren ganzer Zahlen bietet. Das Verfahren des Initius Algebras ist wesentlich das folgende (siehe M. Curtze, *Die Algebra des Initius Algebras;* Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 545—548). Ist N die gegebene ganze Zahl, und wird $N = n^2 + a$ gesetzt, wo $a < 2n + 1$, so untersucht man, ob die Zahlen $\frac{m^2+a}{n-m}$ $(m = 1, 2, 3, \ldots)$ ganz oder gebrochen sind; ist $\frac{m^2+a}{n-m}$ eine ganze Zahl, so ist $n - m$ ein Faktor von N. Die Richtigkeit der Regel ist leicht einzusehen, denn

$$\frac{N}{n-m} = \frac{n^2+a}{n-m} = \frac{n^2-m^2+m^2+a}{n-m} = n + m + \frac{m^2+a}{n-m}.$$

G. Eneström.

---

2 : 612—613, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306; **7**$_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906/7, S. 214, 389; **8**$_3$, 1907/8, S. 86—87. — **2 : 622,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87. — **2 : 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2 : 642,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 666, 667,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 88—89. — **2 : 669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 687,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 391; **8**$_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **7**$_3$, 1906/7, S. 394—395. — **2 : 700, 701, 703,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—272.

---

2 : 703. Die englische Übersetzung von Pitiscus' Trigonometrie durch R. Handson (nicht „Hamson") erschien zuerst 1614 (vgl. oben die Bemerkung zu 2 : 603). Der Verweis auf Pitiscus in Nepers *Descriptio* von 1614 bezieht sich also wahrscheinlich auf das lateinische Original.

G. Eneström.

---

2 : 704, 705, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 272—273.

---

2 : 712. Über die hier erwähnte *Logistica prosthaphairesis astronomica* (Z. 3 lies 1609 statt 1619) hat A. von Braunmühl nähere Auskunft gegeben teils in dem Aufsatze *Zur Geschichte der prosthaphaeretischen Methode in der Trigonometrie* (Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 15—29), den Herr Cantor S. IX seines Vorwortes nennt, teils in den *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* I (Leipzig 1900, S. 197—199). Da Braunmühl den Verfasser „einen gewissen Melchior Jöstel, der aus Dresden stammte

und in Wittenberg Mathematik lehrte" nennt (Herr CANTOR sagt nur, daß JÖSTEL ein Wittenberger Mathematiker war), mache ich darauf aufmerksam, daß nach B. BERLET (*ADAM RIESE,* Leipzig 1892, S. 4) MELCHIOR JÖSTEL am 10. April 1559 zu Dresden geboren ist, ein Schüler von ABRAHAM RIESE (dem Sohn des berühmten ADAM RIESE) war, später in Wittenberg studierte und 1584 eine Arbeit seines Lehrers mit dem Titel: „Algorithmus von flechen, so an art vnd gestalt einander enlich vnd gleichförmig vnd mit geraden linien beschlossen werden" ins Lateinische übersetzte; er scheint 1586 selbst einen Traktat über irrationale Zahlen verfaßt zu haben.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 714, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 715,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 726,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90. — **2 : 727,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 765,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392—393.

---

2 : 773. Wie Herr CANTOR richtig annimmt, ist die Arbeit von BACHET, die hier unter dem Titel „Eléments d'arithmétique" erwähnt wird, niemals von ihrem Verfasser herausgegeben worden. Indessen wurde das Manuskript der Arbeit, deren wirklicher Titel *Elementorum arithmeticorum libri 13* lautet, schon vor etwa 30 Jahren von Herrn CH. HENRY in der Bibliothek des „Institut" in Paris wiedergefunden, und Herr HENRY hat über den Inhalt derselben ausführliche Auskunft gegeben im X. Abschnitte der Abhandlung: *Recherches sur les manuscrits de PIERRE DE FERMAT suivies de fragments inédits de BACHET et de MALEBRANCHE* (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **12**, 1879, S. 619—641; S. 95—117 des Sonderabzuges).

G. ENESTRÖM.

---

2 : 775, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393. — **2 : 791,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405 — **2 : 793—794,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe

BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 91. — **3 : 24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 37,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 63,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299. — **3 : 70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3 : 78,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92. — **3 : 82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 97,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 300. — **3 : 112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518. — **3 : 118,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3 : 122,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 418; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319. — **3 : 397,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3 : 408,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 306. — **3 : 447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95. — **3 : 497, 498,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3 : 586,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309.

---

3 : 593. Die Bemerkung (Z. 17): „Der Vorteil einer solchen oberen Grenze ist besonders offenkundig“ ist richtig nur unter der Voraussetzung, daß die Gleichung $\Phi(x) = 0$ keine negativen Wurzeln hat, deren numerische Werte $> e$ sind, denn sonst können die Faktoren der Gleichungskonstante, die $\overline{>} e$ sind, nicht von vornherein von der Prüfung ausgeschlossen werden.

G. Eneström.

---

3 : 609, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667,** siehe

BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442.

---

3 : 689. Der Schluß der Seite sollte auf folgende Weise modifiziert werden:

Den Jahren 1742—1745 gehört ein Briefwechsel an, welcher für die Geschichte der Reihenlehre von Bedeutung ist, der Briefwechsel zwischen NIKOLAUS I BERNOULLI und EULER. Dieser Briefwechsel besteht aus sechs Briefen (16. Januar 1742, 1. September 1742, 10. November 1742, 14. Mai 1743, 4. Februar 1744, 17. Juli 1745) von EULER und fünf Briefen (13. Juli 1742, 24. Oktober 1742, 6. April 1743, 29. November 1743, 20. April 1745) von BERNOULLI. Die vier ersten Briefe von BERNOULLI wurden 1843 von P. H. FUSS in der *Correspondance mathematique* (II, S. 681—713), die übrigen Briefe 1862 von P. H. FUSS und N. FUSS in EULERS *Opera posthuma* (I, S. 519—549) veröffentlicht.

Auf Grund dieser Modifikation sollte natürlich der CANTORsche Bericht über den Briefwechsel an gewissen Stellen ergänzt werden. G. ENESTRÖM.

---

3 : 692. Hier sollten die drei ersten Zeilen gestrichen werden (vgl. die vorangehende Bemerkung), und das folgende sollte modifiziert werden. Die zwei betreffenden Briefe EULERS sind vom 4. Februar 1744 und 17. Juli 1745, der Brief BERNOULLIS vom 20. April 1745 datiert. Alle drei Briefe sind in den *Opera posthuma* (I, S. 538—549) zum Abdruck gebracht. Als Summe der Reihe $1 - 1 + 2 - 6 + 24 - 120 + 720 - \ldots$ hatte EULER zuerst 0.59521 angegeben, berichtigte aber diese Angabe in seinem zweiten Briefe.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 695, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **3**$_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 880,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 447; **5**$_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 443.

Anfragen.

133. Über den Mathematiker Bernardus de Villacampi. Von Verfassern, die sich mit JOHANNES DE LINERIIS und JOHANNES DE MURIS beschäftigt haben, wird als Zeitgenosse dieser zwei Mathematiker ein Pariser Gelehrter BERNARDUS erwähnt, der zuweilen „de Villacampi“ oder „de Haermais“, zuweilen nur „Philosophus“ genannt wird; nach B. BALDI (*Cronica de matematici*, Urbino 1707, S. 85) war dieser BERNARDUS „grand' Aritmetico“. Nun wird bekanntlich in gewissen Handschriften der von SCHÖNER 1534 heraus-

gegebene *Algorithmus demonstratus* einem sonst unbekannten Gernardus zugewiesen, und wenn es sich herausstellen würde, daß der fragliche Bernardus eine Algorismusschrift verfaßt hat, so könnte dieser Umstand ein Ausgangspunkt für weitere Nachforschungen über den Verfasser des *Algorithmus demonstratus* werden. Es wäre ja nicht besonders auffällig, wenn es sich zuletzt erweisen würde, daß Gernardus nur eine Verketzerung von Bernardus sei (vgl. in betreff einer ähnlichen Verketzerung Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **17**, 1884, S. 781).

Hat man irgendeinen Anlaß zu vermuten, daß Bernardus de Villacampi eine Algorismusschrift verfaßt hat? G. Eneström.

134. Über das „Quadripartitum numerorum" von Johannes de Muris. Es ist bekannt, daß Johannes de Muris in der ersten Hälfte des 14. Jahrhunderts eine Arbeit mit dem Titel *Quadripartitum numerorum* verfaßte, die noch im 15. Jahrhundert in hohem Ansehen stand, und von der mir fünf Handschriften bekannt sind, nämlich: Cod. Paris. anc. fonds 7190, Cod. Paris. anc. fonds 7191, Cod. Paris. fonds latin 14736 (früher fonds St. Victor 671), Cod. Vindob. 4770 und Cod. Vindob. 10954; daß es noch viele andere Handschriften der Arbeit gibt, geht aus einer Angabe von M. Curtze (Centralbl. für Bibliothekswesen **16**, 1899, S. 286) hervor. Über diese Arbeit bringen die gewöhnlichen mathematisch-historischen Handbücher sehr unvollständige Aufschlüsse. In den Cantorschen *Vorlesungen* wird nur angegeben (2^2, S. 124), daß das *Quadripartitum* „unter Anderem auch das Rechnen mit ganzen Zahlen gelehrt zu haben scheint", und als Beleg wird auf eine Abhandlung von Nagl verwiesen, wo zwei Kapitel aus dem zweiten Buche der Arbeit zum Abdruck gebracht worden sind. Etwas bessere Auskunft über den wesentlichen Inhalt derselben bietet Chasles, der angibt, daß sie ein vorzügliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra ist (siehe Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **13**, 1841, S. 511). Die zwei ersten Kapitel des dritten Buches scheinen den sogenannten „Algorithmus de additis et diminutis", d. h. Rechnung mit algebraischen Ausdrücken, zu enthalten (siehe E. Wappler, *Zur Geschichte der deutschen Algebra im 15. Jahrhundert,* Zwickau 1887, S. 31).

Es wäre sehr erwünscht, genauere Auskunft über den wesentlichen Inhalt des *Quadripartitum numerorum* zu bekommen. G. Eneström.

Rezensionen.

R. Meier. De Heronis aetate. Dissertatio inauguralis. Leipzig 1905. 8^0, 42 + (2) S.

Diese Abhandlung enthält eine Übersicht der Ansichten in betreff der Lebenszeit des HERON nebst Kritik der Gründe dieser Ansichten. Zuerst bemerkt der Verfasser, daß man nicht berechtigt ist, auf Grund gewisser Angaben HERON als einen Schüler des KTESIBIOS oder als einen Zeitgenossen des FILON von Byzanz zu betrachten. Ebenso unhaltbar findet Herr MEIER die übrigen Versuche zu beweisen, daß HERONS Lebenszeit vor der zweiten Hälfte des zweiten oder nach dem Ende des ersten vorchristlichen Jahrhunderts anzusetzen ist. Selbst ist er der Ansicht, daß HERON nach HIPPARCHOS aber vor GEMINOS und VITRUVIUS gelebt hat.

Mit den meisten der kritischen Ausführungen des Herrn MEIER bin ich wesentlich einverstanden. Beispielsweise hat er meines Erachtens mit Recht ein paar Annahmen von PAUL TANNERY als willkürlich hervorgehoben, nämlich (S. 25), daß in Griechenland Kommentatoren mathematischer Arbeiten erst dann auftraten, als die Zeit der Entdeckungen vorüber war, und (S. 26—29) daß, wenn zwei Lösungen ein und desselben Problems vorhanden sind, die von einem gewissen Gesichtspunkte aus bessere Lösung als die spätere betrachtet werden soll. Ebensosehr billige ich Herrn MEIERS Bemerkung, daß ein Verfasser, der ohne weiteres „POSEIDONIOS" zitiert, gar nicht zu einer Zeit gelebt haben muß, wo nur eine Person mit diesem Namen in Betracht kommen konnte. Um so mehr verwundere ich mich, daß Herr MEIER selbst einen ähnlichen Fehler begeht, als er (S. 29) behauptet: „Si post MENELAUM HERO floruit quaeque ille hac de re exposuerat, manibus tenuit — neque fugere eum poterat illius opus, quia uterque Alexandriae scripsit — vix licuit ei scriptoris nomen silentio premere neque in dubio relinquere, utrius opus vellet intelligi". Es handelt sich hier um die zwei Stellen, wo HERON in seinen *Metrika* (S. 58 und 62 der Ausgabe von H. SCHÖNE) den Ausdruck ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν benutzt, und aus dem Umstande, daß HERON hier keinen Verfasser nennt, folgert Herr MEIER, daß HERON zu einer Zeit gelebt hat, wo es nur eine Schrift mit dem fraglichen Titel gab, also vor MENELAOS, weil sonst HERONS Verweis undeutlich gewesen wäre. Aber in Wirklichkeit ist diese Schlußfolgerung durchaus unberechtigt; meines Erachtens kann man ἐν τοῖς περὶ τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν am besten durch „in den Chordentafeln" wiedergeben, und HERON hatte keinen besonderen Grund, einen Verfassernamen hinzuzufügen, da die für seine Berechnungen nötigen Angaben, nämlich $\text{ch}\,\frac{360^0}{9} \sim \frac{1}{3}d$ und $\text{ch}\,\frac{360^0}{11} \sim \frac{7}{25}d$, sicherlich aus jeder Chordentafel zu entnehmen waren. Auf ganz dieselbe Weise sagt man noch heute, daß aus den Logarithmentafeln für log 2

der Wert 0.30103 erhalten wird, obgleich es ja eine außerordentlich große Anzahl von Logarithmentafeln gibt. Übrigens ist es meiner Ansicht nach nicht durchaus unmöglich, daß HERON selbst eine Chordentafel verfertigt hat, und in diesem Falle ist es augenfällig, warum kein Verfassername hinzugefügt wurde.

Wie ich schon erwähnt habe, setzt Herr MEIER HERONS Lebenszeit nach HIPPARCHOS aber vor GEMINOS und VITRUVIUS an. Den „terminus post quem" folgert er aus der oben besprochenen Tatsache, daß HERON auf Chordentafeln verweist, zusammengestellt mit dem Umstande, daß HIPPARCHOS der älteste uns bekannte Verfasser solcher Tafeln ist. Ich bin auch der Ansicht, daß HERON nach HIPPARCHOS gelebt hat, aber da HERON ausdrücklich ARCHIMEDES zitiert und da es eigentlich nicht von großem Belang ist, besonders festzustellen, daß HERON nicht zwischen ARCHIMEDES und HIPPARCHOS gelebt hat, bin ich persönlich geneigter zu sagen, daß HERON sicher nach ARCHIMEDES, fast sicher nach APOLLONIOS und höchstwahrscheinlich nach HIPPARCHOS gelebt hat. Weniger einverstanden bin ich mit Herrn MEIERS Ansicht in betreff des „terminus ante quem". Daß HERON seine mechanischen Arbeiten vor GEMINOS verfaßt hat, schließt Herr MEIER daraus, daß bei PROKLOS eine Stelle vorkommt, wo HERON als Mechaniker genannt wird, und welche Stelle aus gewissen Gründen aus GEMINOS entnommen sein muß. Aber J. G. VAN PESCH hat darauf hingewiesen (*De Procli fontibus*, Leiden 1900, S. 71), daß PROKLOS sehr oft die von ihm herangezogenen Schriften älterer Verfasser mehr oder weniger frei benutzt, und da PROKLOS hier nicht ausdrücklich bemerkt, daß er GEMINOS zitiert, so ist es sehr wohl möglich, daß PROKLOS selbst HERONS Namen in den ursprünglichen Bericht des GEMINOS (z. B. statt des Namens eines älteren Mechanikers) eingesetzt hat. Ebensowenig entscheidend ist meines Erachtens der Grund, warum Herr MEIER HERON vor VITRUVIUS ansetzt, nämlich daß bei HERON gewisse Vorrichtungen unvollständiger als bei VITRUVIUS behandelt werden. Dies Verhältnis kann auf verschiedene Weise erklärt werden, z. B. dadurch, daß sich HERON für diese Vorrichtungen nicht besonders interessierte oder dadurch, daß VITRUVIUS für dieselben eine besondere Vorlage zur Verfügung hatte. Hierzu kommt noch, daß es bekanntlich eine VITRUVIUS-Frage ebensowohl als eine HERON-Frage gibt, und der Umstand, daß ein Teil der Arbeit *De architectura* aus dem ersten vorchristlichen Jahrhundert zu entstammen scheint, beweist gar nicht, daß nicht gewisse Abschnitte der Arbeit ein paar Jahrhunderte jünger sein können.

Durch Herrn MEIERS Abhandlung besitzen wir also eine dankenswerte Zusammenstellung und Kritik der verschiedenen Ansichten über HERONS Lebenszeit, aber einen weiteren Schritt zur Lösung der schwierigen HERON-Frage bringt sie meines Erachtens nicht. Sicher ist nur in betreff des „terminus ante quem", daß HERON vor PAPPOS gelebt hat.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1

25 (1907).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2

8_3 (1907): 1.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [3

36 (1905): 1. — Die Seiten 1—76 enthalten Referate der im Jahre 1905 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, W. Kapteyn, J. C. Kluyver, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [4

15: 2 (octobre 1906 — avril 1907).

Eneström, G., Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete. [5

Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 1—12.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^3 (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2100—2102. (A. von Braunmühl.) — [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 61—80. (G. Eneström, G. Junge.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 80—91. (G. Eneström, A. Sturm, H. Bosmans.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 91—96. (G. Eneström, A. Sturm, C. Grönblad.) [6

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von M. Cantor. Dritte Lieferung. Trigonometrie, Polygonometrie und Tafeln. Von A. von Braunmühl. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes. Von V. Kommerell. Perspektive und darstellende Geometrie. Von G. Loria. Leipzig, Teubner 1907. [7

8°, S. 403—642. — [7 M.]

Sturm, A., Geschichte der Mathematik. Neudruck (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 273—274. (S. Günther.) [8

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al medio evo (1907). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 506—509. (D. E. Smith.) [9

Sageret, J., La génèse des mathématiques. [10

Revue scient. 7_5, 1907, 577—585.

Schmidt, M. C. P., Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik (1906). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 99—102. (H. Suter.) [11

Васильевъ, А. В., Историческій очеркъ анализа безконечно-малыхъ. Казань 1905. [12
8°, 70 S. — WASILIEFF, A., Historische Übersicht der Analysis des Unendlichen.

Bonola, R., La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica (1906). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 18, 1907, 56. (G. K.) [13

La Cour, P., und Appel, J., Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Übersetzung von G. SIEBERT (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 276—277. (S. GÜNTHER.) [14

Kistner, A., Geschichte der Physik (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 42. (E. GERLAND.) [15

***Ibel, Th.,** Die Wage bei den Alten. Forchheim 1906. [16
8°, 69 S — Gymnasialprogramm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 287—288. (H. WIELEITNER.)

b) **Geschichte des Altertums.**

Amodeo, F., Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell' evo antico. [17
Giorn. di matem. 45, 1907. 9 S.

Rudio, F., Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes. [18
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 13—22.

***Diels, H.,** Das neuentdeckte Palimpsest des Archimedes. [19
Internationale Wochenschr. 1, 1907.

Tannery, P., Le manuel d'introduction arithmétique du philosophe Domninos de Larissa. Traduction. [20
Revne des études grecques 19, 1906, 359—382.

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Suter, H., Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern. [21
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 23—36.

Wiedemann, E., Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. VI—VIII (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 37—38, 277—278. (S. GÜNTHER.) [22

Vogl, S., Die Physik Roger Bacons (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 43—44. (F. STRUNZ.) [23

Silberberg, M., Ein handschriftliches hebräisch-mathematisches Werk des Mordechai Comtino (15. Jahrhundert). II. Geometrie. [24
Jahrbuch der jüdisch-literarischen Gesellschaft in Frankfurt a. M. 4 (1906), 214—237.

Eneström, G., Über drei bisher fast unbekannte italienische Mathematiker aus dem 15. Jahrhundert. [25
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 96—97. — Anfrage.

Duhem, P., Sur quelques découvertes scientifiques de Léonard de Vinci. [26
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 143, 1906, 946—949.

d) **Geschichte der neueren Zeit.**

Benedict, Suzan R., The development of algebraic symbolism from Paciuolo to Newton (1906). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907, 29. [27

Friis, F. R., Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ex anno 1588 et sequentibus annis. Nunc primum collectae et editae. Fasc. IX. Hauniae, Gad 1907. [28
4°, S. 257—288. — [2 M.]

Favaro, A., Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei. Trent' anni di studi Galileiani. Firenze, Barbera 1907. [29
4°, 29 S. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 168—169. (H. BOSMANS.)

Favaro, A., Regesto biografico Galileiano. Firenze, Barbera 1907. [30
8°, 69 S. — Aus den „Opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale".

Isely, L., Les origines de la théorie des fractions continues. [31
Neuchâtel, Soc. d. sc., Bulletin 32, 1903—1904, 72—79.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a. St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 264—268. (H. BOSMANS.) [32

Duhem, P., Sur l'histoire du principe employé en Statique par Torricelli. [33
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 143, 1906, 809—812.

Thirion, J., Les „Essays" de Jean Rey et la pesanteur de l'air. [34
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 230—256.

Eneström, G., Über den französischen Mathematiker Pujos. [35
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 97. — Anfrage.

Geer, P. van, Christiaan Huygens en Isaac Newton. [36
Tijdspiegel 1907. 23 S.

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. III. [37
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1907, 34—63.

Tramer, M., Die Entdeckung und Begründung der Differential- und Integralrechnung durch Leibniz (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 274—275. (S. GÜNTHER.) [38

Isely, L., Leibniz et Bourguet. [39
Neuchâtel, Soc. d. sc., Bulletin 32, 1903—1904, 173—214.

Hering, K., Das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2489—2491. (E. GERLAND.) [40

Graf, J. H., Der Basler Mathematiker Leonhard Euler bei Anlaß der Feier seines 200. Geburtstages. Bern 1907. [41
8°, 21 S. — Mit Porträt.

Müller, Felix, Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik. [42
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 61—116.

Müller, Felix, Nachtrag zu dem Aufsatze: „Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler". [43
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 423—424.

Ahrens, W., Leonhard Eulers Werke. [44
Mathem.-naturwiss. Blätter 1907.

Stäckel, P., Eulers Verdienste um die elementare Mathematik. [45
Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 300—307.

Stäckel, P., Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. [46
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 37—60.

Lampe, E., Zur Entstehung der Begriffe der Exponential-Funktion und der logarithmischen Funktion eines komplexen Arguments bei Leonhard Euler. [47
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 117—137.

Kneser, A., Euler und die Variationsrechnung. [48
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 21—60.

Valentin, G., Leonhard Euler in Berlin. [49
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 25, 1907, 1—20 + Porträt.

Saalschütz, L., Albert Girard und die Waringsche Formel. [50
Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 205—207.

Bortolotti, E., Carteggio di Paolo Ruffini con alcuni scienziati del suo tempo, relativo al teorema sulla insolubilità di equazioni algebriche generali, di grado superiore al quarto. [51
Soc. italiana, Memorie di matem. 14_3, 1907, 291—325.

Brocard, H., Sur les frères Français. [52
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907, 98. — Antwort auf eine Anfrage.

Simon, Max, Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 180—181. (J. Tropfke.) — L'enseignement mathém. 9, 1907, 333. — Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 45—46. [53

Mathé, F., Karl Friedrich Gauss (1906). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 41—42. (O. S.) [54

Gauss, C. F., Werke. Band VII (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 13_2, 1907, 521—522. (E. B. Wilson.) [55

Stäckel, P., Vier neue Briefe von Gauss. [56
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachrichten (Math. Kl.) 1907, 372—373.

Loria, G., Per la storia dei sistemi determinati di infinite equazioni lineari. [57
Palermo, Circolo matem., Supplemento ai rendiconti 2, 1907, 34—35. — Über eine Abhandlung von G. Piola aus dem Jahre 1828.

Lucas de Peslouan, Ch., N.-H. Abel (1906). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2245—2247. (E. Lampe.) — Wisk. tijdschr. 3, 1907, 163. [58

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2381—2383. (E. Lampe.) [59

Müller, Felix, Karl Schellbach (1905). [Rezension:] Mathesis 7_3, 1907, 155. — Monatsh. für Mathem. 18, 1907; Lit.-Ber. 52. (Schrutka.) [60

Endō, T., [Eine Methode der alten japanischen Schule um den Umfang einer Ellipse zu berechnen.] [61
Tokyo, Sūgaku Butsurigakkwai, Kiji-Gaiyō 3, 1906, 72—74. — Japanisch.

N[euberg], J., Histoire des triangles pseudo-isoscèles. [62
Mathesis 7_3, 1907, 184—185.

***Trautscholdt,** Zur Entdeckungsgeschichte der lichtelektrischen Erscheinungen. Leipzig 1906. [63
4°, 56 S. — Gymnasialprogramm. — [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 218—219. (M. Richter.)

Wieleitner, H., Bibliographie der höheren algebraischen Kurven (1904). [Rezension:] Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 83. (H. Liebmann.) [64

D. Hilbert. [65
Americ. journ. of mathem. 29 : 1, 1907. — Nur Porträt.

e) Nekrologe.

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906.) [66
Il nuovo cimento 13_5, 1907, 145—154. (A. Carbasso.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [67
Milano, Istit. Lombardo, Rendiconti 39, 1906, 916—920. (E. Pascal.) — Il nuovo cimento 12_5, 1906, 142. — Revue génér. d. sc. 18, 1907, 129—130. — Rivista di fisica (Pavia) 8 : 1, 1907, 23—46. (C. Alasia.)

Giacomo **Foglini** (1822—1907). [68
Roma, Accad. pontif. d. N. Lincei, Memorie 25, 1908. Sonderabdruck 43 S. 8° + Porträt. (B. Carrara.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [69
Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 181—211.

Samuel Pierpont **Langley** (1834—1906). [70
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 26, 1907, 546—549. (W. Peddie.) — Wiadomości matem. 11, 1907, 189—194. (W. Gorczyński.)

Gaston de **Longchamps** (1842—1906). [71
Durán Loriga, J. J., *Nota necrologica acerca del matematico francés G. de Longchamps.* Coruña 1906.

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [72
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 49—50. (J. Réveille.)

Carl Maximilian **von Orff** (1828—1905). [73
München, Akad. d Wiss., Sitzungsber. 36, 1906, 433—439. (C. Voit.)

Jean Abraham Chrétien **Oudemans** (1827—1906). [74
Amsterdam, Akad. van Wetensch., Verslagen 9, 1906, 459—464. (H. G. van de Sande Bakhuyzen.)

Jakob **Rebstein** (1840—1907). [75
Schweizer. Bauzeitung 1907: I, 152 [mit Porträt].

Moritz **Steinschneider** (1816—1907). [76
Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 391—399. (S. Günther.)

Otto **Stolz** (1842—1905). [77
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 36, 1906, 477—479. (C. Voit.)

Otto Wilhelm **von Struve** (1819—1905). [78
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 36, 1906, 439—444. (C. Voit.)

Tobias Robert **Thalén** (1827—1905). [79
Società dei spettroscopisti italiani 35, 1906, 185—202 + Porträt. (B. Hasselberg.)

Joseph de **Tilly** (1837—1906). [80
Bruxelles, Académie de Belgique, Bulletin 1906, 622—629. (P. Mansion.)

f) Aktuelle Fragen.

Bobynin, V., A propos de l'enquête sur la méthode de travail des mathématiciens [Sur l'importance de la lecture dans le domaine de l'investigation mathématique.] [81
L'enseignement mathém. 9, 1907, 389—396

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. IX. [82
L'enseignement mathém. 9, 1907, 306—312.

Klein, F., Vorträge über den mathematischen Unterricht an den höheren Schulen. Bearbeitet von R. Schimmack. 1 (1907). [Selbstbericht.] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 467—468. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2007—2008. (J. Norrenberg.) — L'enseignement mathém. 9, 1907, 411. (H. F.) [83

[Euler-Feier.] [84
Meier, J., *Festakt der Universität Basel zur Feier des zweihundertsten Geburtstages Leonhard Eulers. Festbericht.* Basel 1907. 4°, 21 S.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent M. Abraham in Göttingen zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor R. C. Archibald zum Professor der Mathematik an der „Acadia university" in Wolfville, N.-S.

— E. Bianchi zum Astronomen am „Osservatorio del collegio Romano" in Rom.

— Professor M. Brendel in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Akademie für Sozialwissenschaften in Frankfurt am Main.

— H. A. Clark in Syracuse zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— „Maître de conférences" J. Clairin in Lille zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor K. Dieterici in Rostock zum Professor der Physik an der Universität in Kiel.

— Professor G. D. Gable in Fairfield zum Professor der Mathematik an der Universität in Wooster, Ohio.

— Professor F. Hasenöhrl in Wien zum Professor der theoretischen Physik an der Universität daselbst.

— Professor A. Heydweiller in Münster zum Professor der Physik an der Universität in Rostock.

— Professor J. Horn in Clausthal zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Darmstadt.

— Professor L. J. Kral in Wien zum Professor der darstellenden Geometrie an der Bergakademie in Pribram (Böhmen).

— „Instructor" O. C. Lester in New Haven zum Professor der Physik an der Universität von Colorado.

— „Maître de conférences" R. Le Vavasseur in Lyon zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent E. Marx in Leipzig zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— „Instructor" L. E. Moore an der Universität von Illinois in Urbana zum Professor der Mechanik am „Massachusetts institute of technology" in Boston.

— Professor K. Örtel in München zum Professor der Geodäsie an der Technischen Hochschule in Hannover.

— Dr. A. Paraf in Toulouse zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. D. Pratt in Syracuse zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. F. H. Safford in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der Universität von Pennsylvania daselbst.

— Privatdozent W. Schlink in Darmstadt zum Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Direktor Ad. Schmidt in Potsdam zum Professor der Geophysik an der Universität in Berlin.

— „Instructor" R. P. Stephens am „Wesleyan university" zum Professor der Mathematik an der Universität von Georgia.

— Dr. A. Turpain in Poitiers zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

Todesfälle.

— Siegfried Czapski, Leiter des Zeiss-Werkes in Jena, geboren in Obra (Posen) den 28. Mai 1861, gestorben in Jena den 29. Juni 1907.

— John Kerr, früher Lehrer der Mathematik am „Free church training college for teachers" in Glasgow, geboren zu Ardrossan den 17. Dezember 1824, gestorben im August (?) 1907.

— Maurice Loewy, Direktor der Sternwarte in Paris, geboren in Wien den 15. April 1833, gestorben in Paris den 15. Oktober 1907.

— Adriano de Paiva, conde de Campo-Bello, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Porto, gestorben den 30. März 1907, etwa 60 Jahre alt.

— George Washington Plympton, Professor der Physik am „Brooklyn polytechnic institute", gestorben den 11. September 1907, 80 Jahre alt.

— Auguste Ponsot, Professor der Physik in Paris, geboren in Dampierre sur Salon den 16. November 1858, gestorben im August (?) 1907.

— Oren Root, früher Professor der Mathematik am „Hamilton college" in Clinton, gestorben den 26. August 1907, 70 Jahre alt.

— Georg Sidler, früher Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität in Bern, geboren in Zug den 31. August 1831, gestorben in Bern den 9. November 1907.

— Hermann de C. Stearns, Professor der Physik an der „Stanford university", gestorben den 21. Oktober 1907.

— Friedrich Vogel, Privatdozent der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule in Berlin, gestorben den 28. August 1907, 51 Jahre alt.

— Hermann Carl Vogel, Direktor des Astrophysikalischen Observatoriums in Potsdam, geboren in Leipzig den 3. April 1841, gestorben den 13. August 1907.

— Gustav Zeuner, emeritierter Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule in Dresden, geboren in Chemnitz den 30. November 1828, gestorben den 18. Oktober 1907.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Breslau hat Professor R. Sturm für das Wintersemester 1907—1908 eine einstündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Heidelberg hat Privatdozent K. Bopp für das Wintersemester 1907—1908 zwei einstündige Vorlesungen, die eine über ausgewählte Kapitel aus der Geschichte der Mathematik, die andere über Lektüre einer klassischen mathematischen Arbeit angekündigt.

— Am Polytechnikum in Zürich hat Privatdozent F. Kraft für das Wintersemester 1907—1908 eine einstündige Vorlesung über die geschichtliche Entwickelung der Mathematik angekündigt.

Vermischtes.

— Die Deutsche Mathematiker-Vereinigung hat auf ihrer Versammlung in Dresden eine Kommission, bestehend aus den Herren A. Krazer, A. Pringsheim und P. Stäckel eingesetzt, die über die Herausgabe von Leonhard Eulers Werken beraten soll.

— Die von der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft beschlossene Euler-Kommission (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, S. 112) ist jetzt eingesetzt. Der Präsident dieser Kommission, die aus 11 Mitgliedern besteht, ist Herr F. Rudio. Für die geplante Euler-Ausgabe hat schon ein Ungenannter in Zürich Herrn Rudio 12,000 Franken zugesichert.

— Die Herausgabe von Evangelista Torricellis sämtlichen Werken ist jetzt in Angriff genommen. Die Ausgabe wird von seiner Geburtsstadt Faenza bekostet und von Herrn G. Vassura in Forli besorgt werden.

— Das „Circolo matematico di Palermo" hat eine Ausgabe von Paolo Ruffinis sämtlichen Arbeiten sowie von seinem Briefwechsel in Aussicht gestellt.

Per la preistoria del principio dei momenti virtuali.

Di G. Vailati a Roma.

Per indicare quella „parte", o, come si direbbe ora, quella componente, del peso di un corpo vincolato, o comunque ostacolato nei suoi movimenti, alla quale è necessario fare equilibrio per impedire che il corpo discenda, è adoperata, negli scritti medioevali di meccanica, facenti capo al trattato *De ponderibus*, attribuito a Giordano Nemorario, la locuzione „gravitas secundum situm", o „gravitas accidentalis". Cosi, per esempio, un corpo scorrevole lungo un piano inclinato è detto essere tanto meno „grave secundum situm" quanto meno è inclinato il piano sul quale scorre, e, parimenti, un corpo pendente dall'estremo di una leva è detto avere tanto meno „gravitas secundum situm" quanto più l'asta della leva si discosta dalla posizione orizzontale.

Il carattere, prettamente aristotelico, delle suddette due frasi tecniche, potrebbe indurre a ricercare l'origine del corrispondente concetto in qualche antica trattazione greca della meccanica, connessa, o riattaccantesi, alle dottrine peripatetiche.

Questa tesi, che è appunto quella sostenuta dal Duhem nell'opera da lui recentemente pubblicata sulle Origini della Statica[1]), presta tuttavia il fianco a più di una obbiezione.

In nessuno degli scritti aristotelici trattanti di meccanica, pervenuti fino a noi, si trova traccia del termine greco che dovrebbe corrispondere alla suddetta denominazione latina. La parola greca che, per il senso, più si avvicina ad essa è invece *ῥοπή*, la quale, negli scritti di Aristotele, figura soltanto come un termine del linguaggio ordinario, mentre invece assume valore di termine tecnico negli scritti di Archimede, che la adopera appunto per distinguere, dal peso (*βάρος*) di un dato corpo, ciò che ora si chiamerebbe il suo „momento" rispetto a un dato asse di rotazione. Ne abbiamo un esempio nel titolo stesso del principale scritto meccanico di Archimede (*Περὶ ἐπιπέδων ἰσοῤῥοπιῶν*).

La coincidenza tra il significato attribuito dai meccanici greci alla parola *ῥοπή*, e quello attribuito più tardi alla locuzione „gravitas secundum

1) P. Duhem, *Les origines de la Statique.* 1—2, Paris 1905—1906.

situm" — e più tardi ancora al termine „momento" — si trova del resto confermata anche da Galileo, come risulta, per esempio, dal suo scritto „Delle meccaniche", riprodotto da A. Favaro nelle Memorie dell' Istituto Veneto (26, 1899). Anche il Baliani, nella prefazione al suo trattato *De motu* (1638), definisce il „momento" come „excessus virtutis moventis super impedientia motus".

In un senso affatto identico Stevin si serve della parola *„sacoma"*, suggerita forse dalla greca *σήκωμα*, che si incontra anche nell'operetta aristotelica sulle *Questioni meccaniche*, dove però essa non assume il carattere di termine tecnico.

* * *

Non è senza interesse notare come, dalla suddetta determinazione del concetto di „gravitas secundum situm", risulti chiaro il senso da attribuire alla frase, continuamente adoperata dagli scrittori di meccanica della generazione anteriore al Galilei, che un corpo tanto più velocemente discende quanto più è „grave secundum situm" („Gravia secundum situm velocius descendere"). Questa frase, spesso erroneamente interpretata come significante che i corpi cadano con velocità proporzionali ai loro pesi, è piuttosto da riguardare come una delle più antiche forme sotto le quali sia stato enunciato il principio della proporzionalità tra l'intensità delle forze (staticamente misurate), agenti per un dato tempo su un dato corpo, e le velocità che questo rispettivamente acquista. Essa corrisponde cioè, al principio che, nella trattazione newtoniana, figura indicato come la „seconda legge" della dinamica.

La distinzione tra il peso di un corpo e la sua „gravitas secundum situm" costituisce d'altra parte anche il primo germe di quella che, nell'ordinaria enunciazione del principio cosidetto di d'Alembert, compare indicata coll'opporre le forze „applicate" alle forze „attuali".

Quanto alla questione della uguale, o inuguale, velocità di caduta di gravi diversamente pesanti, recenti ricerche del Wohlwill[1]) hanno posto in chiaro che l'opinione che tali velocità fossero proporzionali ai rispettivi pesi si trova già rigettata come assurda, dieci secoli prima di Galileo, da Giovanni Filopono, in quel Commento al *De coelo* di Aristotele, che è ripetutamente citato e utilizzato, tanto da Galileo come dai suoi avversari, nelle polemiche su tale soggetto.

* * *

È certamentre strano il fatto che, mentre Erone e Pappo, conoscevano e formulavano esattamente, pel caso almeno dei cinque meccanismi elemen-

1) Physikalische Zeitschrift 7, 1905, p. 27—29. Riproduzione di una conferenza tenuta alla „Naturforscher-Versammlung" (Meran) 1905.

tari (δυνάμεις) da loro studiati (leva, asse nella ruota, puleggie, cuneo, vite), quello che ora si chiama il *principio dei momenti virtuali*, non siano venuti nell'idea di applicare questo stesso principio anche alla determinazione degli sforzi necessari per far salire dei pesi lungo piani inclinati.

Il Duhem propende a credere che ciò sia da attribuire alla maggiore difficoltà di fare astrazione, in questo caso, dalla influenza perturbatrice degli attriti.

Le considerazioni tuttavia che nella *Meccanica* di Erone sono dedicate al cuneo e alla vite (concepita da lui come un cuneo attorcigliato, e atto a esser mosso senza urti) provano che, egli almeno, era capace di sollevarsi per questo riguardo a un grado di astrazione non inferiore a quello che corrisponde alle ricerche di Galileo sullo stesso soggetto.

È inoltre da notare che, per il caso appunto considerato da Erone e da Pappo — quello cioè di una sfera o di un cilindro che discenda rotolando lungo un piano inclinato — l'attrito non ha molto più parte di quanta ne abbia, per esempio, nel caso di una leva o di un sistema di puleggie.

La ragione della sopraindicata deficienza dei meccanici greci, sembra a me sia da cercare in tutt'altra direzione. Per essi — colla sola parziale eccezione di Aristotele o, più precisamente, dell'autore dell'operetta già citata sulle *Questioni meccaniche* a lui attribuita — la dipendenza dell'efficacia di una forza, applicata a un dato meccanismo, dal cammino che è necessario far percorrere al suo punto di applicazione per ottenere un dato risultato, era riguardata semplicemente come un *fatto* che l'esperienza permetteva di constatare caso per caso per ciascuno dei meccanismi, o delle combinazioni di meccanismi, da essi prese in considerazione, non mai come un principio abbastanza evidente, o abbastanza saldo, per servire di prova, di spiegazione, o anche solo di mezzo di ricerca, del modo di funzionare di meccanismi di cui non fosse già stato prima, e indipendentemente, analizzato e determinato il modo da agire.

E questa analisi o determinazione era da essi concepita come dovente consistere sostanzialmente in una riduzione, più o meno diretta, al caso della leva, riguardata da essi come la sola macchina tipica ideale. Quì non fa eccezione neppure l'autore delle *Questioni meccaniche*, il quale tenta ridurre al caso della leva perfino quello del cuneo.

* * *

Per trovare traccia di una decisiva emancipazione dal suddetto pregiudizio in favore della leva — pregiudizio che sembra esser stato di non minor danno ai progressi della meccanica di quanto sia stato, per l'astronomia, quello relativo alla „perfezione“ del movimento circolare —

occorre venire fino a un tempo non di molto anteriore a quello in cui, per opera di Galileo, è stata costituita la dinamica moderna.

Dell'importanza da attribuire, a questo riguardo, a quella specie di enciclopedia medioevale della meccanica che, sotto il titolo di „Trattato dei pesi" (*De ponderibus*), è continuamente citata e utilizzata dagli scrittori di meccanica del XIV e XV Secolo — da Biagio Pelacani e Leonardo da Vinci, a Cardano e a Tartaglia — ho già avuto occasione di occuparmi, in una Nota presentata (1897) all'Accademia delle scienze di Torino. Il Duhem arriva ora, indipendentemente, e col sussidio di estese ricerche sui vari manoscritti che di questa opera si trovano alla Biblioteca nazionale di Parigi, a conclusioni in parte conformi a quelle che allora mi era parso di potere formulare in proposito.

Ciò che indusse il Duhem a intraprendere le sue indagini in tale direzione fu l'aver constatato le notevoli divergenze che, appunto sul soggetto del piano inclinato, sussistono tra le due diverse redazioni che dello scritto *De ponderibus* furono pubblicate nel XVI Secolo, la prima da Pietro Apiano, a Norimberga (1533), col titolo: *Liber Jordani Nemorarii, viri clarissimi, de ponderibus, propositiones XIII et earundem demonstrationes multarumque rerum rationes sane pulcherrimas complectens*, e l'altra a Venezia, nel 1575, su un manoscritto già appartenente a Tartaglia, da Curzio Trojano, col titolo: *Jordani opusculum de ponderositate, Nicolai Tartaleae studio correctum novisque figuris auctum.*

Nonostante le differenze, alle quali il Duhem ha diretto la sua attenzione, le due redazioni concordano in più di un punto di cui è da segnalare l'importanza.

Ambedue cominciano con una stessa lista di enunciazioni, tra le quali figura quella in cui è precisato il significato della locuzione „gravitas secundum situm", adoperata poi costantemente per designare i diversi sforzi richiesti per sostenere uno stesso corpo a seconda delle condizioni o dei vincoli a cui esso è assoggettato.

Comune pure ad ambedue le redazioni è la convenzione di assumere, come misura del diverso grado di inclinazione („obliquitas") delle linee, lungo le quali i gravi scorrono, le diverse variazioni di livello che *subirebbe* un punto spostandosi di uno stesso tratto su ciascuna di esse („Obliquiorem descensum, in eadem quantitate, minus capere de directo").

Tali due concezioni, della „gravitas secundum situm" e della „obliquitas", sono inoltre applicate, tanto nell'una come nell'altra delle due redazioni, per enunciare la proposizione che la „gravitas secundum situm" di un corpo obbligato a percorrere una data linea di discesa, è tanto più grande quanto minore è la „obliquitas" della linea, cioè — in conformità alla definizione vista sopra — quanto più grande è l'abbassamento, o

innalzamento che il grave *subirebbe* percorrendo un dato tratto rispettivamente sull'una o sull'altra delle linee di discesa in questione.

Sebbene nella proposizione: „gravius secundum situm quanto in eodem situ, minus obliquus descensus", si trovi già implicitamente enunciata la condizione di equilibrio di due gravi che, essendo collegati da un filo scorrevole sopra una puleggia, giacciano su due piani diversamente inclinati, è però soltanto nella seconda delle due redazioni già citate del trattato *De ponderibus* — cioè in quella curata da Tartaglia — che tale proposizione si trova esplicitamente interpretata come applicabile a questo caso. Nell'altra precedente redazione — quella curata da Pietro Apiano — si trovano, invece, soltanto dei tentativi abbastanza confusi, e di cui anzi alcuni assolutamente paralogistici, di far rientrare, sotto lo stesso principio, il caso di due pesi pendenti dai due estremi di una leva, considerando le diverse „obliquitates" degli archi descritti dai loro punti di sospensione.

Ciò induce il Duhem ad avanzare l'ipotesi che soltanto la prima delle suddette due redazioni rappresenti effettivamente le idee di Giordano Nemorario, e che l'altra, invece, corrisponda a una ulteriore elaborazione del contenuto della prima, elaborazione che egli crede sia da attribuire all'intervento di un ignoto commentatore („le précurseur de Léonard"), al quale quindi, secondo il Duhem, spetterebbe il merito di avere per il primo formulata la condizione di equilibrio di un grave scorrevole lungo un piano inclinato.

Il fatto, notato sopra, che, nella parte comune alle due redazioni figurano concetti e proposizioni, alla cui enunciazione e determinazione non è facile assegnare altro scopo che quello che si realizza nella loro applicazione al caso del piano inclinato, rende, a mio parere, assai più probabile l'ipotesi che sia la seconda, e non la prima, delle dette due redazioni, quella che si avvicina di più a una supponibile trattazione originaria da cui ambedue derivino, e che la trattazione originaria abbia subite, nell'edizione pubblicata da Pietro Apiano, o nei manoscritti che le hanno servito di base, delle mutilazioni che accidentalmente sono andate a colpire proprio alcune delle sue parti più vitali.

* * *

La forma sotto la quale la condizione d'equilibrio sul piano inclinato figura enunciata, nella edizione curata da Tartaglia, presenta tuttavia una notevole differenza da quella che si sarebbe condotti ad aspettare in conformità alle definizioni che si trovano in principio alla trattazione.

In essa infatti, per confrontare le „obbliquità" delle linee a cui si appoggiano i due gravi che si controbilanciano, si considera, non il

rapporto delle proiezioni verticali di uno stesso segmento portato su l'una e sull'altra di esse, ma invece il rapporto fra i tratti delle due linee che corrispondono a una stessa proiezione verticale („Si, per diversarum obliquitatum vias duo pondera descendant, fiantque declinationum et ponderum una proportio eodem ordine sumpta, una erit utrinque virtus in descendendo"). Quest'ultima frase è così chiarita da Tartaglia: „proportio declinationum dico non angulorum sed linearum ad aequedistantem resecationem, in qua aequaliter sumunt de directo".

La differenza meritava di esser notata perchè, sotto questa forma, la proposizione in questione viene, in modo ancora più evidente, ad apparire concordante coll'enunciazione, data più tardi da Stevin, della condizione d'equilibrio di cui in essa si parla.

L'attitudine, assunta da Stevin di fronte alla soluzione data, nel trattato *De ponderibus*, al problema dell'equilibrio di gravi scorrevoli lungo piani inclinati, corrisponde perfettamente a quella da lui pure assunta di fronte a quegli antichi tentativi di rendersi ragione delle condizioni di equilibrio della leva che (come quelli di cui ci è conservata traccia nell' operetta aristotelica già citata sulle *Questioni meccaniche*) si basavano sulla considerazione e sul confronto dei diversi spostamenti („virtuali") dei punti d'applicazione dei pesi o delle forze.

Il qualificare degli spostamenti „possibili" (cioè non ancora avvenuti) come delle cause di moti, o equilibrii, „effettivi" sembrava a lui — come del resto anche ai suoi contemporanei Guidubaldo del Monte e Benedetti — qualche cosa di altrettanto assurdo quanto il credere che una causa possa essere preceduta da un suo effetto. Qualunque relazione tra i pesi, applicati, per esempio, ai due estremi di una leva, e gli innalzamenti, o abbassamenti, che i loro punti d'applicazione subirebbero, o potrebbero subire, per un dato spostamento dell'asta, gli sembrava tutt' al più potere essere riguardata come un segno, o un „*sintomo*", dell'equilibrio, non mai come una „*ragione*" o una causa di esso.

Ora, poichè, per il caso della leva, esisteva, nella trattazione di Archimede, basata, come è noto, sul concetto di centro di gravità, una via per arrivare, indipendentemente da ogni considerazione di spostamenti possibili, alla determinazione della condizione di equilibrio di due pesi pendenti dai suoi estremi, Stevin fu naturalmente condotto a domandarsi se, anche pel caso di gravi scorrevoli lungo piani inclinati, non si potesse trovare qualche analoga „dimostrazione".

È noto l'espediente al quale egli per tale scopo ricorse, consistente nel sostituire, ai due pesi, una collana di pesi tra loro uguali succedentisi a uguali intervalli, e nell'osservare che tale collana non potrebbe mettersi in moto spontaneamente, poichè nessun movimento la porterebbe ad occu-

pare una posizione complessivamente „più bassa", di quella in cui prima si trovava.

* * *

Per quanto già quasi intravista da STEVIN, la possibilità di dedurre la condizione d' equilibrio di due gravi scorrevoli su due piani diversamente inclinati, dalla considerazione del loro centro comune di gravità (come ARCHIMEDE aveva dedotto la condizione d'equilibrio della leva dalla considerazione del centro comune di gravità dei due pesi pendenti ai suoi estremi) sembra tuttavia essere stata per la prima volta chiaramente riconosciuta da GALILEO.

Nell'opera *De motu* (1644) del TORRICELLI, la condizione di equilibrio di un grave scorrevole lungo un piano inclinato è presentata come una conseguenza del principio generale che, quando due gravi sono così legati l'uno all'altro che, comunque si spostino, il loro centro di gravità non si abbassi, essi restano in equilibrio.

Da questa enunciazione del TORRICELLI all'altra, dovuta al WALLIS (*Mechanica*, 1669), nella quale, come condizione di equilibrio di un sistema composto di un numero qualunque di pesi, è indicata l'eguaglianza tra la „somma delle cadute", e la „somma dei sollevamenti" che corrispondono agli spostamenti che il sistema può assumere, il passo era breve.

WALLIS considera inoltre anche il caso, più generale, in cui, invece di pesi, si tratti di forze comunque dirette, notando che allora, invece che delle proiezioni verticali degli spostamenti dei punti di applicazione, occorre tener conto delle proiezioni di tali spostamenti sulle direzioni delle rispettive forze.

Per tal via la proposizione relativa alla condizione d'equilibrio del piano inclinato, enunciata, come si è visto, nel trattato *De ponderibus* si è andata gradatamente trasformando e generalizzando fino a diventare, quello che ora si chiama *il principio dei momenti virtuali.*

* * *

Le ulteriori elaborazioni che il principio, formulato dal WALLIS, ebbe a subire per opera di GIOVANNI BERNOULLI e di LAGRANGE, si riferiscono quasi esclusivamente al più conveniente modo di applicare, per la sua enunciazione, e per la sua messa in opera, i procedimenti del calcolo infinitesimale.

Per ciò che riguarda GIOVANNI BERNOULLI è da notare che, col prendere in considerazione le relazioni tra gli spostamenti (virtuali) „infinitamente piccoli" dei punti d'applicazione delle forse, egli non fece in fondo che applicare ed enunciare, in forma generale, una norma di metodo di cui era stato fatto già frequentemente uso dai suoi prede-

cessori, tra gli altri da Leonardo da Vinci, e da Galileo, nei loro tentativi di dedurre, dal principio della leva, la condizione d'equilibrio relativa al piano inclinato, e di far rientrare in quest'ultimo caso quello di un grave sostenuto da due fili non paralleli. Tale norma è quella che consiste nel riguardare come sostituibili, per quanto riguarda l'equilibrio, due sistemi di vincoli quando essi permettono gli stessi spostamenti „iniziali". Essa, come nota a proposito il Duhem (vol. I, p. 337), si trova anche enunciata, sotto la forma più esplicita, da Descartes in una lettera al padre Mersenne (1638).

Il passo in questione è anche interessante perchè vi figura adoperata, da Descartes, la locuzione „pesanteur relative" per esprimere precisamente quello stesso concetto che, come s'è visto indietro, è designato, nelle trattazioni di statica facenti capo al trattato *De ponderibus*, colla frase „gravitas secundum situm"[1]).

1) «La *pesanteur relative* de chaque corps se doit mesurer *par le commencement* du mouvement que devrait faire la puissance qui le soutient, tant pour le hausser que pour le suivre s'il s'abaissait . . . et notez que je dis *commencer à descendre*, non pas simplement descendre, à cause que *ce n'est qu'au commencement qu'il faut prendre garde.*» (*Oeuvres* de Descartes, éd. Tannery **2**, p. 253.)

Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers.

Von P. Stäckel in Hannover und W. Ahrens in Magdeburg.

Einleitung.

Der kürzlich veröffentlichte Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und seinem Bruder M. H. Jacobi hat gezeigt, welch' lebhaften Anteil jener an dem Plane der Herausgabe der Werke Leonhard Eulers nahm, dessen Ausführung um die Mitte des vorigen Jahrhunderts der Verwirklichung nahe gerückt zu sein schien. So bittet Jacobi im Sommer 1845 seinen Bruder, ihm mitzuteilen, wie es mit der Ausgabe der Werke Eulers seitens der Petersburger Akademie stehe, und stellt in Aussicht, an den Sekretär der Akademie, den Urenkel Eulers P. H. v. Fuss, mit dem er wegen dieser Angelegenheit bereits in Beziehungen getreten war, einen „ellenlangen Brief“ zu schicken. Dieser Brief ist jedoch erst im Oktober 1847 abgegangen, und im April 1848 ist ihm dann ein noch längerer gefolgt. Jacobi schreibt darüber am 25. Januar 1849 an seinen Bruder: „Es wäre sehr schade, wenn die Petersburger Akademie das ruhmvolle und überaus nützliche Unternehmen der Herausgabe der Eulerschen Schriften wieder aufgäbe. Wie nützlich in gewisser Hinsicht für den Augenblick die periodischen Schriften sind, so werden doch die Werke in ihnen begraben, und Euler würde erst dadurch wieder auferstehn. Es ist wunderbar, daß man noch heut jede seiner Abhandlungen nicht bloß mit Belehrung, sondern mit Vergnügen liest . . . Ich habe wegen der großen Nützlichkeit des Unternehmens vergangnen Frühling eine sehr große Arbeit von 6 Wochen daran gesetzt, deren Resultate ich Fuss mitgetheilt, um mich über die zweckmäßigste Anordnung des ungeheuern Stoffes zu orientiren“. „Es steckt viel Arbeit darin“, sagt Jacobi ein anderes Mal von dem zweiten Briefe, „und es wäre deshalb vielleicht schade, wenn er verloren gegangen wäre.“

Leider haben Jacobis vortreffliche Vorschläge für die Verteilung der Eulerschen Abhandlungen auf die einzelnen Bände der Werke nicht benutzt werden können, und erst gegenwärtig, nach 60 Jahren, dämmert die Hoffnung, daß sie doch noch einmal Verwendung finden könnten. Da überdies der Briefwechsel zwischen Jacobi und Fuss viele wertvolle Beiträge zur Biographie und Bibliographie Eulers enthält, schien es angebracht, diejenigen zehn Briefe, die diesen Gegenstand betreffen, allgemein zugänglich zu machen. Herr Geheimrat Viktor Fuss in Petersburg, ein Neffe von P. H. v. Fuss, in dessen Besitz sich die Briefe Jacobis befinden, und Fräulein Margarete Jacobi in Cannstatt, die die Briefe von Fuss an ihren Vater aufbewahrt, haben die Veröffentlichung freundlichst gestattet, wofür ihnen auch an dieser Stelle unser Dank ausgesprochen sei.

Um das Verständnis der Briefe zu erleichtern, sollen einige Bemerkungen über ihre Verfasser und deren Stellung zu Euler vorausgeschickt werden. Hierfür sind, ohne daß dies im Einzelnen angeführt würde, besonders benutzt worden die Vorreden zu den Werken: *Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticae*, Petersburg 1849, *Leonhardi Euleri Opera posluma*, Petersburg 1862, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle*, Petersburg 1843, sowie der *Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi*, Leipzig 1907; in den erläuternden Anmerkungen zu den Briefen werden diese Werke folgendermaßen zitiert: *Comm. ar.*, *Op. post.*, *Corresp.*, *Briefw. Jacobi.*

Der Vater von P. H. v. Fuss, Nicolaus Fuss aus Basel (1755—1826), ein Schüler Daniel Bernoullis, war 1773 nach Petersburg zu Euler gegangen, der den Wunsch ausgesprochen hatte, einen jüngeren, tüchtigen Landsmann zur Unterstützung bei seinen Arbeiten zu haben. Fuss ist bis zu Eulers Tode, 1783, ein eifriger und verständnisvoller Mitarbeiter des großen Geometers gewesen; er hat dem seit 1766 völlig erblindeten Greise jene wertvollen Dienste bei der Ausarbeitung seiner mathematischen Untersuchungen geleistet, ohne die dieser schwerlich eine so ungeheuere Fruchtbarkeit — 355 Abhandlungen in den zehn Jahren von 1773 bis 1782 — hätte entfalten können. Nach Eulers Tode war daher niemand in höherem Grade als der treue Gehilfe berufen, ihm in der Petersburger Akademie die Gedächtnisrede zu halten (23. Oktober 1783). Auch das erste Verzeichnis der Schriften Eulers verdanken wir ihm; es ist nach Zeitschriften und innerhalb der Zeitschriften nach der Zeit geordnet. Mit der Familie Eulers verband Fuss sich jetzt dauernd, indem er eine Tochter von Joh. Albrecht Euler (1734—1800), dem ältesten Sohne Leonhard Eulers, zu seiner Lebensgefährtin machte. Von den Söhnen, die aus dieser Ehe hervorgingen, ist neben Paul Heinrich v. Fuss (1797—1855) dessen jüngerer Bruder Nicolaus v. Fuss (1810—1867) zu nennen.

Der umfangreiche Nachlaß Eulers war nach und nach in den Memoiren der Petersburger Akademie abgedruckt worden, und im Jahre 1830 glaubte man damit fertig zu sein. Doch bald stellte sich heraus, daß man Eulers Fruchtbarkeit noch immer unterschätzt hatte.

Nachdem P. H. v. Fuss als Nachfolger seines Vaters 1825 Sekretär der Petersburger Akademie geworden war, durchforschte er deren Archive und fand einige Pakete aus dem Briefwechsel Eulers, was ihn veranlaßte, dem Briefwechsel des Bernoulli-Eulerschen Kreises seine Aufmerksamkeit zuzuwenden. Seinen Bemühungen verdanken wir die Herausgabe der für die Geschichte der Mathematik im 18. Jahrhundert so wichtigen *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII^ème^ siècle*, 2 Bände, Petersburg 1843. Auf Anraten Jacobis hat Fuss diesem Werke ein systematisch geordnetes Verzeichnis der Eulerschen Schriften beigegeben, von dem er schon 1817/18 einen ersten Entwurf hergestellt hatte; während das Verzeichnis seines Vaters von 1783 noch nicht 700 Nummern enthielt, brachte er es auf 756 Stück. Um das Verzeichnis zu vervollständigen, hatte Fuss auch die Eulerschen Manuskripte im Archiv der Akademie von neuem durchgesehen und dabei ein noch nicht veröffentlichtes Werk Eulers mit dem Titel: *Astronomia mechanica* entdeckt. Bald darauf fand er auf der Bibliothek zu Paris ein eigenhändiges Manuskript Eulers: *Considérations sur quelques formules intégrales*, das in Lagranges Besitz gewesen, von diesem an Lacroix geschenkt und aus dessen Nachlaß verkauft worden war; auch diese Abhandlung war noch nicht abgedruckt. Jetzt entschloß sich Fuss, die lange geplante gründliche Durchsicht des gesamten ihm zugänglichen Eulerschen Nachlasses nicht länger zu verschieben, und in der Tat entdeckte er im März 1844 unter den im Familienbesitz befindlichen Papieren einen ganzen Haufen von Manuskripten, die man für bereits abgedruckt gehalten und beiseite gelegt hatte, die jedoch, wie die genauere Prüfung zeigte, noch unbekannte, von Euler eigenhändig geschriebene Abhandlungen waren.

Begreiflicherweise erregte dieser unerwartete Fund das größte Aufsehen. Er bewirkte, daß der in den Kreisen der Petersburger Akademiker schon oft erwogene Plan, eine Gesamtausgabe der Eulerschen Schriften zu veranstalten, von neuem auflebte. Einige Vorarbeiten lagen bereits vor: Die Petersburger Akademie hatte 1783 und 1785 je einen Band *Opuscula analytica*, eine Sammlung von 28 Abhandlungen Eulers, herausgegeben. Sie hatte ferner 1794 der *Integralrechnung* Eulers einen *vierten Band* hinzugefügt, der aus teils veröffentlichten, teils bisher unveröffentlichten Abhandlungen bestand. Auf ihre Kosten war endlich 1843 die schon erwähnte *Correspondance* gedruckt worden. Jetzt wurde der Vorschlag Fussens, eine Gesamtausgabe aller Eulerschen

Schriften zu veranstalten, von der Akademie beifällig aufgenommen und der Plan durch ein Schreiben vom 6. April 1844 dem Minister für Volksaufklärung, Grafen Uwaroff, unterbreitet. Das Riesenwerk war auf 25 Bände zu je 80 Bogen veranschlagt; für das Sammeln und Ordnen des Materials und die Überwachung des Druckes hatten P. H. v. Fuss und sein Bruder Nicolaus v. Fuss ihre Kräfte unentgeltlich zur Verfügung gestellt.

Der Minister beschied die Akademie dahin, daß er es für ratsam halte, die Ausführung des Planes auf eine günstigere Zeit zu verschieben. Als jedoch nach zwei Jahren keine günstigere Zeit eingetreten war und das gelehrte Publikum über die Verzögerung Klage führte, beschloß die Akademie auf den Antrag von Fuss, von dem Wiederabdruck der selbständig erschienenen Schriften abzusehen und sich auf die Herausgabe der Abhandlungen zu beschränken. Von diesen *Opera minora collecta Leonhardi Euleri* sollten, wobei ein Brief Jacobis den Ausschlag gab, die arithmetischen Abhandlungen sogleich auf eigene Kosten der Akademie herauskommen; man hoffte, daß, wenn sich erst die Bedeutung und Nützlichkeit des Unternehmens gezeigt hätte, Unterstützung von anderer Seite nicht ausbleiben würde. So erschienen denn, herausgegeben von P. H. v. Fuss und seinem Bruder, 1849 die zwei starken Bände der *Commentationes arithmeticae collectae.* In ihnen sind auch die ziemlich umfangreichen zahlentheoretischen Arbeiten aus den von Fuss 1844 gefundenen Manuskripten abgedruckt worden; ein systematisches Verzeichnis aller dieser Inedita findet man in der Vorrede. Diese enthält auch noch Ergänzungen zu der Liste in der Correspondance, mit denen die Gesamtzahl der Nummern auf 809 steigt.

Mit den *Commentationes arithmeticae* war ein verheißungsvoller Anfang gemacht worden. Jacobi wünschte, daß nun einige Bände *Comm. algebraicae* und *Comm. geometricae* folgen sollten, und wenn er länger gelebt hätte, würde er gewiß deren Herausgabe wirksam unterstützt haben. Nach seinem Tode (1851) hat sich von den westeuropäischen Mathematikern niemand der Eulerschen Werke angenommen, und auch die Berliner Akademie hat nichts für den großen Mathematiker getan, der ihr 25 Jahre lang angehört hatte. Da die Petersburger Akademie allein aus eigenen Mitteln das Unternehmen nicht fortsetzen konnte, verzichtete man schließlich auf die Ausführung des Planes von 1844 und entschloß sich, als eine Nachlese aus den Manuskripten Eulers die *Opera postuma mathematica et physica anno 1844 detecta* herauszugeben. P. H. v. Fuss hat die Vollendung dieses Werkes nicht mehr erlebt, das erst 1862 herauskommen konnte; Nicolaus v. Fuss ehrte sein Andenken, indem er den zweiten Band mit dem Bildnis des Bruders schmückte.

Zu C. G. J. Jacobi, dem jungberühmten Mathematiker der Königsberger Universität, war P. H. v. Fuss zu Anfang des Jahres 1836 in Beziehungen getreten. Die russische Regierung hatte nämlich einige Zöglinge des Petersburger pädagogischen Instituts nach Königsberg geschickt, wo sie sich vorwiegend unter Jacobi in der Mathematik und unter F. E. Neumann in der Physik ausbilden sollten. Ein Schreiben, das P. H. v. Fuss in dieser Angelegenheit an Jacobi richtete, eröffnet ihren Briefwechsel. In der Folge bildete ein persönliches Bindeglied zwischen beiden Jacobis' älterer Bruder Moritz, der Erfinder der Galvanoplastik, der seit 1837 in Petersburg lebte und in seiner Eigenschaft als Akademiker in beständigem Verkehr mit Fuss stand. Der Vermittelung von Moritz Jacobi hat sich Fuss vermutlich bedient, als er das Blatt aus Eulers Papieren an Jacobi sandte, das in dem Eingange der hier abgedruckten Briefe erwähnt wird. Dieses Geschenk bildete den Ausgangspunkt für eine inhaltreiche Korrespondenz, die beide über die Herausgabe der Eulerschen Werke geführt haben. Verehrte Fuss in Euler den großen Ahnen, so hat ihn Jacobi mit Pietät und Dank als den Schöpfer seines mathematischen Daseins angesehen.

Schon als Primaner hatte sich Jacobi, wie Dirichlet in seiner Gedächtnisrede berichtet, während die übrigen Schüler mühsam erlernte Elementarsätze hersagten, mit Eulers *Introductio* beschäftigt und als Student seine mathematische Ausbildung nicht durch den Besuch von Vorlesungen, sondern durch eifriges Studium der Werke von Euler und Lagrange erhalten. In der Tat sind die Untersuchungen dieser beiden großen Meister die Grundlage, auf der fast alle Arbeiten Jacobis beruhen; nur Gauss und Legendre wären daneben zu nennen. In eingehender Analyse darzulegen, wie Eulers Gedanken auf Jacobi eingewirkt haben, ist jedoch hier nicht der Ort, so reizvoll dieser Gegenstand auch sein mag. Es ist ein sehr sympathischer Zug bei Jacobi, daß er es niemals vergißt, die Anregungen zu erwähnen, die ihm Eulers Arbeiten gegeben haben, und daß er sich immer freut, wenn er Eulers Entdeckungen der Vergessenheit entreißen und ins rechte Licht setzen kann.

Ein glücklicher Zufall machte das Band zwischen Jacobi und Fuss noch enger. Auf einer Schweizerreise traf jener in Bern mit diesem und seinem Bruder Nicolaus zusammen, die in Paris gewesen waren, und sie machten nun die Fahrt durch das Berner Oberland bis Zürich gemeinsam (August 1843). „Mein Reisegefährte“, schreibt Jacobi aus Zürich am 28. August 1843 an seine Frau, „Staatsrath v. Fuss war sehr liebenswürdig“, und umgekehrt fand dieser an Jacobis Gesellschaft und Unterhaltung so viel Gefallen, daß er seiner nach der Rückkehr in die Heimat

„mit vieler Verehrung und Liebe gedachte", wie Moritz Jacobi dem Bruder aus Petersburg berichtet.

Auf dieser Reise ermunterte Jacobi den russischen Mathematiker, das große Werk der Euler-Ausgabe aufs eifrigste zu betreiben, und nahm ihm das feierliche Versprechen ab, die Akademie hierzu anzufeuern. Wie die folgenden Briefe zeigen werden, hat er selbst diese Bestrebungen, so viel wie er nur konnte, gefördert. Zum Beispiel machte er 1842 in Paris bei Libri die Briefe Eulers an Lagrange ausfindig und erwirkte für Fuss die Möglichkeit, sie zu benutzen. Später durchforschte er die Schriften, Manuskripte und Sitzungsprotokolle der Berliner Akademie und gab von allem, was sich auf Euler bezieht, seinem Korrespondenten Mitteilung; er hat sich sogar der mühsamen Arbeit unterzogen, die auf seine Veranlassung hergestellten Abschriften noch ungedruckter Eulerscher Abhandlungen Wort für Wort mit den Originalen zu vergleichen. Schließlich wurde er selbst Redakteur und entwarf in eingehender und gründlicher Arbeit die Grundlinien für Plan und Disposition der zu veranstaltenden Ausgabe der *Opera minora.* Mit Recht durfte Jacobi daher seine Bemühungen um die Herausgabe der Eulerschen Werke in einem amtlichen Berichte (1849) über die Art und den Umfang seiner akademischen Tätigkeit erwähnen.

Zur Zeichenerklärung. Mit Sternen (*) eingeleitete Anmerkungen rühren von den Briefschreibern selbst her, während die Anmerkungen der Herausgeber mit Ziffern (1, 2 usw.) bezeichnet sind. Runde Klammern ( ) gehören den Briefschreibern an, geschweifte Klammern { } bedeuten Zusätze von P. H. v. Fuss, eckige Klammern [ ] Zusätze der Herausgeber.

C. G. J. Jacobi an P. H. v. Fuss, Königsberg, den 28. Februar 1841.

Hochgeehrtester Staatsrath,

Ich kann Ihnen nicht genug für die große Freude danken, welche Sie mir durch das kostbare Geschenk mit dem Blatte aus den Papieren Ihres Urgroßvaters bereitet haben. Ich werde es mit Andacht unter den Heiligthümern meiner Bibliothek bewahren. Mein Bruder schrieb mir[1]), daß Sie eine werthvolle Briefsammlung von Bernoulli (doch wohl Jacob) an Euler besitzen. Sollten diese nicht in den Petersburger Memoiren publiziert werden können; so haben wir in den Berliner Memoiren für 1757 eine Briefsammlung von Leibnitz an Hermann, welche sehr interessant ist. Euler stand mit einem Gewürzkrämer Gordack in Tilsit[2]) in Corre-

---

1) Der betreffende Brief M. H. Jacobis ist nicht erhalten.

2) Johann Daniel Gordack war Seidenhändler und Senator in Tilsit. Auf der Königlichen und Universitätsbibliothek zu Königsberg sind jetzt aus Gordacks Nachlaß nur noch zwei Folianten vorhanden, die u. a. Auszüge aus Werken Eulers enthalten. Die Briefe Eulers an Gordack müssen nach dem Katalog der Gordackschen Samm-

spondenz, dessen Antworten an Euler sich hier auf der Kön. Bibliothek finden, welcher dieser Gordack seine Bücher vermacht hat. Wir sehen aus einer Antwort daß Euler bei seinem Abgange nach Petersburg ihn aufgefordert sein Nachfolger in der Berliner Akademie zu werden, welches aber der Mann ablehnt weil sein Handel ihm etwa 1000 ℛ︎ jährlich bringe, was für seine Bedürfnisse ausreiche; auch, schreibt er, kann es keinen laden Dein Nachfolger zu werden, qui solus totum mathematicorum chorum repraesentasti*).

Es wäre wohl eine große Wohlthat, welche die Petersburger Akademie der mathematischen Welt erwiese und ein Rußland ehrendes und seiner Größe angemessenes Unternehmen, wenn sie die Abhandlungen Eulers nach ihren Gegenständen geordnet herausgäbe. Eigentlich wäre es nur eine Vervollständigung für andere Theile der Mathematik, was die Akademie bereits für die Integralrechnung durch Hinzufügung eines 4ten Theiles gethan hat. Ich weiß nicht, aber es ist mir nicht ganz wahrscheinlich, ob dieser 4te Theil vollständig die Eulerschen Abhandlungen über Integralrechnung, welche seine *Institutiones* ergänzen können, enthält; sonst könnte vielleicht die Akademie noch einen fünften hinzufügen. Und dann über unendliche Reihen, über Algebra, einige Bände über Zahlentheorie und hauptsächlich die noch heute sehr werthvollen Arbeiten über Mechanik (feste Körper, Hydrodynamik, elastische Körper, alles nach den verschiedenen Materien geordnet) u. s. w. Die beiden Bände *Opuscula analytica*, welche glaube ich die Akademie gleich nach seinem Tode aus seinen Abhandlungen zusammenstellte, sind gar nicht mehr zu haben, wie viel Mühe ich mir auch gegeben. (Dagegen ist der Band *Opuscula varii argumenti*[1]) noch häufig zu haben.) Eine Hauptfrage wäre, ob die Akademie sämmtliche Eulersche Abhandlungen auch aus anderen akademischen Schriften mit aufnähme, wofür ich natürlich sehr wäre. Dann müßte ein Plan für das Ganze gemacht werden die Anordnung nach dem Inhalte und die verschiedenen Bände betreffend, was allerdings eine schwierige Arbeit ist. Die Kategorien der Einteilung müßten aus dem Inhalt selbst entnommen werden und es scheint mir diese Arbeit so groß, daß sie gewiß unter mehrere vertheilt werden müßte. Dann könnte allmählig an die Ausführung gegangen werden und wenn man es auf eine Reihe von Jahren vertheilt, würden die Kosten

*) Die Eulerschen Briefe sind leider nicht vorhanden.

---

lung ursprünglich auch dort vorhanden gewesen sein, sie waren jedoch schon im Jahre 1820, als Bessel eifrig nach ihnen suchte, nicht mehr aufzufinden und sind jedenfalls als verloren zu betrachten (Brief von Bessel an P. H. v. Fuss vom 11. April 1843).

1) Es gibt drei Bände *Opuscula varii argumenti*, die Berlin 1746, 1750, 1751 erschienen sind.

gar nicht einmal so bedeutend sein. En attendant würden Sie gewiß etwas vielen sehr willkommnes thun, wenn Sie die Liste, welche Ihr Vater der Biographie beigefügt hat, wieder ediren, indem Sie die nach 1783 publicirten Abhh. unter die verschiedenen Jahrgänge der Akad., denen sie angehören, einregistriren, wobei die ebenfalls in dem Tom. IV der *Inst. C. I.* und in den *Opp. Analyt.* befindlichen etwa noch mit Asterisken zu bezeichnen wären. Ich habe dies für meinen Privatgebrauch selber thun müssen.

Nehmen Sie nochmals meinen großen Dank für Ihr schönes Geschenk und behalten Sie ein geneigtes Wohlwollen

K. d. 28. Febr. 1841. Ihrem ganz ergebenen Diener

C. G. J. Jacobi.

Sollten Sie nicht die Ak. bewegen können, wenn sie Besseln ein Exemplar ihrer herrlichen Abhh. schickt, ein dito für mich beizulegen?

P. H. v. Fuss an C. G. J. Jacobi, St. Petersburg, den 7./19. März 1841.

St. Petersburg d. 7./19. März 1841.

Verehrter Herr Professor

Ihr freundlicher Brief vom 28. Februar hat mich in mehrfacher Hinsicht erfreut und erquickt. Ich gehe allerdings damit um, eine Sammlung unedirter Briefe berühmter Mathematiker an Euler, an deren Studium ich mich in den letzten Monaten wahrhaft gelabt, und in denen ich höchst interessante Aufschlüsse über manche anziehende Punkte der Geschichte der Wissenschaft gefunden habe, herauszugeben. Es sind darunter nicht weniger als 14 Briefe Johann Bernoulli's des Aeltern[1]), des Lehrers unseres Euler, von 1728 bis 1746, also bis zwei Jahre vor seinem Tode, gegen 60 Briefe (1733—1753) von Daniel Bernoulli (dem Sohne Johanns)[2]), ferner manches Interessante von Clairaut, Poleni[3]), Naudé[4]), 7 Briefe von Ihrem Lambert u. manches andere. Joh. Bernoullis Briefe sind sämmtlich lateinisch, bis auf einen über Eulers Musikwerk[5]), der, weil

1) Die Sammlung der in der *Corresp.* t. II veröffentlichten Briefe Joh. Bernoullis an Euler ist durch G. Eneström um drei Nummern vermehrt worden; dieser hat den ganzen Briefwechsel zwischen beiden, soweit er noch vorhanden ist, herausgegeben. Bibl. math. (3) **4** (1903), p. 344—388, **5** (1904), p. 248—291, **6** (1905), p. 16—87.

2) Abgedruckt in der *Corresp.* t. II.

3) Giovanni Poleni (1683—1761) war seit 1719 als Nachfolger Nicolaus Bernoullis Professor der Mathematik an der Universität Padua.

4) Philipp Naudé d. J. (1684—1747) war Lehrer der Mathematik am Joachimsthalschen Gymnasium und Mitglied der Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

5) Dieser Brief vom 11. August 1731 (*Corresp.* t. II, p. 8—11) betrifft Eulers damals schon fast vollendetes Werk: *Tentamen novae theoriae Musicae, ex certissimis harmoniae principiis dilucide expositae,* das erst 1739 herausgekommen ist.

er nichts specielles enthält u. durch Ton und Gegenstand ein größeres Publicum interessiren konnte, von mir in der Petersburger Zeitung abgedruckt wurde. Wenn Sie ihn nicht schon gelesen, so wird der beiliegende Abdruck Ihnen vielleicht willkommen sein. DANIEL BERNOULLI schreibt leider nur in dem gräulichen Deutsch jener Zeit; deshalb sind seine Briefe, der Form nach, weniger anziehend; enthalten aber doch fast lauter wissenschaftlich interessante Dinge. Dass ich unter EULERS Papieren nicht eine Zeile von LAGRANGE[1]) finde, läßt mich vermuthen, dass ich bei weitem nicht die ganze Sammlung habe. Vielleicht befindet sich noch Manches in den Händen anderer Mitglieder der Familie, wie mir denn noch vor Kurzem, nach dem Tode eines Oheims, ein ganzer Band (57) Briefe FRIEDRICHS DES GROSSEN an EULER[2]) zufiel, welcher jetzt auch in dem akademischen Archiv deponirt ist*).

Was nun Ihren Vorschlag zu einer neuen Edition sämmtlicher EULERscher Schriften in systematischer Ordnung betrifft, so ist uns, wie Ihnen bekannt seyn wird, eine Gesellschaft in Brüssel zuvorgekommen, die außerdem auch noch die nicht französischen Sachen ins Französische übersetzt u. bis jetzt, soviel mir bekannt, fünf Bände herausgegeben hat[3]). Ein Unternehmen also, wie dasjenige, welches Sie vorschlagen, möchte mit jenem collidiren und bei unserer Entfernung vom Mittelpunct des literarischen Verkehrs, sich schwer halten können. Es war öfter zwischen OSTROGRADSKY und mir die Rede von einer *Auswahl* der EULERschen Werke in einer neuen Auflage, aber ehe wir zum Schluß kamen, waren Jene

*) Auch diese Briefe geben interessante Auskunft darüber, wozu EULER, außer seiner akademischen Wirksamkeit, von dem großen König gebraucht wurde, während der 25 Jahre, die er in Berlin verlebte. Einer charakterisirt auf eine ergötzliche Weise den Geist der damaligen kriegerischen Zeit. Eine Abschrift desselben folgt hiebei.

---

1) Elf Briefe LAGRANGES an EULER hat BONCOMPAGNI 1877 veröffentlicht; sie sind wieder abgedruckt in den *Oeuvres*, t. **14**, Paris 1892.

2) Von den 57 Briefen FRIEDRICHS DES GROSSEN an EULER sind 22 in den *Oeuvres de FRÉDÉRIC le Grand*, tome 20, Berlin 1852, p. 199—212 abgedruckt worden; über die nicht abgedruckten vgl. *Avertissement de l'éditeur*, p. XXII; Stellen aus diesen Briefen finden sich übrigens auch schon in der *Gedächtnisrede* von NIC. FUSS, 1783. In den *Oeuvres de FRÉDÉRIC* sind auch drei Briefe EULERS an FRIEDRICH abgedruckt worden (vgl. dazu *Avertissement*, p. XXIII), und zu ihnen sind in den *Op. post.* t. I noch zwei Briefe EULERS gekommen.

3) *Oeuvres complètes en français de L. EULER, éditées par l'association des capitaux intellectuels pour favoriser le développement des sciences physiques et mathématiques,* Brüssel 1838, 1839. Als Herausgeber werden genannt die belgischen Mathematiker: DUBOIS, DRAPIEZ, MOREAU, WEILER, STEICHEN und PH. VANDERMAELEN. Es sind fünf Bände erschienen, die sich alle auf der Bibliothèque Royale in Brüssel vorfinden. Auf deutschen Bibliotheken scheinen Bd. IV und V gänzlich zu fehlen; die Bände I, II und III sind auf der Universitätsbibliothek in Königsberg vorhanden.

schon mit ihrer ersten Lieferung herausgerückt, und — sie machen's nicht einmal gut; denn sie nehmen sich heraus den Meister zu meistern, u. ist doch kein bekannter Name unter ihnen.

Sie schreiben ferner, daß Sie meines Vaters Liste der Eulerschen Schriften neu edirt wünschten mit Hinweisung auf diejenigen Sammlungen, wo die damals noch nicht edirten Sachen abgedruckt worden sind. Dies brachte mich auf eine Arbeit, die ich vor 20 u. einigen Jahren zu meinem eignen Gebrauch machte[1]), nämlich auf ein streng systematisches Verzeichniß der sämmtlichen Schriften Eulers mit Hinweisung auf den Ort, wo jede derselben zu finden, u. Angabe des Jahrs ihres Entstehens. Ein solches systematisch-chronologisches Verzeichniß erleichtert offenbar das Aufsuchen dessen, was man gerade braucht, unendlich. Bei den Abhandlungen, deren Titel zu vag sind, ist eine kurze Erläuterung des Inhalts hinzugefügt. Dieses Verzeichniß nun nahm ich wieder vor, ergänzte, wo nöthig, u. will es, wenn Sie es gut heißen, der Briefsammlung vorausschicken, nebst einer Nachricht über Eulers Schriften. Es haben sich nämlich unter den in meines Vaters Liste als unedirt aufgeführten Schriften, einige wenige gar nicht vorgefunden; andere, u. zwar in größerer Anzahl, die seitdem gedruckt sind, fehlen in der Liste; noch andere (ein halbes Dutzend etwa) sind im Manuskript vorhanden u. vorsätzlich nicht edirt worden, zum Theil, weil sie von meines Vaters Hand als „supprimenda" bezeichnet, zum Theil, weil sie apocryph sind. Endlich aber gibt mir mein systematisches Verzeichniß ein Mittel an die Hand unter dem Vorrath Eulerscher Manuskripte, die theils im akademischen Archiv, theils (bis dato noch) in meinem Privatbesitz sich befinden, mit Leichtigkeit bestimmen zu können, was wirklich noch unedirt ist (denn die in meines Vaters Liste als unedirt aufgeführten Abhandlungen sind nur solche die durch Euler selbst bereits der Akademie vorgelegt waren). Eine akademische Commission (an der Ostrogradsky u. Struve bereit sind Theil zu nehmen) mag dann entscheiden, was etwa davon noch gedruckt werden mag; denn darüber will ich natürlich mir allein kein Urteil anmaaßen. Wenigstens glaube ich jetzt schon, vorläufig, ein ziemlich starkes, sauber von Eulers eigner Hand geschriebenes, also nicht aus den allerletzten (aus den Funfziger) Jahren datirendes Fragment unter dem Titel: *Astronomia mechanica* als unedirt bezeichnen zu können, dessen Inhaltsverzeichniß ich für Sie hier beilege. Erst nach vollendeter Sichtung werde ich darüber mit Bestimmtheit mich aussprechen können. — Viele die Integralrechnung betreffende Abhh., die nach der ersten Auflage der *Institutiones C. I.* geschrieben sind, befinden sich nicht im 4ten Bande der zweiten Auflage dieses Werkes, und es

1) Vgl. *Corresp.* t. I, p. XLVII.

ließe sich allerdings wenigstens noch ein 5ter Band daraus bilden. Darüber mag jene Commission einst entscheiden.

Die Akademie hat Ihnen mit Vergnügen ein Frey-Exemplar der *Mémoires, sciences mathématiques* u. der *Savants étrangers* bewilligt, das ich Ihnen nächstens frey pr. Post zu schicken gedenke. Der beste Dank dafür wäre — wenn Sie aus dem reichen Vorrath Ihrer trefflichen Untersuchungen hin u. wieder uns Etwas zutheilen wollten, was unserm *Recueil des savants étrangers* zu Ruhm u. Zierde gereichen würde. — Aus Ihrem Briefe scheint es, als fehlten *Ihnen selbst* die *Opuscula analytica.* Ist dem so, so lassen Sie es mich gefälligst wissen u. ich werde mir ein Vergnügen machen Ihnen ein Exemplar beizulegen.

Ich freue mich eine Beschäftigung gefunden zu haben, durch welche ich Etwas dem mathematischen Publicum Willkommnes liefern kann und die auch bei den steten lästigen Unterbrechungen u. der Zeitzersplitterung, die mein Amt mit sich bringt, allmälig gefördert u. zum Schluß geführt werden kann, da man hier immer den Faden wieder findet. Zu eigentlich wissenschaftlichen Arbeiten komme ich fast gar nicht mehr. Ob die Welt dabei verliert, weiß ich nicht u. bescheide mich gern es nicht zu glauben; die Geschäfte der Akademie aber gewinnen dabei, wenn denn mir auch das Opfer ein wirklich schweres, schmerzhaftes u. auch jetzt noch, nach 15 Jahren, nicht zu verwindendes ist. Einigermaßen tröstlich ist's für mich, daß ein Besserer, als ich, mein Vater, auch zu produciren aufhörte, da er das Sekretariat übernahm. Seine Collectaneen zeigen mir, daß alle seit 1801 gelesenen Abhh. Conceptionen früherer Jahre u. nur später redigirt waren. Er war 46 Jahr alt, ich 27, bei Uebernahme des Sekretariats u. die Wirksamkeit der Akademie nach Außen hat sich seitdem verzehnfacht.

Mit ausgezeichneter Hochachtung verharre ich

Ihr ergebenster
Fuss.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, Königsberg, den 3. Mai 1841.

Königsberg, d. 3n. Mai 1841

Hochgeehrtester Herr Staatsrath,

Wie soll ich Ihnen genug für Ihren reichen, inhaltsschweren Brief danken? In der Freude meines Herzens theilte ich ihn Bessel mit, der sich mit mir an dem Genusse labte, den uns alles gewährt, was mit Euler zusammenhängt. Der wunderschöne Brief Johann Bernoullis, den Sie mir mitzutheilen die Güte hatten, hat uns höchst erfreut; der deutsche Styl ist darin so vortrefflich, wenn man von den zufälligen veralteten

Formen abstrahirt, daß man gar nichts besseres lesen kann und wirklich bedauert, daß die übrigen 13 Briefe, auf die dieser sehr begierig macht, nicht auch deutsch geschrieben sind. Sollte denn sein Sohn Daniel so viel schlechter deutsch geschrieben haben, wie aus Ihren Andeutungen hervorzugehen scheint? Alles was von diesem großen Talente herrührt muß uns um so mehr interessiren, da wir verhältnißmäßig wenig von ihm haben; er scheint, wie mir vorkommt, nachdem er von Petersb. nach seiner Vaterstadt zurückkehrte um eine Professur der Medicin zu übernehmen — sie waren fast alle Mediciner, Jakob ausgenommen, der Prediger war — nichts oder wenig mehr für die Wissenschaft gethan zu haben. Er ist sehr berühmt dafür, daß er zuerst eine willkürliche Function in seinen Tonarbeiten durch eine Sinusreihe dargestellt hat, was die Basis der neueren mathematischen Physik geworden ist. Da er den einzelnen mitklingenden Tönen die einzelnen Terme der Reihe entsprechen läßt, so hat er die Entwicklung gewissermaßen gehört. Aber es scheint mir kaum weniger wichtig, daß er zuerst das Princip der lebendigen Kraft in seiner ganzen Allgemeinheit für ein System sich gegenseitig anziehender Punkte aufgestellt hat, während Euler dies nur für die Anziehung nach *festen* Punkten kannte. Dies verhinderte Euler in seiner *Nova methodus inven. l. c. etc.* aus dem von Maupertuis sogenannten principe de la moindre action schon allen Vortheil zu ziehen, den hernach Lagrange daraus zog, der bei seinem ersten Auftreten in den Turiner Memoiren das verallgemeinerte Princip der leb. Kraft zum Grunde legte und hierdurch mit einem kühnen Wurfe die *Mécanique Analytique* gründen konnte. Obgleich Euler an diese Verallgemeinerung, die uns jetzt so einfach scheint, glaubt, so meint er doch, eine gesunde Metaphysik müsse hierbei den Calcul suppliren[1]). Diese Metaphysik besteht dann darin, daß „wegen der Trägheit die Kräfte in der Natur die kleinste Wirkung hervorbringen". Wunderbares Mißverständniß! Der Sinn des Princips soll sein, daß die Natur einen bestimmten Effect mit der kleinsten Action, der kleinsten Thätigkeit, dem kleinsten Kraftaufwande hervorbringt, mit ihren Kräften öconomisirt. Die deutsche Übersetzung „Princip der kleinsten Wirkung" ist ganz unsinnig; ebenso ist der mathematische

1) In der *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes,* Lausanne et Genevae 1744, *Additamentum* II *de motu projectorum,* p. 320 sagt L. Euler: Cujus ratiocinii vis, etiamsi nondum satis perspiciatur; tamen, quia cum veritate congruit, non dubito quin, ope principiorum sanioris Metaphysicae, ad majorem evidentiam evehi queat; quod negotium aliis qui Metaphysicam profitentur, relinquo. „Dies zeigt weder eine gesunde, noch überhaupt irgend eine Metaphysik", bemerkt Jacobi hierzu in den von A. Clebsch herausgegebenen *Vorlesungen über Dynamik* (Werke, Supplementband, p. 43—44), „und in der Tat ist Euler nur durch Mißverständniß des Namens 'kleinste Wirkung' zu diesem Ausspruch veranlaßt worden".

Ausdruck höchst verworren, selbst bei Lagrange und Poisson, der dagegen nur in Eulers Originalabhandlung untadlig ist. Die Abhandlung von D. B[ernoulli] über die lebendige Kraft, die also z. B. zuerst das eine Integral in dem Problem der 3 Körper giebt, steht sonderbarer Weise in den Schriften der Berl. Ak. unter „speculativer Philosophie“.

Daß Sie keinen Brief von Lagrange an Euler haben, bedauere ich sehr. Lagrange war auf zwei Dinge sehr eifersüchtig, auf seine Frau, was man einem der im 70ten Jahre heirathet, nicht übelnehmen kann[1]), und daß niemand die Brouillons zu seinen Arbeiten zu sehen bekäme. Er mag sich daher im Grabe herumgedreht haben, als seine Frau nach seinem Tode heirathete, und alle seine Papiere, wie sie es fand, in einen Kasten warf und diesen dem Institut für einige Tausend Francs verkaufte. Unter diesen Sachen finden sich jedoch zwei oder drei Briefe Eulers, von denen Legendre im 2ten Theil der neusten Ausgabe seiner *Zahlentheorie* S. 142 uns den Inhalt giebt: 1) eine Lösung des Problems, fünf rationale Zahlen a, b, c, d, e zu finden so daß die 10 Producte $ab+1$, $ac+1$ u. s. w. Quadrate sind[2]); 2) Ein Beispiel zu dem Problem, 16 in ein Quadrat geordnete Zahlen zu finden, so daß die Quadrate der 4 Zahlen in jeder Horizontalreihe, jeder Verticalreihe und den beiden Diagonalen eine gleiche Summe geben und dass, wenn a, b, c, d; e, f, g, h irgend zwei Horizontal- oder Verticalreihen sind, man immer hat $ae+bf+cg+dh=0$. Legendre sagt: Euler remarque qu'il y a une infinité de manières de satisfaire à ce problème et qu'il en possède la solution générale. L'analyse de ce problème n'a point été publiée et il est fort à désirer qu'elle le soit, si on peut la trouver parmi les manuscrits de l'auteur, non encore imprimés; car on voit qu'il serait fort difficile de la restituer. Nun können Sie uns aus der Not helfen? Oder fände sich die Lösung doch vielleicht schon unter den gedruckten Sachen, wie Sie aus dem von Ihnen angelegten Verzeichniß müssen entscheiden können[3]).

Legendre bemerkt nicht, daß die Bedingungen für die Horizontalreihen von selbst aus denen für die Verticalreihen folgen, ganz wie bei den ähnlichen Gleichungen bei der Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems im Raum; es sind daher nur 11 Bedingungen zwischen den 16 Zahlen und nicht 22, wie Leg. meint.

---

1) Lagrange, 1736 geboren, heiratete 1792 in zweiter Ehe die Tochter des Astronomen Lemonnier.

2) Vgl. V. Bouniakowsky et P. Tchebychew, *Index systématique et raisonné des mémoires arithmétiques de Léonard Euler, Comm. ar.* t. I, p. LVI—LVII.

3) Euler hatte seine Lösung in der Tat schon 1771 in den Nov. Comment. t. XV, p. 75 veröffentlicht, vgl. auch das Referat von Lebesgue, Nouv. ann. de math. **15** (1886), p. 403.

Es hat in früherer Zeit gewiss auch ein Briefwechsel zwischen Euler und d'Alembert Statt gefunden[1]); später scheint ihr Verhältniß bitter geworden zu sein, so daß Euler die Aufnahme der d'Alembert schen Abhandlungen gegen ihn in die Schriften der Berliner Akad. verhinderte. Er sagt einmal, „wenn Herr d'Alembert dieses liest, wird er sagen, er sei jetzt zu beschäftigt um mir zu antworten, in einigen Jahren würde er eine Abhandlung schreiben und mich darin widerlegen". Diesen Scherz nimmt dann d'Alembert in einem Briefe an Lagrange sehr übel. Es zeigt dies übrigens Eulers unabhängigen Charakter, da d'Alembert von Friedrich so begünstigt worden. Es ist merkwürdig daß es ganz unmöglich ist, heute noch eine Zeile von d'Alembert hinunterzuwürgen, während man die meisten Euler schen Sachen noch mit Entzücken liest, und sie starben doch in demselben Jahre. D'Alembert scheint seine ganze Eleganz in der Belletristik absorbirt zu haben. —

Die Correspondenz zwischen Euler und Lagrange von Berlin und Turin aus scheint ziemlich lebhaft gewesen zu sein; außer dem Briefe Eulers[2]) im 2. Bande der Miscell. Taurin., der anfängt „Depuis ma dernière lettre" findet sich ein locus classicus im 4. Bande, wonach die Correspondenz 1755[3]) begonnen zu haben scheint (comme il paroit par les différentes lettres qu' Euler m' a écrites sur ce sujet, et que je conserve encore (warum hat er sie nicht länger verwahrt). Dans une de ces lettres datée du 2 Octobre 1759 etc.).

Euler hat auch von Petersburg aus in Correspondenz mit Beguelin gestanden, einem Philosophen und talentvollen Liebhaber der Mathematik in der Berl. Ak. Es findet sich ein Brief von Euler und ein Brief von Ihrem Vater an diesen in den Berl. Mem. für 1776.[4])

Die mir von Ihnen gegebene Notiz über die Brüsseler Ausgabe von Eulers Werken war mir gänzlich neu, woraus Sie sehen, wie entfernter vom Centrum des litterarischen Verkehrs wir hier leben, wozu gewiß

1) Bekannt sind sechs Briefe Eulers an d'Alembert aus den Jahren 1747 1749, die Charles Henry 1886 veröffentlicht hat [Bullet. di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche **19** (1886), p. 136—148].

2) *Lettre de M. Euler à M. de la Grange*, Misc. Taurin. **2**, 1760—1761; der Brief ist datiert 1. Jan. 1760; in dem Verzeichnis der veröffentlichten Schriften Eulers, das Fuss 1843 in der *Corresp.* gegeben hat, ist dieser Artikel der Misc. Taur. unter Nr. 507 angeführt.

3) Wie die von Boncompagni veröffentlichten Briefe zeigen, hat der Briefwechsel zwischen Lagrange und Euler wahrscheinlich schon 1754 begonnen, siehe *Oeuvres* t. **14**, Paris 1892, p. 135.

4) Nicolas de Beguelin (1714—1789) war Direktor der phys. Klasse der Berliner Akademie; die im Text angeführten Briefe finden sich in den Nouv. Mém. de Berlin, année 1776 (1779), p. 337—339 und p. 340—346.

die mangelnde Dampfschiffcommunication beiträgt. Ich weiß daher nicht, ob die erschienenen fünf Bände die größeren Werke wiedergeben, was ein weniger dringendes Bedürfniß wäre als die Abhandlungen. Es müßte herrlich sein, die Abhandlungen Eulers über Zahlentheorie und ganz vorzüglich auch die noch immer unentbehrlichen über die Mechanik systematisch geordnet zu besitzen. Hat doch noch neulich, als Schultén eine Stelle in Lagranges *Méc. An.* angriff, die Poisson vertheidigen wollte, Euler den schiedsrichterlichen Ausspruch gethan[1])

In meiner Vaterstadt Potsdam ist bei Sanssouci ein Hügel, auf dem sich die Trümmer einer für Sanssouci bestimmten Wasserleitung befinden, wovon der Hügel der Ruinenberg heißt; nach einer Tradition soll die Wasserleitung von Euler herrühren; wahrscheinlich findet man etwas darüber in den Briefen Friedrichs. Der interessante Brief, den Sie mir als Probe mittheilen, dient als Beleg für die ihm oft vorgeworfenen unangenehmen Seiten seines Characters; diese perfide Härte mag wenig zu Eulers offenem und einfachem Character gestimmt haben[2]).

Sie würden gewiß Ihre Leser verbinden, wenn Sie den Briefen eine Biographie der Briefsteller, wenigstens soweit sie zum Verständniß der Briefe wünschenswerth ist, oder in der Ausdehnung, die Sie für zweckmäßig halten, vorausschicken. Auch könnten Sie gewiß aus Familientraditionen noch manches zu Eulers Leben hinzufügen. Namentlich möchte ich gern näheres über die Art seiner Arbeiten wissen, nachdem er auf den Gebrauch beider Augen verzichten mußte, so daß er also wie es scheint nicht mehr selber lesen und schreiben konnte.[3]) Gleichwohl scheint daß von da an seine allerfruchtbarste Periode sich datirt. Hat er

1) N. G. af Schultén (1794—1860), Professor der Mathematik an der Universität Helsingfors, hatte sich 1829 gegen eine das Gleichgewicht eines elastischen Fadens betreffende Stelle der *Mécanique analytique,* 2. éd. t. I, p. 151—159, gewandt (Astr. Nachr. 7, Nr. 155, siehe auch Quarterly journal of science, literature and art 1829, January to June, p. 400). Poisson, den der Herausgeber der Astr. Nachr., H. C. Schumacher, um eine Meinungsäußerung gebeten hatte, begnügte sich damit, Astr. Nachr. 7, Nr. 162, auf Eulers Abhandlung: *Genuina principia doctrinae de statu aequilibrii et motu corporum tam perfecte flexibilium quam elasticorum,* Nov. Comment. 15 ad ann. 1770 (1771), p. 381, zu verweisen; man vergleiche jedoch auch Poissons Äußerungen in der Correspondance sur l'École polytechnique, t. 3, p. 355 und die Anmerkungen J. Bertrands zu dieser Stelle der *Mécanique analytique* (Ausgabe vom Jahre 1853, t. I, p. 143, 148), sowie dessen Note am Schlusse des Bandes, p. 401—405.

2) Vielleicht ist der Brief 16. Juni 1765 gemeint (*Oeuvres de Frédéric,* t. 20, p. 208).

3) Diesen Wünschen ist P. H. v. Fuss in der *Corresp.* nachgekommen, wo sich t. I, p. XXVI—XXXIV biographische Angaben über die Bernoulli und Goldbach und p. XLIII—XLV über die Arbeitsweise des erblindeten Euler finden; vgl. auch *Briefw. Jacobi,* p. 96.

immer dictirt und das alles im Kopfe gerechnet, was unmöglich ist, oder hat Ihrem Vater oder Lexell[1]) oder Schubert[2]) gesagt, was sie ausrechnen sollten, was mir das wahrscheinlichste ist. Wahrscheinlich mußten sie ihm auch über die Abhandlungen z. B. von Lagrange berichten und stellenweise vorlesen.

Vielleicht ließe es sich machen, dass Sie in Ihrem Inhaltsverzeichnisse, welches eines der wichtigsten Werke für die Geschichte der Mathematik sein wird, jeder Abhandlung ein Paar Worte über den Inhalt beifügten, oder ihr Hauptresultat. Es wäre dies freilich eine sehr große Arbeit, die indessen vielleicht durch die in den Memoiren vorn befindlichen Auszüge etwas erleichtert würde. Wenn Sie sich wollten helfen lassen, so würden Sie gewiß an Socoloff dabei Unterstützung finden, der wenn auch kein erfinderischer Kopf vielleicht doch einen seltnen Eifer besitzt, das was andere gemacht haben zu verschlingen[3]). Auf mein Andringen sich selber zu versuchen antwortete er immer, wie er das könne, da er noch so vieles nicht gelesen habe; was mir vorkommt, als ob einer der heirathen soll sagt, wie kann ich heirathen, da ich noch nicht alle Mädchen kenne. Sollte das Inhaltsverzeichniß — was es dann wirklich würde — zu groß werden, so könnten Sie es ja auch besonders herausgeben und auch das hätte seine Vorzüge, um es handlicher zu machen. Sie müßten auch ein Portrait Eulers zu den Briefen beifügen; Sie haben gewiß in der Familie mehrere und es wird sich gewiß die Tradition erhalten haben, welches das ähnlichste ist; ceteris paribus bin ich immer für diejenigen Portraits am meisten eingenommen, die ihren Gegenstand in größter Jugend darstellen, wo der Mensch doch eigentlich allein das ist was er ist. Ich kenne von Euler nur das Bild, das Legendre dem 2. Theil seines *Traité d. F. E.* beigefügt, und das, da es in meinem Exemplar zufällig fehlt, mir meine Frau abgezeichnet hat.

Ihre großmütige Offerte mir die beiden Bände *Opuscula Analytica* zu schenken nehme ich mit Enthusiasmus an, da in der That alle meine bisherigen Bemühungen deshalb fruchtlos waren. Ich sah sie zuerst vor zwei Jahren bei Crelle und entdeckte gleich etwas was Dirichlet und ich bisher für unser Eigenthum gehalten hatten; anderes, indem es alte Ideen

1) A. J. Lexell aus Åbo (1740—1784) kam 1768 nach Petersburg und wurde 1783 Eulers Nachfolger. Dieser ließ sich von Lexell, Krafft und seinem ältesten Sohne Joh. Albrecht Euler bei seinen Arbeiten helfen. Seit 1773 aber hat Fuss bei weitem die Mehrzahl der Eulerschen Abhandlungen redigiert; vgl. *Corresp.* t. I, p. XLI—XLIV.

2) Fr. Th. Schubert aus Helmstädt (1758—1825) ist erst 1780 als Hauslehrer nach Petersburg gekommen, er wurde später Mitglied der Akademie.

3) Iwan Dmitriewitsch Sokoloff (1812—1873) war 1836 von der russischen Regierung zu seiner wissenschaftlichen Fortbildung nach Königsberg geschickt worden; vgl. über ihn *Briefw. Jacobi*, p. 61, 64.

von mir befruchtete, kann mich vielleicht zu einer interessanten Entdeckung führen die Entwicklung der Quadratwurzeln in periodische Kettenbrüche auf analoge periodische Algorithmen für Kubikwurzeln und dergleichen auszudehnen; doch habe ich mich bis jetzt, da meine Arbeiten darüber unterbrochen wurden, mit Beispielen begnügt. Sehr erfreut hat mich auch das Anerbieten Ihrer Akademie mir die *Mémoires sciences mathématiques* und die *Savants étrangers* zu übersenden und bitte ich Sie dringend der Akademie dafür meinen wärmsten und aufrichtigsten Dank abzustatten. Was Ihre Aufforderung betrifft der Akademie selber etwas zur Aufnahme in die *Savants Étr.* zu schicken, so erlaube ich mir darüber, obgleich [ich] wohl für die erste Zeit kaum Gelegenheit haben dürfte davon Gebrauch zu machen, folgende Bemerkungen. Ich war immer der Meinung, die Ehrenmitglieder Ihrer Akademie entsprächen dem was andere Akademien Associé oder auswärtiges Mitglied nennen; ein solches aber ist wirkliches Mitglied, das sich nur an einem anderen Orte aufhält, so wie es aber dahin kommt, an allen Rechten z. B. des Votirens Theil nimmt und das wenn es seinen Aufenthalt dauernd an dem Orte der Akademie nimmt, mit den übrigen Mitgliedern von dem Datum seines Ernennungspatents rangirt, wie dies z. B. der Fall wäre wenn ich nach Berlin käme. Hieraus folgt von selbst daß die von den Associés eingeschickten Abhandlungen nicht in die *S. Étr.*, sondern wie die der wirklichen Mitglieder in die *Mémoires* selber kommen, wie z. B. eine Abhandlung von Lagrange als er noch in Berlin war in die *Pariser Mém.* selber, nicht in die *S. E.* aufgenommen wurde. Das Wort *Étranger* bezieht sich keineswegs auf Ausländer, sondern auf solche die der Akademie fremd sind. Nun würde ich aber, wenn ich etwas der Akademie würdiges und noch nicht zu etwas anderem bestimmtes hätte, durch solches Einrücken in die *S. E.* ungern anerkennen daß ich als Ehrenmitglied der Akademie fremd und so fremd wie jeder andere wäre.

Es wäre eigentlich ein nothwendiges Supplement zu den Werken Eulers, wenn Sie die Werke Ihres Vaters herausgeben, die zu jenen in so inniger Beziehung stehen und viel zu wenig bekannt sind. Wer weiß z. B. daß er zuerst die jetzt so viel behandelten sphärischen Kegelschnitte eingeführt hat[1]). Eine schöne Abh. von ihm über Polygone die einem Kreise ein-, einem andern umgeschrieben sind, hat mir selbst früher einmal Gelegenheit zu einer merkwürdigen Construction des Fundamentaltheorems der Elliptischen Transcendenten gegeben[2]). Die dort von Ihrem

1) Nova Acta Petrop. **2** ad 1784 (1788), p. 70—83; **3** ad 1785 (1788), p. 90—99.

2) N. Fuss, Nova Acta Petrop. **13** ad 1795—96 (1802), p. 166—189; C. G. J. Jacobi, J. für Math. **3** (1828), p. 376 = *Werke*, Bd. I, p. 277—293.

Vater gegebenen Zahlenbeispiele sollen Pfaff, wie mir Möbius sagte, zu einem in seinen hinterlassenen Papieren befindlichen merkwürdigen Theorem über den Inhalt solcher Polygone geführt haben. Es würden nur eine mäßige Zahl Bände geben und [man] hat nicht einmal ein Inhaltsverzeichniß, sondern findet nur eine geringe Aushülfe etwa durch Reuss *Repertorium*.

Daß Sie bei den vielen Geschäften, denen Sie so ruhmvoll vorstehen zum Heil Ihrer Akademie, zu eigentlich wissenschaftlichen Arbeiten wenig kommen können, glaube ich Ihnen gewiß, der ich um irgend etwas zu machen, die ganze volle, ungestört vor mir liegende Zeit bedarf. Ich habe daher meine amtlichen Geschäfte auf 5 Stunden Vorlesungen wöchentlich beschränkt, und diese Muße entschädigt mich hinlänglich für eine sonst ziemlich klägliche Stellung. Es ist keine Frage daß auch Ostr. noch ganz andere Dinge leisten würde, wenn ihn nicht, wie ich höre, mehrere Ämter öfters abhielten.

Und nun bitte ich um Entschuldigung für den zu langen Brief, und danke nochmals für Ihr Schreiben, das dabei übersendete und das versprochne. Behalten Sie ferner in geneigtem Andenken

Ihren ganz gehorsamen Diener

C. G. J. Jacobi.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, Königsberg, den 16. April 1842.

Hochgeehrtester Herr Staatsrath

Euer Hochwohlgeboren bitte ich ganz ergebenst, der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften meinen Dank für die Übersendung ihrer *Memoiren* und der *Savants Etrangers* auszudrücken. Zugleich statte ich Euer Hochwohlgeboren meinen Dank für die Vermittlung dieses kostbaren Geschenkes ab. Mit großer Freude habe ich aus Ihrem Berichte[1]) an die Akademie die Nachricht von Ihrem Funde der 100 Eulerschen Briefe vernommen. Ich hoffe Sie werden uns auch aus Paris die beiden an Lagrange verschaffen. Von den Briefen Joh. Bernoullis steht vielleicht einer in Beziehung zu einem Briefe Eulers an diesen, welcher sich ohne Datum in dem Vol. IV der *Opp. Omnia* v. Johannes Bernoulli abgedruckt findet und welchen ich in dem Verzeichniß Ihres Vaters vermisse. Ich kann Ihnen gar nicht sagen, wie sehr ich mich auf das von Ihnen versprochene Werk freue. Aber für noch wichtiger halte ich daß Sie den Gedanken einer Gesammtausgabe von Eulers Werken wiederaufnehmen. Das Belgische Unternehmen scheint todtgeboren, die Herausgeber unwissende Schulmeister, die nicht wußten, was sie vorhatten; in 2 Jahren sollten die

1) Bull. scientif. publié par l'Acad. de St. Pétersbourg, **9** (**1842**), col. 283—286, Sitzung vom 24. 9./6. 10. 1841.

25 Bände heraussein und bis jetzt sind nur drei Bände erschienen, die alles zu enthalten scheinen was die Herren von EULERschen Schriften verstehen konnten. In Berlin hatte kein Mensch von dem Unternehmen Kunde und ohne Sie würde auch ich nie davon gehört haben. Es scheint mir wirklich daß Sie deshalb Ihren großen Plan nicht aufgeben dürfen. Denken[1]) Sie wie sehr er gerade an Ihre Person geknüpft ist und daß er wohl nie ins Leben tritt wenn es nicht durch Sie geschieht. Ich habe in der letzten Zeit wieder ein anhaltendes Studium aus EULERS *Integralrechnung* gemacht und mich aufs neue gewundert wie frisch sich dieses Werk erhalten hat, während der gleichzeitige D'ALEMBERT ganz unmöglich zu lesen ist. Die EULERschen Beispiele spielen nicht so beiher und erläutern bloß, sie erschöpfen den ganzen Inhalt den die allgemeine Proposition zu der Zeit hat. Der Satz tritt aus seiner absoluten Allgemeinheit heraus, er bekommt einen wirklichen Inhalt, und hierin scheint mir das vorzugsweise Lehrreiche der EULERschen Schriften zu liegen und warum wir immer wieder zu ihnen zurückkehren müssen. Freilich gehörte um uns diese Totalität des Inhaltes eines Satzes geben zu können auch EULERS allumfassende Wissenschaft. Es ist fast eine Entdeckung, zu den EULERschen Beispielen eines hinzufügen zu können.

Ihr Versprechen mir EULERS *Opuscula Analytica* zu schenken ist mir zu wichtig als daß ich Sie davon entbinden könnte.[2]) Wenn Sie doch die Muße finden könnten einmal wieder mit einigen Zeilen zu erfreuen

Euer Hochwohlgeboren

ganz gehorsamen Diener

Kön. d. 16. April 1842. C. G. J. JACOBI.

C. G. J. Jacobi an P. H. v. Fuss, Paris, den 11. August 1842.

Paris d. 11ten August 1842.

Hochgeehrtester Herr Staatsrath

Bei einem neulichen Besuche bei LIBRI[3]), welcher auf das Leidenschaftlichste seltene Msc. und Briefe sammelt zeigte er mir auch eine Sammlung Briefe von EULER an LAGRANGE.[4]) Es sind Copien, welche

1) Von hier bis zum Ende des Absatzes ist dieser Brief nach einem Konzepte vom 14. April 1842 aus dem Nachlaß JACOBIS abgedruckt bei L. KOENIGSBERGER, *C. G. J. JACOBI*, Leipzig 1904, p. 284.

2) JACOBI hat die *Opuscula analytica* zusammen mit der *Corresp.* im Jahre 1843 von FUSS erhalten; siehe *Briefw. JACOBI*, p. 97.

3) Im Sommer 1842 hatte JACOBI zusammen mit BESSEL an der Versammlung englischer Naturforscher in Manchester teilgenommen. Die Rückreise ging über Paris, wo sich JACOBI einige Zeit aufhielt.

4) Diese Briefe EULERS an LAGRANGE sind in den *Op. post.* t. I, p. 555—588 abgedruckt worden. Sie finden sich auch in den *Oeuvres de LAGRANGE*, t. 14, Paris 1892.

Arbogast, als er Conventsmitglied war, genommen hat und wurden nach seinem Tode in Metz wo er starb mit vielen anderen kostbaren Msc. nach dem Gewicht verkauft an einen dortigen Antiquar Levi von dem sie Libri hat[1]). Es sind:

Briefe von Berlin

vom 6. Sept. 1755	lateinisch	27. Oct. 1759	9. Nov. 1762
24. April 1756[2])		1. Januar 1760	16. Febr. 1765
2. October 1759		24. Juni 1760	3. Mai 1766

Diese Briefe sind wie bemerkt im Original alle von Eulers Hand. Die Petersburger sind von fremder, einige von der Hand seines Sohnes Joh. Albert.

Briefe von Petersburg

vom 9. Jan. 1767 a. St.	vom 9./20. März 1770	vom 24. Sept./5. Oct. 1773 Ein Theorem was Euler überschickt und worauf bemerkt ist reçu le 26 Janvier 1775, repondu le 10 Févr. Lagrange.
5./16. Febr. 1768	20./31. Mai 1771	vom 23. März 1775.
16./27. Jan. 1770	5. März 1772. Dieser Brief ist von Lexell.	

Bei mehreren Briefen ist das Datum bemerkt wann Lagrange geantwortet hat. Ich habe die Briefe bei mir zu Hause mit großem Interesse durchgelesen und sie scheinen mir durchaus ächt. Libri ist bereit sie Ihnen für Ihre Ausgabe der Briefe zu überlassen unter der Bedingung wörtlichen Abdrucks. Es findet sich ein interessantes Dokument über Eulers Plan Lagrange mit sich nach Petersburg zu ziehen den er der Kaiserin bereits vorgelegt[3]). Sie mögen nun Gebrauch davon machen wollen oder nicht, so glaube ich daß die Notiz falls Sie sie noch nicht haben Ihnen interessant sein wird. Im ersten Fall würden Sie sich in unmittelbare Correspondenz mit Libri setzen, der auch eine große Menge anderer Sachen z. B. von Daniel Bernoulli hat die Sie interessiren würden. Er hat wie er sagt 50000 Briefe gesammelt. Ich habe auch eine sehr interessante und große Sammlung Briefe von d'Alembert an Lagrange[4]) mir von ihm zum Durchlesen schicken lassen, wo natürlich sehr viel von Euler die Rede ist. Libri würde wenn Sie die Briefe haben wollen später einmal um eine Kopie von Kepplerschen Briefen bitten die sich in St. Petersburg finden sollen.

---

1) Vgl. Bull. de Férussac, t. 1 (1823), p. 494, Journ. des savants 1839, p. 553.

2) Hier fehlt die Angabe eines kurzen Briefes vom 2. Sept. 1756, *Op. post.* t. 1, p. 557.

3) Brief vom 3. Mai 1766, *Oeuvres de Lagrange*, t. 14, p. 209.

4) Diese Briefe sind abgedruckt in den *Oeuvres de Lagrange*, t. 13, Paris 1882, p. 1—377.

Ich schicke Ihnen diesen Brief von Paris, von wo ich den 15. abreise, da es wohl noch 3—4 Wochen dauern wird ehe ich nach Königsberg zurückkehre. Ich habe hier auch erfahren daß das Belgische Unternehmen von der Gesammtausgabe von Euler sich gänzlich zerschlagen hat. Es war bloß eine Speculation um ein Rechenbuch herauszugeben. Grüßen Sie meinen Bruder und sagen Sie ihm daß ich ihm gleich nach meiner Rückkehr eine Reisebeschreibung schicken werde.

Mit der ausgezeichnetsten Hochachtung

Ihr ganz gehorsamer Diener

C. G. J. Jacobi.

Abschrift[1]) des Protokolls der Sitzung der mathematischen Klasse der Königl. Societät der Wissenschaften, zu Berlin am 6. Sept. 1742.

Praes. Herr Professor Euler, Herr Professor Naudé, Herr Director Frisch, Herr Doctor Lieberkühn, Herr Professor Wagner, Herr Professor Grischau.

Neue Fortsetzung der Miscellaneorum. Da seit geraumer Zeit wegen der noch anhaltenden Unpäßlichkeit des Hrn. Directoris Des Vignoles und anderer Hinderungen die Mathematischen Classe sich nicht versammlet, man aber itzo im Stande ist eine neue Fortsetzung der Miscellaneorum drucken zu lassen, indem verschiedene Mitglieder der Societät und sonderlich der anwesende berühmte Professor *Matheseos* Herr Euler, den S. Majestät aus der Petersburgischen Academie anhero berufen, ihren Beytrag theils überreichet theils annoch bald zu überreichen versprochen; so ist dieserwegen die heutige Versammlung veranlasset und zuvörderst den Herrn Euler und Lieberkühn, welche derselben zum ersten Mahl beywohnen, bezeuget worden, wie sehr die ganze Societät sonderlich aber gegenwärtige Mitglieder sich freuen, daß die Herren sich zu der Mathematischen Abtheilung bekennen wollen, und man sich von ihnen alle Hülfe, Rath, Beystand und Freundschaft zur Ehre und zum Besten der Societät gewiß verspreche, welche sie denn auch nach Möglichkeit zu leisten gütig zugesaget. — Hierauf hat

Hrn. Eulers Beytrag. Herr Euler angezeiget, dass seit seiner Ankunft in Berlin er folgende Stücke ausgearbeitet die er den Miscellaneis gewidmet:

1⁰ *Determinatio orbitae cometae qui mense Martis hujus anni 1742 [potissimum] fuit observatus.* [665.]

2⁰ *Theoremata circa reductionem formularum integralium ad quadraturam circuli.* [205.]

---

1) Die Abschrift ist durch Vermittelung von M. H. Jacobi an P. H. v. Fuss gesandt worden, siehe *Briefw. Jacobi*, p. 148.

3⁰ *De Inventione integralium, si post integrationem variabili quantitati determinatus valor tribuatur.* [222.]

4⁰ *De Summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum.* [175.]

5⁰ *De Integratione aequationum differentialium altiorum graduum.* [261.]

6⁰ *De proprietatibus quibusdam sectionum conicarum in infinitas alias lineas curvas competentibus.* [345.]

7⁰ *De resolutione Aequationis* $dy + ayy\,dx = bx^m\,dx$. [268.]

Weil aber die fünf ersten Stücke schon einen großen Raum füllen werden, so ward beliebet die beyden letzten zu einer andern Fortsetzung zu ersparen[1]).

Hrn. Naudés Beytrag. Herr Naudé meldet, daß er vorangezeigete Mathematische Abhandlungen des Herrn Professors Euler gesehen und selbige nicht genugsam anrühmen könne. Seinen Orts hätte er das vorgelegte Stück unterm Titel *Conspectus Trigonoscopii Continuatio cum adjectis curiosis nonnullis problematis [algebraicis]* ausgearbeitet, welches er dem Herrn Euler gezeiget, der es gutgeheißen, und daher itzo zu den Miscellaneis abgegeben wird

---

Dies ist das Protocoll der vorletzten Sitzung, über welche sich in dem Archiv der Akademie etwas findet. Dann kommt eine große Lücke bis zum Jahre 1746, von wo die Protocolle in franz. Sprache geführt sind und von Euler nur kurz bemerkt ist, welche Abhandlung er gelesen. Die große Menge handschriftlicher Aufsätze von Euler, die aber wohl alle gedruckt sind, werde ich nächste Woche genauer durchsehen und dann darüber berichten.

Berlin d. 12. Febr. 47.
C. G. J. Jacobi.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, Berlin, den 24. Oktober 1847.

Berlin d. 24. Oct. 1847.

Hochgeehrtester Freund und Gönner

Die Frage, die Sie einst an mich richteten, ob sich nicht in den Archiven der Berliner Akademie die Originale der Eulerschen Abhandlungen befinden, von denen im 1. Bande ihrer Memoiren seit ihrer Erneuerung unter Friedrich II. nur Auszüge publicirt sind — schon D. Bernoulli hat hierüber in einem Briefe[2]) seine Verwunderung ge-

---

1) Die ersten fünf Stücke sind in der Tat abgedruckt Misc. Berol. **7** (1743), p. 1—242, das sechste Stück aber in französischer Übersetzung in den Mém. de Berlin **1**, année 1745 (1746), p. 53, 71, und das siebente Stück Nov. Comment. Petrop. **9** ad 1762—1763 (1764), p. 154.

2) Hier und an anderen Stellen erwähnt Jacobi sonst nicht bekannte Briefe von Daniel Bernoulli; vgl. auch p. 300, Fußnote 2.

äußert — hat mich veranlaßt, unsere Archive in Bezug auf Eulersche Papiere vollständig und gründlich zu untersuchen, und ich bin so frei das Resultat dieser Arbeit zugleich als ein Zeichen meiner persönlichen Verehrung und zum Andenken und der Wichtigkeit welche ich auf jeden noch so geringfügig scheinenden Umstand, welcher Euler betrifft, lege, Ihnen anbei zu übersenden. Zur Franzosenzeit sind die Archive der Akademie, als diese selbst während 10 Jahren suspendirt war, umhergestreut gewesen, und erst in der jetzigen Zeit sind die Trümmer wieder gesammelt worden. Wie die von mir angefertigte Liste ergiebt befinden sich unter dem Geretteten die lateinischen Originale ziemlich vieler Abhandlungen von Leonhard und J. A. Euler, von denen französische Übersetzungen publicirt sind. Von viel größerem Interesse sind aber Arbeiten Eulers, welche im Msc. eine ganz andere Gestalt haben, als welche er ihnen später gegeben hat, so daß man sieht, daß er keineswegs so wie man glauben möchte die Publication seiner Arbeiten übereilt hat, sondern sie bisweilen lange liegen ließ und mehrfach umarbeitete. Von vorzüglichem Interesse schien mir aber auch aus den alten Protocollen die Liste der Abhandlungen zu entnehmen, die er in den verschiedenen Sitzungen gelesen hat, da dieses das beste Bild seiner Thätigkeit giebt, indem er in der Regel auch die in Ihren Commentarien abzudruckenden unserer Akademie vorgelegt hat. Der Vergleich dieser Liste mit der Ihrigen hat mir viel Vergnügen gemacht. Bei dieser Gelegenheit habe ich auch einen für die Geschichte der Mathematik ungemein wichtigen Tag gefunden, an welchem unsere Akademie Euler auffordert das von Fagnani ihr übersandte Werk zu prüfen, ehe man dem Verfasser antwortet. Aus dieser Prüfung ist die Theorie der elliptischen Functionen entstanden.

Je wichtiger Ihre Liste ist und je häufigeren Gebrauch ich davon gemacht habe, desto mehr kann ich sie nur für die Grundlage einer vollständigern Arbeit halten. Denn sie ist noch nicht so beschaffen, daß man darin die Abhandlungen finden kann, in welchen Euler über einen gegebenen Gegenstand geschrieben hat. Aber die Vervollständigung der Liste müßte nach und nach geschehen; zunächst wohl könnte die billige Forderung erfüllt werden, daß wo man auch nicht ungefähr aus dem Titel die Gegenstände der Abh. errathen, dieselben angedeutet würden, was wenigstens nicht immer geschehen ist[1]). Dies ist besonders dann nöthig, wenn die Abh. in seltenen und wenig zugänglich[en] Werken. So glaubte ich neulich in einer meiner Abh. das vollständige Verzeichniß der Abhandlungen zu geben, in denen Euler die Gleichung

1) Diese Wünsche Jacobis sind bezüglich der arithmetischen Abhandlungen erfüllt worden in dem *Index systématique*, vgl. Anmerkung 2, S. 245.

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots. = 1 - q - q^2 \ldots$$

und ihre Folgerungen behandelt. Wie konnte ich aber denken, daß die Abh. Ihrer Liste *Decouverte d'une loi extraordinaire des nombres* im Journal litteraire d'Allemagne 1751 Janvier et Février (die nach meiner Liste am 22. Juni 47 gelesen ist und von der das lateinische Original vorhanden) denselben Gegenstand und zwar am frühesten behandelt? Ich bemerke noch, daß Abh. 129 *Dem. gem.* etc. unter die Rubrik *Théorie des équations* wohl besser als unter die *Séries* gehört; daß die Branche *combinatorische Analysis* ganz fehlt; endlich daß die Abh. *De la controverse etc. sur les logar.* in Ihrer Liste ausgelassen ist, die im Archiv in gänzlich verschiedner Gestalt im Msc. vorhanden ist. Auch die Abh. im 8. Bande der Comment. „*Curvarum maximi minimive*“ etc. scheint in Ihrer Liste zu fehlen*). Es wäre wohl gut gewesen, wenn Sie aus der übergroßen Classe *Courbes des ordres supérieurs* die ausgeschieden hätten die zur *Theorie des Größten und Kleinsten*, welche Überschrift jetzt ganz fehlt, oder zur Variationsrechnung und diejenigen welche zur Mechanik gehören, so daß die bloß geometrisches Interesse darbietenden zurückgeblieben wären.

Wäre ich stolzer Besitzer der N. Comm., Acta und N. Acta (ich habe nur die alten Comm.), so würde ich mir allmählig in Mußestunden zu meinem Privatgebrauche Ihre Liste in Bezug auf den Inhalt der Abhandlungen vervollständigen.

Ich habe mit großem Interesse vernommen daß der Druck des ersten Bandes der *Arithmetica* bald vollendet ist. Ich bin sehr neugierig, welchen Plan Sie in Bezug auf die Anordnung angenommen haben. Aber ich beschwöre Sie, wenn es nicht schon geschehen ist, die Abh. 321—27, welche sich unglücklicher Weise unter Geometrie verirrt haben, mit aufzunehmen, welche durchaus zu den Diophantischen Problemen gehören[1]). Denn diese zusammen zu haben, ist eine wesentliche Annehmlichkeit.

Ich muß noch ausdrücklich bemerken, daß in dem hier beifolgenden *paper* ich nur diejenigen handschriftlich noch vorhandenen [Abhandlungen] hervorgehoben habe, bei welchen etwas von besonderem Interesse zu bemerken war. Von vielen anderen unverändert abgedruckten sind in den angegebenen Convoluten die Msc., die bisweilen im Titel eine interessante Variation geben So ist in der Abh. 385 „*Methodus inveniendi curvas isoperimetricas communi proprietate praeditas*“ vor *communi* im Msc. das Wort *aliave* eingeschoben.

*) {Nein, sie steht darin, aber am unrechten Orte pg. XVII oben. [196.]}

1) Die sechs Abhandlungen (Nr. 324 ist mit 321 identisch) sind in der Tat in die *Comm. ar.* aufgenommen worden; in dem *Index systématique* haben sie die Nummern 72, 74, 70, 73, 81, 75.

Ich hatte Ihnen mit Hrn. v. Struve einen Zettel mitgetheilt über eine ungeheure Correspondenz, welche das tägliche Privatleben Ihres mütterlichen Großvaters betrifft, welches den von aller Arbeit am weitesten entfernten und im Zerstreuungswirbel untergehenden, aber sehr wohlwollenden und besonders streng kirchlichen Gelehrten zeigt. Von seinem Vater nur, daß er bei ihm zu Abend gegessen. Er muß sehr liebenswürdig gewesen sein. Vielleicht kommt es später interessanter, denn ich habe mich erst durch etwa den vierten Theil hindurchgearbeitet. Er schreibt einmal, seine Frau sei vergangne Woche zweimal ausgewesen und er drei Tage zu Hause geblieben, und man habe sich gestritten, was merkwürdiger sei[1]).

Ein besonderes Verdienst Ihrer Liste ist noch, daß Sie bei den Schriften der Petersb. Ak. das Jahr in welchem die Abhh. präsentirt wurden dem Jahre, in welchem der Band gedruckt erschien substituirt haben. Dadurch, daß Ihr Vater immer nur das letztere Jahr angegeben, hat er seiner Liste die Hälfte ihrer Brauchbarkeit genommen.

Leben Sie wohl und lassen Sie mir einmal ein Zeichen Ihres Andenkens zukommen. Verzeihen Sie diesen flüchtig geschriebenen Brief.

Ihr treu ergebener

C. G. J. Jacobi.

[Beilage.]

I. Aus dem Jahre 1747 hat sich ein Band erhalten, welcher die Copien der in diesem Jahre gelesenen Abhandlungen enthält. Von den für den Druck in's Französische übersetzten Abh. hat man hier das Original. Das Gleiche gilt für II und III. Hervorzuheben sind:

Eine ungedruckte Abh. von Walz (gel. d. 9. Febr.): *Solutions de quelques problèmes qui ont rapport à la rectification des courbes.*

NB. Aus einem Briefe von J. A. Euler an Formey sehe ich, daß Walz jung in Dresden gestorben ist; er beklagt ihn sehr wegen seines Talents und seiner persönlichen Eigenschaften.

1. Die Abh. von Euler *De numeris amicabilibus.* Sie ist gänzlich von derjenigen verschieden, die in *Opp. V. A.* abgedruckt ist. Sie bietet ein schönes Beispiel, wie E. seine Abh. oft umgearbeitet hat, ehe er sie

1) Über das „Tagebuch" Joh. Alb. Eulers schreibt Jacobi am 11. Juni 1847 an seinen Bruder Moritz (*Briefw. Jacobi*, p. 153): „Ich habe Fuss sehr viel Euleriana zu schreiben, komme aber zu nichts. Ich kann ihm sagen, wo sein Großvater mütterlicher Seite jeden Tag in Petersburg gegessen hat, und kann in alle seine Familiengeheimnisse dringen. Denn J. A. Euler hat seinem Onkel Formey ein regelmäßiges Tagebuch geschrieben, welches jetzt die Formeyschen Erben der hiesigen Königlichen Bibliothek geschenkt haben, von der ich die Briefe bei mir habe, sie aber noch nicht habe durchstudiren können."

zum Druck bestimmt. Eine dem Msc. angehängte Tafel, wo die Factoren von $1 + p^n$ angegeben sind, wenn p eine Primzahl ist, findet sich auch im Text der gedruckten Abh. Krafft hatte nicht unlängst eine Abh. über diesen Gegenstand der Ak. eingesandt, die vielleicht die Beschäftigung Eulers mit demselben veranlaßt hat.

2. Die am 7. Sept. gelesene Abh.: *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* ist hernach im **5**. Bande der B. M. *in einer gänzlich verschiedenen Redaction* erschienen, sodaß sie als eine besondere Abh. angesehen werden kann. Sie scheint in der systematischen Liste zu fehlen.

II. Enthält aus dem Jahre 1748 die in den Sitzungen gelesenen Abhandlungen.

3. Das *lateinische Original* der im **4**. B. der B. M. abgedruckten Abh. *sur la vibration des cordes.* (Die am 12. Sept. gelesene *Réflexions etc. über die letzte Sonnenfinsterniß* befindet sich nicht in dem Volumen.) {Wahrscheinlich ist sie französisch concipirt.}

4. Das *lateinische Original* der im **4**. B. der B. M. gedruckten Abh.: *Sur l'atmosphère de la Lune etc.* (gel. den 5. Dezember).

III. Ein dicker Folioband von in der B. Ak. zu sehr verschiedenen Zeiten gelesenen Abh., die an verschiedenen Orten gedruckt sind.

5. *Recherches pour servir à la perfection des lunettes,* gel. den 25. Juni 1755. Diese Abh. scheint nicht gedruckt zu sein, ist aber vielleicht eine Vorarbeit zu der im **13**. B. der B. A. gedruckten. Sie enthält *fünf* Sectionen; die erste giebt die allgemeinen Formeln, die 2[te] bis 5[te] respective die auf 2, 3, 4, 5 Gläser bezüglichen Untersuchungen.

6. *De motu fluidorum in genere,* gel. den 31. Aug. 1752; ob dieselbe wie die Abh. *Principia motus fluidorum* im **6**. Bande der N. C. v. J. 1761 habe ich nicht vergleichen können, da ich den Band nicht bei der Hand hatte; diese letztere wird in der Abh. *Principes généraux du mouvement des fluides* citirt, die den 4. Sept. und 2. Oct. 1755 gel. und im **11**. B. der B. M. gedruckt ist.

7. *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum.* In dieser Abh., welche den 17. Juli 1751 gelesen ist, kann Euler, wie er sagt, noch nicht beweisen, daß jede Primzahl von der Form $4n + 1$ die Summe zweier Quadrate ist. Der Beweis hiervon beginnt die Abh. *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum primum formae* $4n + 1$ *esse summam duorum quadratorum,* die im **5**. B. der N. C. v. J. 1761 gedruckt ist. Diese Abh. findet sich ebenfalls im Msc., aber auf den Gegenstand, den der Titel angiebt, beschränkt und ohne die angehängte Abh. über die qu. Reste und die Zerfällung in 4 Quadrate. Da sie mit den Worten

beginnt: daß der Vf. in der *neulich* gelesenen Abh. den Beweis noch nicht habe finden können, so ist sie wahrscheinlich eine den 9 Sept. 1751 gelesene Abh., die bloß als *sur un problème d'Arithmétique* in den Protocollen bezeichnet ist[1]). Aus diesen beiden am 17 Juli und 9 Sept. 1751 gelesenen, im Msc. noch vorhandenen Abh. ist die Abh. im 5. B. der Novi Comm. v. J. 1761 entstanden. In dem Auszug vorn im Bande der Geschichte der Akad. steht, daß S. 13 der Abh. eine neue ohne besonderen Titel angefügt sei; diese ist die Abh. *D. th. F. o. n. sive i. sive fr.* etc., aus welcher nur das auf jenen noch fehlenden Beweis bezügliche fortgelassen ist. Sie ist die Hauptabh. über die Elemente der quadratischen Reste, und enthält den Satz, wie *das Product zweier Summen von vier Quadraten wieder diese Form hat.*

8. *De Draconibus volantibus,* Abh. v. Euler Sohn, die er den 16. Dec. 1757 [p. 265: 4. Nov. 1756] gelesen. Sie ist von einer Abh. des Vaters der Form und dem Stil nach nicht zu unterscheiden. Die franz. Uebers. ist in den B. M. abgedruckt: *Sur le cerf volant* v. J. 1756.

IV. Ein Convolut Msc. in 4, welche sämmtliche in den B. M. v. 1759—61 (B. 15, 16, 17) abgedruckten Abh. von Euler Vater und Sohn, von ihrer eigenen Hand geschrieben, enthält. Es sind die Msc., von denen der Abdruck geschehen, wie aus den Rothstiftzeichen des Druckers erhellt.

V. Eine Abh. v. d'Alembert Msc.:

Observations sur deux Mémoires de Mr. Euler et Daniel Bernoulli, inserés dans les Mémoires de 1753. (Die 4 Figuren, auf die Beziehung genommen wird, fehlen.) Auf diese in den B. Mém. nicht gedruckte Abh. bezieht sich der folgende in den B. M. T. XI. S. 401 gedruckte

Extrait d'une lettre de M. d'Alembert à M. Formey du 4 Fevr. 1757. J'ai eu l'honneur d'envoyer à l'A. une réponse aux deux Mém. de Ms. Bernoulli et Euler, imprimés dans le volume d. 1753. M. Euler a bien voulu me communiquer *en manuscrit* la réplique qu'il y a faite quant à ce qui le regarde; mais bien loin que cette réplique m'ait convaincu, elle m'a fourni, j'ose le dire, de nouvelles preuves de mon sentiment. Cependant, Monsieur, comme M. Euler parait désirer que cette controverse n'aille pas plus loin dans vos Mémoires, je consens volontiers que ma réponse ne paraisse pas dans ce Volume, auquel elle était destinée, sauf à publier ailleurs, si je le juge à propos, les remarques importantes que je crois avoir faites sur cette matière. Je suis etc.

---

1) Diesen ganzen Absatz hat Jacobi später in wesentlichen Punkten berichtigt; lies ferner statt „17. Juli 1751": „17. Juni 1751"; s. S. 262, 289, 291, 293.

Die Ak. erklärt hierauf, die Nichtaufnahme der d'Alembertschen Abh. in ihre Mem. sei nicht auf den Privatwunsch Eulers geschehen, sondern weil sie aus ihren Schriften alle Gegenstände des Streites entfernen wolle (tous les sujets de controverse!!); sie würde übrigens gern sehen, wenn Hr. d'Alembert seine Abh. auf anderem Wege publicirte, da sie nicht zweifele, daß diese Disciplin viel zum Fortschritt der Wissenschaft beitragen würde (!).

Die Abh. von d'Alembert ist nicht gedruckt worden, aber bei einer Abh. im 1. Theil der *Opusc.* benutzt.

VI. Ein Convolut handschriftlicher Abh. der verschiedensten Autoren. Es sind eigenhändige Msc.

Das *lat. Original* der in den B. M. v. J. 1761 gedruckten Abh. von J. A. Euler: *Disqu. de lentibus objectivis* etc. zugleich mit der fr. Uebers.

Die 3 von Euler im 21. Bande (1765) publ. Abh.; mit den Druckerzeichen. (Wahrscheinlich ist hier auch das Originalmsc. von einer Abh. v. Lagrange über die Tautochronen, d. 4. März 1763 gel.)

VII. Zwei eigenhändige Gutachten von Euler.

1) über eine Quadratur des Kreises eines Hr. Pöschel, v. 21 Dec. 1754, eine Seite; 2) ein sehr großes von 7 Seiten über eine Abh. von Gerdil mit Experimenten an der Luftpumpe und mit Capillarröhrchen; er bestreitet die Adhäsion. Euler nimmt Partei dafür, die Attraction durch einen zusammendrückenden Aether zu erklären.

Ein drittes Gutachten über Spiegelteleskope, die ein Père la Borde vorgeschlagen, besitzt die Königliche Bibliothek. Es scheint aber nach den Protocollen der Ak. von Castillon verfaßt zu sein, obgleich es Eulers Unterschrift trägt, was dadurch erklärt werden kann, daß es von ihm als Director dem la Borde im Namen der Akademie mitgetheilt wurde, wobei das Mitglied, welches im Auftrage der Ak. das Gutachten abgefaßt hat, nicht angegeben wird.

Abhandlungen, die Euler vom Jahre 1746 an in der Berliner Akademie d. W. gelesen hat.

1746.

23. Juni. *De trajectoriis reciprocis* {389}.
6. Juli. *De machinis in genere* {556}.
22. Sept. *De promotione simplici* {N. B.}.
27. Oct. *De seriebus divergentibus* {125}.
10. Nov. *Theoremata de radicibus aequationum imaginariis* {108}.

1747.

12. Jan. *Demonstratio gemina th. Neut. in quo traditur relatio inter coeff. cuiusvis aequ. alg. et summas pot. radd. eiusdem* {129}.

23. Febr. *De numeris amicabilibus* {2}.
23. März. *Theoremata circa divisores numerorum* {7}.
8. Juni. *Recherches sur les mouvements des corps célestes en général* {605}.
22. Juni. *Découverte d'une propriété extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs* {ist das Nr. 3 meiner Liste?}.
20. Juli. *De reductione linearum curvarum ad arcus circulares* {414}.
7. Sept. *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* {NB befindet sich in Mém. de Berlin V. 1749 und fehlt in meiner Liste.}[1])
21. Sept. *Méthode de trouver les vrais moments tant des nouvelles que des pleines lunes* {650}.
12. Oct. *Sur une contradiction apparente dans la théorie des lignes courbes* {344}.
26. Oct. *Sur le point de rebroussement de seconde espèce de Mr. le M. de l'Hospital* {428}.
23. Nov. *Sur la force des rames* {600}.
6. Dec. *Sur la parallaxe de la Lune etc.* {647}.

1748.

18. Jan. *Suite d'un mém. préc.: sur le nombre des points où deux lignes d'ordre quelconque peuvent se couper* {343}.
1. Febr. *Réflexions sur l'espace et le tems* {746}.
16. Mai. *De vibratione cordarum* {520}.
4. Juni. *Sur la friction des corps solides* {549}.
12. Sept. *Réflexion sur la dernière eclipse de soleil arrivée le 25 Juillet 1748* {670}.
27. Sept. *Sur la perfection des verres objectifs des lunettes* {714}.
24. Oct. M. Euler a communiqué diverses relations des eclipses de cette année qui ont été envoyées par MM. Marinoni, Pohlack, Weidler, Bose etc. Après quoi il a lu un mémoire de sa façon *Sur l'accord des deux dernières eclipses avec son calcul* {651}.
5. Dec. *De atmosphaera lunae ex eclipsi solis evicta* {648}.
19. Dec. *Recherches de maximis et minimis dans les actions des forces* {534}.

1749.

6. Febr. *Réflexions sur quelques lois générales de la nature qui s'observent dans les effets des forces quelconques* {533}.
20. Febr. *Sur la diminution de la résistance du frottement* {550}.
20. März. *De numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum* {59}.
17. April. *Sur l'inégalité du mouvement des planètes* {NB}.
5. Juni. *Sur la véritable cause du mouvement progressif des aphélies des planètes* {NB}.

---

1) „Ist da, unter Nr. 189“, sagt Fuss in dem S. 276, Anm. 1 erwähnten Handexemplare.

19. Juni. *Consideratio quarundam serierum quae singularibus proprietatibus sunt praeditae* {156}.

28. Aug. *Conjectura physica de propagatione soni et luminis* {502}.

11. Sept. *Animadversiones in rectificationem ellipsis* {355}

23. Oct. *Sur le mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite* {574}.

20. Nov. *Discussion plus particulière des diverses manières d'élever l'eau* {583}. [Vgl. dazu: 1751, 18. Nov.]

4. Dec. *De perturbatione motus planetarum ab eorum figura [non] sphaerica oriunda* {619}.

1750.

5. Febr. *Maximes pour arranger le plus avantageusement les machines destinées à élever l'eau par le moyen des pompes* {584}.

5. März. *Recherches sur la précession des équinoxes* {677}.

19. März. *Emendatio laternae magicae ac microscopii solaris* {727}.

3. Sept. *Découverte d'un nouveau principe de mécanique* {444}.

1. Oct. *Réflexions sur les forces en général* {NB}.

15. Oct. *De numeris qui sunt aggregata duorum quadratorum* (s. 20. März 1749) {59, wohl identisch mit jener}. [S. jedoch p. 293 ad 2.]

12. Nov. *De motu corporum coelestium a viribus quibuscunque perturbato* {608}.

26. Nov. *Elementa doctrinae solidorum* {318}.

1751.

7. Jan. *De methodo Diophanteae analoga in analysi infinitorum* {80}.

14. Jan. *Sur le problème isopérimétrique* {NB}. [S. p. 293 ad 4.]

4. März. *Réflexions sur les divers degrés de lumière du soleil et des autres corps célestes* {673}.

22. April. *Theoria motus lunae* {639}.

6. Mai. *Recherches sur le mouvement des rivières* {571}.

17. Juni. *Demonstratio theorematis Fermatiani, omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum* {NB fehlt unter diesem Titel}. [S. jedoch p. 294 ad 17.]

9. Sept. M. Euler a lu 2 mémoires dont le premier concernait *un théorème d'arithmétique*, et le second *un théorème de Stéréométrie* {NB}. [S. p. 294 ad 16 und für die 2. Abh. ad 14.]

7. Oct. Beginn der Verh. über Koenig.

21. Oct. *De cochlea Archimedea* {581}.

18. Nov. *Réflexions sur la machine de M. Mayer pour élever l'eau* {NB Vielleicht No. 583}.

2. Dec. *Tentamen theoriae de frictione fluidorum* {575}.

23. Dec. M. le Président présente un ouvrage de géométrie en italien en 2 volumes in 4°, que M. le Marquis DE FAGNANO son Auteur envoie à l'Académie. M. EULER prendra la peine de l'examiner, avant qu'on fasse réponse. (Von dieser Zeit an datiren die durch dieses Werk hervorgerufenen Arbeiten EULERS über die Addition der elliptischen Integrale.)

Großer Brief von KOENIG an MAUPERTUIS.

1752.

27. Jan. *Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium.* Die Frucht der Lectüre des Werkes von FAGNANO; das Fundamentaltheorem über die Addition der Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ {423}.

10. Febr. *Nouvelle méthode pour éliminer les inconnues des équations* {106}.

9. März. *Subsidium doctrinae sinuum* {329}.

23. März. *De aptissima rotarum dentibus figura tribuenda* {560}.

13. April liest EULER seinen *lateinischen* Bericht, worin er beweist, daß die von KOENIG als aus einem LEIBNITZschen Briefe citirte Stelle an sich verdächtig sei, und durch die Umstände ihm Falschheit offenbar werde. Der Curator der Ak., Hr. v. KEITH, sammelt einzeln die Stimmen, und die anwesenden Mitglieder fällen einstimmig ihr berüchtigtes Urtheil, worin sie den Conclusionen, die EULER am Schlusse seines Berichtes zieht, beipflichten. Diese Spiegelfechterei — denn von allen Mitgliedern war EULER der einzige, der ein Urtheil über die Sache haben konnte — verwickelte die Akademie in einen Privatstreit ihres Präsidenten, den EULER nur dadurch vertheidigen konnte, daß er durch ein Quiproquo eine große Entdeckung, die er selbst gemacht, dem Wischiwaschi von MAUPERTUIS substituirte. Der große blame, den in ganz Europa diese Sache erhielt, hatte die gute Folge, daß das unwürdige Abhängigkeitsverhältniß, in dem die Ak. von MAUPERTUIS stand, der nach einer Cabinetsordre vom 12. Mai 1746 ganz allein dem König die Vorschläge über die Gehalte der Akademiker zu machen hatte, mit dessen bald erfolgtem Tode erlosch, da der König sich scheute, einen neuen Präsidenten zu ernennen {449}.

22. Juni. *Sur la réfraction de la lumière* {= 691?}.

6. Juli. KOENIG schickt der Ak. das Diplom als Correspondent zurück, was sie sehr übel nimmt.

20. Juli. *Recherches sur la véritable courbe que décrivent des corps jetés dans l'air ou dans un fluide quelconque* {390}.

31. August. *De motu fluidorum in genere* {564? oder 566?}.

28. Sept. *Sur l'application de la machine hydraulique de M. Segner* {579}. Der Artillerielieutenant Jacobi wird zum Mitglied (associé ordinaire) erwählt.

12. Oct. *De formulis differentialibus* {NB}.

21. Dec. *Examen dissertationis Cl. Prof. Koenig Actis Erud. Lips. insertae pro mense Maio 1751* {447. 448}.

21. Dec. überreicht Euler die *Théorie de la lune* von Clairaut.

1753.

18. Jan. *Principes de trigonométrie sphérique, tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* {332}.

22. Febr. *Sur le principe de la moindre action* {446}.

8. März. *Calcul des probabilités dans les jeux de hazard* {299?}.

12. April. *Exposition physique de la cause des couleurs des feuilles très minces* {= 698?}.

3. Mai. *Resolutio aequationum cuiusvis generis* {114}.

21. Juni *Specimen novae methodi quadraturas curvarum inveniendi* {= 424?}.

5. Juli *De problematis indeterminatis quae videntur plus quam determinata* {55}.

13. Sept. *Théorie plus complette des machines qui agissent par la réaction de l'eau* {580}.

11. Oct. *Principes généraux de l'état de l'équilibre d'un fluide* {562}.

22. Nov. *Specimen de usu observationum in mathesi pura* {4}.

1754.

17. Jan. *Sur les scies* {582}.

31. Jan. *De numeris* {NB das ist doch zu wenig bezeichnend}.

25. April. Un mémoire relatif aux deux pieces de D. Bernoulli lues le 28 Févr. et le 14 Mars: *Sur les vibrations des cordes tendues et sur le mélange de plusieurs espèces de vibrations simples isochrones* {521}.

9. Mai. *Solutio generalis quorundam problematum Diophanteorum* etc {73}.

22. Aug. *Examen de la controverse sur la loi de la réfraction des rayons de diverses couleurs* {695}.

11. Sept. *Élémens de la trigonométrie sphérique tirés de la méthode des plus grands et des plus petits* {soll wohl heißen *sphéroidique* 336}.

31. Oct. *Exposition de quelques paradoxes dans le calcul intégral* {278}.

15. Nov. *Réflexions sur un problème de géométrie traité par quelques géomètres et qui est néansmoins impossible* {362}.

Un mémoire allemand sur le projet que M. l'architecte BUCHTE a proposé pour la perfection des moulins {NB}.

12. Dec. *Recherches physiques sur la diverse refrangibilité des rayons de lumière* {692}.

1755.

9. Jan. *Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi* {352}.

13. Febr. *Theoremata circa residua ex divisione potestatum relicta* {8}.

Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Erud. Lips. propositorum {348}.

27. Febr. *Sur l'avantage du banquier au jeu de pharaon* {298}.

Solutio problematis de tribus numeris etc. {61?}.

24. Apr. *Sur la variation de la latitude des étoiles et l'obliquité de l'eclipse* {672}.

12. Juni. *De integratione aequationum integralium* {254 NB}.

26. Juni. *Recherches pour servir à la perfection des lunettes* {713?}.

4. Sept. *Principes géneraux du mouvement des fluides* } {564 [und 565]}.
2. Oct. *Continuation* }

10. April. M. EULER fils: *de tempore descensus corporis, ad centrum virium in ratione reciproca distantiarum attracti.*

20. Aug. } 27. Nov. } „ „ *theoria inclinationis acus magneticae experimentis confirmata.*

1756.

15. Jan. *Recherches plus exactes sur l'effet des moulins à vent* {586}.

26. Febr. *Principia theoriae machinarum* {558}.

8. Apr. *Dilucidationes circa resistentiam fluidorum* {576}.

1. Juli. *Règles générales pour la construction des microscopes et des télescopes* {720 oder 722?}.

15. Juli. *Recherches sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets renversés* {706}.

9. Sept. *Analytica explicatio methodi maximorum et minimorum* {197}.

16. Sept. *Elementa calculi variationum* {289}.

21. Oct. *De integratione aequationum differentialium* {254?}.

16. Dec. *De aequationibus differentialibus secundi gradus* {257}.

4. Nov. M. EULER fils: *De draconibus volantibus.*

1757.

17. Febr. Erklärung der Ak., warum sie zwei Abh. von D'ALEMBERT nicht aufgenommen. Sie wollen keine Streitschriften! Aber die EULERschen gegen KOENIG!?

23. Juni. M. EULER a communiqué à l'Ac. un écrit envoyé par M. le Marquis DE FAGNANO. C'est un mémoire italien de Géométrie.

25. Juni. *Expériences pour déterminer la réfraction de toutes espèces de liqueurs transparentes* {697}.

21. Juli. *Specimen algorithmi singularis* {92}.
1. Sept. *Sur la force des colonnes* {588}.
29. Sept. *Recherches sur l'inclinaison de l'aiguille aimantée* {740? da steht aber *la déclinaison!* [S. jedoch p. 288.] Vgl. 1765 Nov. 7}.
24. Nov. *De modo quo lentes in catinis poliuntur* {699}.
17. Febr. J. A. Euler *Problema: data altitudine coni determinare figuram basis ut conus inter omnes alios eiusdem superficiei maximam habeat soliditatem!*
10. Mai. *De motu plani a vento abrepti.*
13. Oct. / 10. Nov. } Euler fils: *sur la cause physique de l'électricité.*

1758.

12. Jan. *Sur le mouvement diurne des planètes* {618}.
2. Febr. *Sur la plus avantageuse construction des lunettes à trois verres qui représentent les objets debout* {708}.
2. März. *Solution d'une question curieuse qui ne parait soumise à aucune analyse* {84}.
16. März. *Recherches sur la transformation des formules intégrales* {NB}.
27. April. *Recherches sur l'effet du frottement dans l'équilibre* {551}.
8. Juni. *Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata* {27}.
6. Juli. *Recherches sur la connaissance* (construction!) *mécanique des corps* {440}.
20. Juli. *Annotationes in locum quendam Cartesii ad circuli quadraturam spectantem* {315}.
Sur l'avantage du banquier au jeu de Pharaon {298 s. oben 1755 Febr. 27}.
21. Sept. *De resolutione formularum quadraticarum indeterminatarum per numeros integros* {62}.
Sur la perfection des lunettes astronomiques qui représentent les objets renversés {707}.
9. Nov. *Constructio aequationis differentio-differentialis* {276}.
Du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un axe variable {477}. [478, s. p. 294 ad 20 und p. 289, Z. 7 v. u.]
23. Nov. *De progressionibus arcuum circularum quorum tangentes secundum certam legem procedunt* {147}.
Recherches des forces dont les corps sont sollicités, entant qu'ils ne sont pas sphériques {NB}. [Als Abh. J. A. Eulers gedruckt, s. p. 303 und p. 272: 1765. 7. Nov.]
5. Oct. / 21. Dec. } M. Euler fils: *Recherches des mouvements d'un globe sur un plan horizontal.*

1759.

18. Jan. *Recherches sur le mouvement de rotation des corps célestes* {606}.
22. Febr. *Réflexions sur le mouvement de libration de la lune* {NB}.

8. März. *Investigatio functionum ex data differentialium conditione* {279}·
Détermination de la figure de la terre par les observations de la lune {NB}·
5. April. *De motu corporis ad duo centra virium attracti* {538}·
3. Mai. *Sur les lunettes à trois verres qui représentent les objets debout* {708 s. oben 1758 Febr. 2}·
5. Juli. *Cogitationes de aggeribus construendis* {592}·
30. August wird Maupertuis Tod angezeigt, mit einem Brief seiner Frau und Johann Bernoullis, bei dem er starb; auch wird ein Brief von de la Grange Taurinus (wie er immer geschrieben wird) an den verstorbenen Maupertuis mitgetheilt.
20. Sept. *Du mouvement des apsides des satellites de Jupiter* {656}·
4. Oct. *De reductione formularum integralium ad rectificationem ellipseos et hyperbolae* {207}·
1. Nov. *Sur la propagation du son* {503}·
15. Nov. *De motu vibratorio fili flexilis corpusculis onerati* {523}·
13. Dec. *Supplément aux recherches sur la propagation du son* {504 [und 505]}·
19. Juli. Euler fils: *Recherches sur le dérangement du mouvement d'une planète par l'action d'une autre planète ou comète.*

1760.

21. Febr. *De motu vibratorio chordarum inaequaliter crassarum* {516}·
10. Juli. *Conjectures sur la raison de quelques dissonances généralement reçues dans la musique* {530}·
8. Sept. M. Euler a lu un petit discours latin à l'occasion de la mort de M. le Conseiller privé et directeur Eller {NB}·
25. Sept. *Tentamen de sono campanarum* {528}·

Il a été résolu de demander à S. M.

pour M. Süssmilch ℔ 150
pour M. Meckel ℔ 200
pour M. Euler ℔ 200

en qualité d'astronome[1]). M. le Marquis d'Argens présentera ces demandes à S. M. lorsqu'il sera appellé auprès d'Elle.

20. Nov. } 4. Dec. } M. Euler fils: *Sur le mouvement d'un globe sur un plan horizontal.*

1761.

8. Jan. Le Secrétaire a lu la lettre qu'il a reçue de la part de M. le Marquis d'Argens.

Monsieur

Je me suis acquitté de toutes les commissions dont l'Académie m'avait fait l'honneur de me charger. S. M.

1) Vermutlich ist hier Joh. Alb. Euler gemeint, dem der König die Anstellung als Astronom versprochen hatte.

le Roi m'a dit qu'il n'avait pas répondu à la lettre que je lui avais écrite par ordre de Mss. les Académiciens, puisqu'il n'avait point reçu cette lettre; mais qu'il était d'ailleurs très content qu'on se fut conformé à ses ordonnances, qu'il connaissait la réputation de M. Marggraff, qu'il en approuvait le choix, et qu'il devait jouir de tous les privilèges, droits, pensions, attachés à son emploi de Directeur.

Quant aux autres commissions dont j'étais chargé, S. M. m'a fait l'honneur de me dire, que voulant à la paix prendre Elle-même un soin tout particulier de l'Académie, réformer les abus qui s'y sont introduits, et donner à ce corps une nouvelle vigueur, Elle ne jugeait pas à propos de disposer pour le présent d'aucune pension de quelque sorte qu'elle soit. La volonté du Roi est de laisser pour le présent les choses dans l'état où elles sont, les grandes affaires dont il est occupé ne lui permettant pas de s'occuper de celles de l'Académie, *qu'il réglera à la satisfaction de tous les académiciens dès que la guerre sera finie.*

J'aurai l'honneur de Vous dire, Monsieur, que S. M. a paru étonné de ce que nous trouvons tant de difficultés pour imprimer nos Mémoires. Elle exhorte les membres des quatre différentes Classes à travailler avec assiduité, et à donner par la diversité des Ouvrages et des matières une nouvelle vie à ces Mémoires, que quelques unes des Classes paraissent avoir trop negligés, quoique ça ne soit pas la faute des Académiciens qui composent ces Classes, mais celle de quelques abus, que le Roi se propose de réformer à la Paix.

Je Vous prie, M., de vouloir lire ma Lettre dans la première Assemblée de Mss. les Académiciens pour qu'ils voient que je me suis acquitté avec le plus grand zèle des commissions dont ils m'ont fait l'honneur de me charger. Je suis avec une respectueuse considération, Monsieur,

Votre très humble et très obéissant serviteur

à Leipzic
ce 25 Dec. 1760

Le Marquis d'Argens.

22. Jan. *De motu vibratorio tympanorum* {527}.

12. Febr. *Demonstratio theorematis Bernoulliani, quod ex evolutione cuius-*

cunque curvae rectangulae (?) *in infinitum continuatae tandem cycloides nascantur* {366}·

12. März. *Constructio lentium objectivarum ex duplici vitro* {701}·

18. Juli. M. Euler a lu la réponse qu'il a écrite à M. Bonnet au sujet de son *essai analytique sur l'âme* {NB}·

3. Sept. *De insigni promotione methodi tangentium inversae* {410}·

15. Oct. *Considérations des difficultés qu'on rencontre dans les verres objectifs délivrés de toute confusion* {704}·

12. Nov. *De telescopiis quatuor lentibus instructis quibus objecta situ erecto repraesentantur eorumque perfectione* {721}·

26. Nov. *Recherches sur les microscopes simples et les moyens de les perfectionner* {725}·

9. April. Euler fils: *Disquisitio de lentibus objectivis ex aqua et vitro parandis.*

18. Juni. „ „ *Pensées sur la nature du milieu dans lequel les planètes se meuvent.*

1. Oct. Euler fils: *Expériences sur la quantité de réfraction des fluides.*

1762.

4. Jan. *Recherches sur les microscopes à trois verres et sur les moyens de les perfectionner* {726}·

25. Febr. *Recherches sur les télescopes à réflexion et sur les moyens de les perfectionner* {730}·

22. April. *Considerationes de motu corporum coelestium* {607}·

24. Juni. *Sur les moyens de procurer aux télescopes à reflexion un plus grand champ. Recherches sur une autre construction des télescopes à réflexion* {731}·

8. Juli. *Nouvelle méthode de déterminer les dérangements dans les Corps Célestes causés par leur action mutuelle* {611}·

2. Sept. *Sur la confusion que cause dans les instruments de Dioptrique la diverse réfrangibilité des rayons* {705}·

16. Sept. *Considérations sur les nouvelles lunettes d'Angleterre de M. Dollond et sur le principe qui en est le fondement* {709}·

14. Oct. *Supplementum de figura dentium rotarum* {561}·

28. Oct. *Un corps étant attiré en raison réciproque quarrée des distances vers deux points fixes donnés, trouver les cas où la courbe décrite par ce corps sera algébrique* {537}·

25. Nov. *Disquisitiones de vera lege refractionis radiorum diversicolorum* {694}·

9. Dec. *De usu functionum discontinuarum in analysi* {169}

6. Mai. Euler fils: *Von dem Verhältniß der Kräfte, welche auf den Mond wirken, zu seiner mittleren Bewegung, wie auch seiner mittleren Entfernung von der Erde.*

7. Dec. M. Euler fils présente à l'Ac. une Dissertation *sur la résistance de l'éther* qu'il a fait imprimer.

1763.

20. Jan. *De phaenomenis Coeli per segmenta sphaerica diaphana spectati* {711}.

10. März. *Réflexions sur une espèce singulière de Lotterie nommée Lotterie Génoise* {N B davon besitze ich das Original}.

24. März. *Investigatio accuratior phaenomenorum motus diurni terrae etc.* {629}.

5. Mai. *De telescopiis quatuor lentibus instructis eorumque perfectione* {721 s. 1761 Nov. 12}

31. Mai. Bericht von Euler über eine Preisabhandlung über das Gehör {N B}.

14. Juli. Un mémoire latin: *sur le mouvement d'un corps attiré vers deux centres qu'on suppose fixes* {539}.

8. Sept. *Recherches sur la courbure des surfaces* {433}.

22. Sept. *Proprietates triangulorum quorum anguli inter se certam teneant rationem* {305}.

20. Oct. *Recherches sur la construction des Lunettes à cinq ou six verres et sur leur perfection ultérieure* {710}.

1. Dec. *De aequilibrio et motu corporum flexuris elasticis junctorum* {461}.

15. Dec. *Réflexions sur les différentes manières dont on peut représenter le mouvement de la Lune* {644}.

Den 31. Dec. 1763 zeigt auf des Königs Befehl die Akademie vor einer sehr glänzenden Versammlung dem türkischen Internuntius Achmed Effendi ihre Künste; er wird unten am Wagen von Euler etc. empfangen. Marggraff zeigt Chemie, Meckel und Sulzer Physik, besonders die Luftpumpe, Euler Sohn Electricität, Gleditsch Naturaliencabinet.

10. Febr. Euler fils: *Réflexions sur un problème qu'on trouve dans l'Astronomie nautique de M. Maupertuis.*

30. Juni. Euler fils un mémoire allemand: *Résolutions de quelques problèmes qui regardent la quantité des figures des nombres.*

3. Nov. Euler fils: *De promotione navium sine vi venti.*

15. März 64.
24. März „ } Second mém.

1764.

Copie d'une lettre de M. le Marquis d'Argens au Secrétaire.

Monsieur

S. M. Le Roi non seulement approuve les sujets qu'on a reçus et qu' Elle a proposés Elle-même, mais Elle est charmé que l'Académie ait suivi ses intentions. Quant aux autres sujets proposés l'année 1751 (?) S. M. ne juge pas à propos d'approuver à présent leur réception. Son

intention est qu'on ne reçoive à l'Académie aucun Membre jusqu' à ce qu'il ait nommé un Président, *le Roi se réservant à présent le droit de nommer lui seul jusqu' à ce tems les Membres que l'Académie recevra.* Je suis etc.

Berlin le 6 Janvier 1764 Le M. D'ARGENS

19. Jan. *De motu fluidorum a diverso gradu caloris oriundo* {569}.

10. Mai / 24. Mai. *Construction des objectifs composés de deux différentes sortes de verre, qui ne produisent aucune confusion, ni par leur ouverture ni par la différente réfrangibilité des rayons, avec la manière la plus avantageuse d'en faire des Lunettes* {716}.

18. Oct. M. EULER présente le projet d'un Ouvrage sur l'Artillerie intitulé: *Norma rationalis et experimentalis der zur Artillerie angewandten Mechanik* {NB}

1. Nov. / 22. Nov. *Sur le vrai caractère de la Musique moderne* {531}.

1765.

17. Jan. *Réflexions sur la manière d'examiner la réfraction des verres par le moyen des prismes* {696}.

23. Febr. M. EULER a lu une lettre de M. le Marquis D'ARGENS, concernant la manière dont le Roi a disposé des pensions académiques.

7. März. *Sur l'intégration de quelques équations* / *Considérations sur quelques formules intégrales* {NB ungenügend}.

5. Juli. Le Secr. a lu le Mémoire envoyé par le Père LA BORDE où il expose ses *Nouvelles vues sur la construction des télescopes et des microscopes.*

18. Juli. *Sur le mouvement d'une corde qui au commencement n'a été ébranlée que dans une partie* {519}.

23. August. M. le Prof. DE CASTILLON a fait rapport de la Pièce du Père LA BORDE. Il a en même tems été autorisé par l'Ac. à faire des expériences ultérieures à ce sujet.

19. Sept. / 26. Sept. *Éclaircissements plus détaillés sur la génération et la propagation du son et sur la formation de l'Écho* {506}.

11. Oct. Lettre du Père LA BORDE avec un Supplément à son Mém.

7. Nov. M. EULER a mis sur le Bureau, afin qu'on en prît note, deux Mémoires

1. *Théorie générale de la Dioptrique* {690? Das Original besitze ich}.
2. *Corrections nécessaires pour la théorie de la déclinaison magnétique, proprosée dans le XIII. Volume des Mémoires de l'Académie* {741}.

4. Dec. M. Bernoulli a lu un Mémoire de M. le Directeur Euler intitulé *Considérations sur le problème des trois corps* {540}.

20. Sept. Euler fils: Neue Prüfung der Theorie von der Bahn und Bewegung der Geschützkugeln.

1765.

10. Jan. M. le Directeur Euler a proposé par ordre de S. M. M. Lambert pour Membre ordinaire de l'Académie; à quoi il a été sur le champ très humblement acquitté.

18. April. }
9. Mai. } Euler fils: *Nouvelles Expériences relatives à la construction des fournaux.*

7. Nov. Euler fils: *Recherches des forces dont les corps célestes sont sollicités entant qu'ils ne sont pas sphériques.* [Vgl. p. 266: 1758. 23. Nov.]

1766.

13. Febr. M. Bernoulli a lu un Mémoire de M. Euler: *Essai de Dioptrique* {N B}.

21. Mai. M. Euler père et fils ont pris congé de l'Académie. Le Secrétaire leur a répondu et leur a témoigné combien l'Académie était sensible à leur perte.

P. H. v. Fuss an **C. G. J. Jacobi**, St. Petersburg, den 8./20. Nov. 1847.

St. Petersburg d. 8./20. November 1847.

Mein innig verehrter Freund u. College

Ihren freundlichen Brief vom 24. October, — so reich für mich an Inhalt, ob er gleich nur von Einem Gegenstande handelt, — habe ich erhalten u. studirt. Empfangen Sie meinen besten Dank für die große u. für mich unschätzbare Mühe, die Sie sich gegeben. Eine der Ihrigen ganz gleiche Arbeit hatte ich schon vor längerer Zeit in Bezug auf die Protokolle unserer Akademie ausgeführt, u. wenn dies vor der Herausgabe der Correspondance geschehn wäre, hätte meine Liste wesentlich dadurch gewinnen müssen. Keiner kennt besser als ich die großen Mängel u. Auswüchse dieser Liste, u. wenn Sie sich darüber so schonend aussprechen, so erkenne ich darin nur ein neues Zeichen Ihrer freundlichen Gesinnung. Und doch hat diese Liste, wie sie da ist, mir Mühe u. Arbeit genug gemacht u. einem wesentlichen Bedürfniß abgeholfen, da doch bei weitem in der Mehrzahl der Fälle das Gesuchte ohne große Mühe darin zu finden ist, was bei der Liste der *Lobrede* unendlich schwierig war, ganz abgesehn davon, daß die meinige gegen diese bedeutend vervollständigt ist. Meine erste Sorge nach Empfang Ihres Verzeichnisses war eine sorgfältige Vergleichung desselben mit dem meinigen. Interessant war es mir zu finden, daß so viele Petersburger Abhandlungen

aus jener Zeit der Berliner Akademie vorgelegt wurden. Dadurch habe ich für mehrere doppelte Exhibitionsdaten erhalten u. eine genaue Zeitbestimmung nicht nur vieler Berliner Abhandlungen, sondern selbst mancher Petersburger, über die unsere Protokolle mich im Zweifel ließen. Wie wichtig aber, grade bei der Masse der Euler schen Arbeiten, diese chronologischen Daten sind, davon überzeuge ich mich eben jetzt bei Herausgabe der *Op. arithmetica.* Ich habe nämlich (u. ich glaube, Sie werden dies billigen) die streng chronologische Reihenfolge gewählt, als die natürlichste, ja ich möchte sagen die einzig mögliche, da man bei jedem andern System einzelne Abhh. hätte zerreissen müssen. Das ist noch himmelweit verschieden von Libri's alberner Zumuthung (in seiner Recension der *Correspondance* im Journ. d. Sav.) bei der *Gesammt*ausgabe der Euler schen Schriften, dieselben ohne Rücksicht auf den Gegenstand, also pêle-mêle, nach der Zeit zu ordnen; für die einzelnen Doctrinen dagegen, oder wenn man will, deren Unterabtheilungen, ist die chronologische Reihenfolge die rationellste und instructivste. Zur Erleichterung des Nachsuchens kann man ja systematische Inhaltsverzeichnisse, selbst alphabetische Register oder sonstige Hülfsmittel beifügen, wobei man ja nicht allein auf die Abhandlung, sondern auf Paragraph u. pagina hinweisen kann. Jetzt ist der 62[te] Bogen unter der Presse; das ganze wird ziemlich genau 140 Druckbogen also zwei Bände von je 70 Bogen füllen. Nicht nur die problemata Diophantea geometrica, sondern auch sonst noch ein Paar Abhh. aus andern Sectionen meiner Liste, die nähere Beziehung auf die Zahlenlehre haben, sind mit aufgenommen. Mein Bruder steht mir treulich bei,. u. die Ausgabe wird nicht nur sauber u. würdig, sondern auch correkt. Im Text haben wir uns mit Hinweisungen auf *frühere* Abhandlungen begnügen müssen, die auch schon Mühe genug kosteten, weil Euler sich selbst immer nur nach dem Gedächtniß, nie genau citirt. Es wird Ihnen, nicht weniger als mir selbst, darum zu thun sein, daß diese Sammlung möglichst vollständig werde u. Sie werden gewiß gern die Hand dazu bieten mir zu dem Besitz dessen zu verhelfen, was mir etwa noch fehlen mag. In dem beiliegenden Verzeichniß der Abhandlungen Ihrer Liste, die, wenigstens unter den angegebenen Titeln, in der meinigen fehlen, sind auch einige arithmetische enthalten, die genau darauf untersucht werden müßten. Besonders überraschte u. erfreute mich die endliche Auffindung der *Découverte d'une loi (propriété) extraordinaire des nombres*, die zu finden ich Himmel u. Erde in Bewegung gesetzt hatte. Voss in Leipzig[1]), ein Dr Grässe in Dresden, Stern in

1) Leopold Voss, Buchhändler der Petersburger Akademie in Leipzig; Fuss ist mit ihm auch wegen der Gesamtausgabe der Eulerschen Werke in Verbindung getreten, die auf eigene Gefahr zu übernehmen Voss jedoch ablehnte.

Göttingen hatten nach dem in der Lobrede citirten Journal littéraire de l'Allemagne gesucht, bis der treffliche Gauss mit einem Eifer, der mich wirklich rührte, in einem so betitelten, längst verschollenen Buche jene *anonyme* Abhandlung Eulers über die Summe der reciproken Quadrate der natürlichen Zahlen auffand*) u. eigenhändig für mich copirte[1]). Sie fehlte wirklich in meiner Liste. Ich betrachtete also von nun an die N. 3 meiner Liste als *nicht existirend;* u. nun sprechen Sie davon, als von einer Abh. die Sie *gelesen* (ob gedruckt, oder im Manuskript, ersehe ich nicht) u. worin Sie zuerst einen Satz angeführt finden, der Sie eben interessirt. (Wenn dies die Reihe ist

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \cdots = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots$$

wo die Exponenten der x Zahlen von der Form $\frac{3n^2 \pm n}{2}$ sind, so finde ich sie auch u. zwar zuerst in der Abh. *De partitione numerorum* (N. Comm. III p. 125) angewandt, die vom J. 1750 (26. Januar) ist). Sie werden demnach begreifen, wie begierig ich auf Ihren Fund bin. Ist die Abh. ein Ineditum, so könnte sie mit vielen andern an den Schluß meines zweiten Bandes kommen[2]); ist sie aber gedruckt, so gehört sie doch jedenfalls in die *Op. arithm.* u. wenn ich auch längst über d. J. 1747 hinweg bin (ich bin nämlich schon bei 1772), so wird sie jeder doch lieber als Nachzügler sehn, als ganz vermissen. Bei der bekannten Liberalität der wissenschaftlichen Institute in Berlin u. der Reciprocität die zwischen jenen u. den unsrigen obwaltet, wird es, denke ich, keine Schwierigkeit haben Manuskripte dieser Art u. zu solchem Zweck nach Petersburg geliehen zu erhalten. Sollten Sie dennoch dergleichen befürchten, so glaube ich nicht zu viel zu wagen, wenn ich Sie bitte, es auf Ihr Risico zu thun. Schon diese Zumuthung zeigt, daß ich unbedenklich ein Gleiches für Sie thäte u. Ihr Vertrauen gewiß nicht mißbrauchen würde. — Nun zu einigen Specialitäten zu denen mich die interessanten Bemerkungen veranlassen die Ihr Beiblatt enthält u. deren jede für mich ein Goldkorn ist. Da

*) Sie ist übrigens aus den ersten Vierziger Jahren. Weder der Jahrgang 1751 noch irgend ein anderer desselben Journals (unter etwas verändertem Titel) enthält aber, nach Gaussens ausdrücklicher Versicherung, eine Abhandlung Eulers.

1) Siehe P. Stäckel, *Vier neue Briefe von Gauss*, Gött. Nachr. 1907, p. 372 und *Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen*, Bibl. math. (3) 8 (1907), p. 37. Die Abhandlung steht in dem Journal littéraire de l'Allemagne, t. **II**, 1. partie, Haag 1743, p. 115—127.

2) Sie findet sich dort p. 639, vgl. dazu t. I, p. XVIII ad 57 und p. LXXXI.

weiß ich nur nicht, womit beginnen u. ob, wenn einmal begonnen, ich ein Ende finde. Der Gegenstand ist wirklich unerschöpflich.

Ihre Bemerkung bei Gelegenheit der numeri amicabiles, daß Euler nämlich sorgfältig feilte u. umarbeitete habe auch ich oft Gelegenheit gehabt zu machen. Seine beiden Specimina über Vergleichung transcendenter Größen, die den VII. Bd. der Nov. Comm. eröffnen*), besitze ich in einer ganz netten Reinschrift von seiner Hand, jedoch in so verschiedener Redaction, daß ich sie lange für unedirt hielt. Wo nahm der Mann die Zeit her zum Forschen, Redigiren, Copiren, — wo den Muth zum Verwerfen, Umarbeiten desselben Gegenstandes u. Wiedercopiren, — denn so lange das Auge diente, ist ja alles von seiner Hand! — Die französischen Uebersetzungen seiner ersten Abhandlungen in Berlin machte er selbst mit *sehr* ungeübter Feder. So besitze ich die meisten der Abh. die der erste Bd. der Berl. Mém. nur im Auszuge gibt. Eine fremde Hand hat Stylkorrektionen hineingeschrieben. Interessant war mir die Abhandlung, womit er seine Sonnentafeln begleitete; sie ist, so viel ich weiß, nirgend gedruckt, die Tafeln aber fehlen mir. Viel Dioptrisches, durchaus druckfertig u. zum großen Theil unedirt, findet sich im Nachlasse. Es ist alles französisch (worin sein Aufenthalt in Berlin ihm später eine große Fertigkeit verschaffte), die große lateinische *Dioptrik* aber erschien in den letzten Jahren, u. es mag daher vieles da hinübergezogen sein. Das Vergleichen aber ist nicht leicht u. erfordert Zeit, die mir knapp zugemessen ist. Die *Théorie générale de la Dioptrique* besitze ich (1765 Nov. 7 Ihrer Liste); sie ist vom *Précis* in den Pariser Mém. verschieden. Was ist das aber für ein *Essai de Dioptrique* (1766 Febr. 13)? Ich vermuthe daß ich auch diesen (ein starkes Mskpt. ohne Titel) in meiner Sammlung habe. Wie glücklich wäre ich diese einmal Ihnen zeigen zu können. — Sie erwähnen der Abh. 385 m. L. als im Manuskript vorhanden, in Ihrer Liste aber ist sie nicht erwähnt. Sollte sich nicht dennoch das Exhibitionsdatum ausmitteln lassen; ich finde es nicht in unsern Protokollen. Ihre Winke über eine zweckmäßigere Anordnung u. Eintheilung der Materien in meiner Liste, sind mir sehr willkommen; Manches habe ich mir schon selbst gesagt. Die wirklich fehlende Abh. über die Logarithmen negativer u. imaginärer Größen[1]) paßt ja sogar in keine der von mir angenommenen Rubriken. Die andere von Ihnen vermißte Abh. aber *Curvarum maximi minimive etc.* steht nur am unrechten Orte. Uebrigens steht noch der ganze Satz der Liste zum Behuf einer Separatausgabe, zu welcher ich mich aber nicht eher entschließen möchte als nach sorgfältiger Vergleichung alles gedruckten u. handschriftlichen Materials. Aber — welche Arbeit! u. wie langsam rückt

*) NNo. 424 u. 352 meiner Liste. 1) Vgl. jedoch p. 261, Anm. 1.

sie vor[1]). Sehr interessant wäre es endlich auch für mich die unedirte Kritik d'Alemberts u. das Gutachten Eulers über Gerdil's Abh. u. seine Erklärung der Attraction zu lesen.

Ich komme noch einmal auf jenen Satz zurück, den Sie als in der *Découv. d'une loi extraord. etc.* zuerst angeführt bezeichnen. Ich finde ihn noch einmal benutzt in der *Observatio de summis divisorum* (gel. d. 6. Apr. 1752 N. Comm. V) mit dem Zusatz: Aequalitas harum duarum formularum jam est id ipsum, quod solida demonstratione confirmare non possum.

Für den dritten Band der *Correspondance* habe ich ein ziemlich reichliches u. interessantes Material zusammengebracht u. erwarte einen vieljährigen Briefwechsel zwischen Euler u. Delisle der im Dépôt de la marine in Paris aufbewahrt wird u. mir versprochen worden ist. Libri aber hat seine Zusage nur halb erfüllt indem er mir nur eine nachlässige Abschrift von Eulers Briefen an Lagrange, den d'Alembert-Lagrange'schen Briefwechsel aber gar nicht geschickt hat. — Und nun komme ich zum endlichen Schlusse noch auf dasjenige, womit ich hätte anfangen sollen: auf meinen besten u. wärmsten Dank für das schöne Geschenk des ersten Bandes Ihrer Abhandlungen. Ich hatte schon die Hoffnung aufgegeben u. mir das Buch bestellt, denn es genügte mir nicht Ihre Arbeiten in Crelles J. zerstreut zu besitzen. Als Geschenk von Ihnen selbst haben sie mir natürlich noch einen doppelten Werth. Wenn mein langer Brief Sie langweilt, so schreiben Sie sich's selbst zu; Ihre so dankenswerte Arbeit gab mir den reichlichen Stoff u. wie viel hätte ich noch zu sagen, wenn mir Ihre Zeit nicht zu lieb wäre. — Ich bewundere die Geduld, mit der Sie sich der Lectüre des Tagebuchs meines Großvaters unterziehen; ich bewahre aus dunkeln Erinnerungen meiner frühesten Kindheit das Bild eines liebenswürdigen heitern Greises; es ist das seinige. Sorglos u. lebensfroh — suchte er in der Geselligkeit den Genuß, verlebte mehr als er hatte u. hinterließ seinen Kindern, besonders meinem armen Vater, die Sorge sich mit den Gläubigern abzufinden. Was Sie in diesem Tagebuche suchen, werden Sie kaum darin finden. Für mich hätte es allerdings Interesse. — Leben Sie wohl, mein verehrter Freund u. behalten Sie lieb

Ihren dankbar ergebnen

Fuss.

---

1) Fuss ist nicht dazu gekommen, eine verbesserte Ausgabe seines Verzeichnisses erscheinen zu lassen; einige Nachträge und Verbesserungen enthalten die *Comm. ar.* und die *Op. post.* Sein Handexemplar des Verzeichnisses mit vielen Eintragungen ist jetzt im Besitz von Herrn Geheimrat Viktor Fuss in Petersburg.

P. H. v. Fuss an C. G. J. Jacobi, St. Petersburg, den 9./21. Jan. 1848

St. Petersburg d. 9/21. Januar 1848.

Mein verehrter Freund

Mit meinen besten Wünschen zum angetretenen neuen Jahre, schicke ich Ihnen heute p. Post den eben fertig gewordenen ersten Band der *Opera arithmetica*. Titelblatt und Vorrede fehlen, weil ich diesen Band noch nicht zu emittiren gesonnen bin. Sie aber haben ein Recht darauf ihn früher als Andere zu besitzen u. werden mir Ihre etwaigen Bemerkungen darüber nicht vorenthalten, besonders solche, die mir bei dem Druck des zweiten Bandes noch zu Statten kommen könnten. Dieser wird 47 Abhandlungen, die schon früher gedruckt waren, (aus den Jahren 1773—1782) chronologisch geordnet enthalten, u. dann die Inedita, bestehend aus *drey* in unserm Archiv befindlichen Abhh., wozu auch die *propriété extraord. des nombres* gehört, vorausgesetzt, daß sie unedirt ist (ich erwarte sie mit Ungeduld), *zwey* ungedruckten Abhh., deren Alter unbekannt, u. den sechzehn Capiteln des *Tractatus de numerorum doctrina*[1]). Dies alles gibt noch einen eben so starken Band. — Sie erinnern sich daß, als die Aussicht auf eine Unterstützung vom Staate zu einer *Gesammt*ausgabe von Eulers Schriften, zwar der Akademie nicht benommen, aber doch ins Unbestimmte hinausgeschoben war u. man geduldig abwarten zu wollen schien, ein Brief von Ihnen den Ausschlag gab u. die Akademie veranlaßte aus eigenen Mitteln wenigstens zu beginnen. Sie hatten Zahlenlehre u. Mechanik als am wünschenswertesten bezeichnet; man fing also mit der erstern an. Ein Setzer wurde angewiesen; der Druck sollte zwar unausgesetzt fortgehn, aber nicht übereilt werden, damit die Unkosten sich auf ein Paar Jahre vertheilen. Nach dem ursprünglichen Anschlag, wo auf außerordentliche Mittel gerechnet wurde, sollten vier Setzer gleichzeitig beschäftigt werden, u. selbst da bedurfte es 10 Jahre zur Vollendung des Ganzen. Begreiflicherweise würde also mehr als ein Menschenalter darauf gehn, wenn man auch annehmen wollte, daß die Akademie aus eignen Kräften so fortführe, wie sie begonnen. Man hofft also von der Herausgabe der *Op. arithm.* Veranlassung nehmen zu können zur Erneuerung des Gesuchs an die Regierung. Wenn man sich nun vorher von dem Grad der Theilnahme des Publicums an dem Unternehmen vergewissern könnte, wäre vielleicht viel gewonnen. Überlegen Sie sich doch die Sache. Vielleicht wäre eine Anzeige des ersten Bandes in den mathematischen Zeitschriften Deutschlands, Frankreichs, Englands, Italiens angemessen, nebst Eröffnung einer Subskription. Vielleicht rathen Sie selbst, den ersten

1) *Comm. ar.* t. **2**, p. 503—575; vgl. auch t. **1**, p. XI und LVII—LVIII.

Band gleich zu emittiren; dann wäre Titel u. Umschlag bald gedruckt, wenn dann auch die Vorrede erst mit dem zweiten Bande ausgegeben würde. Man sähe doch wie es geht. — Jedenfalls werde ich nach Vollendung der *Op. arithm.* den Versuch machen die Akademie zu vermögen allmälig fortzufahren bis Hülfe kommt. Bleiben Sie denn dabei, daß die *Mechanik* an die Reihe komme? Das Fach ist weitschichtig. Die zwei großen Werke abgerechnet, zähle ich nicht weniger als 160 gedruckte Abhh. Hier lassen sich Unterabteilungen machen u. sind selbst nöthig. Wie weit sollen diese aber gehn, bis die chronologische Ordnung eintritt? Ich könnte, wenn ich Ihre Ansichten kennte, allmälig das Material ordnen. Das starke unedirte Manuskript *Astronomia mechanica*, so wie überhaupt was sich auf Mechanik des Himmels bezieht müßte wohl zur Astronomie gehören, dagegen kämen die mechanischen Curven, die in meiner Liste unter *Géométrie anal.* stehen, wohl zweckmäßiger unter die Abtheilung Mechanik. Ich möchte nicht gern alles allein vertreten, u. bin doch hier ziemlich rathlos. Sie, mein verehrter Freund, haben ein so warmes u. thätiges Interesse für das Unternehmen an den Tag gelegt u. sind unaufgefordert auf Detailfragen eingegangen, daß Sie sich's selbst zuzuschreiben haben, wenn ich nun voll Zutrauen meinen Recurs an Sie nehme. Antworten Sie mir nach Bequemlichkeit, wie es Ihre Zeit gestattet, an die, ich weiß es ja, die Wissenschaft höhere Ansprüche hat. Ich grüße Sie freundschaftlichst u. bitte Sie mein Andenken bei Ihrer Frau Gemahlin, so wie bei denen Ihrer Berliner Collegen, die sich meiner erinnern (das Ermansche Ehepaar, Encke, Crelle) zu erneuern.

Fuss.

N. S. Die scheinbar so unverhältnißmäßig erhöhete Productivität Eulers im letzten Decennium seines Lebens, auf die ich in der Notice im ersten Bde der *Correspondance* hinweise u. die ich nur durch die Hülfe erklären kann, die er an meinem Vater hatte, spricht sich durchweg in allen Theilen der Mathematik aus. Auch der 1. Bd. der *Op. arithm.* enthält 41 Abhh. aus 40 Jahren; etwa 4/5 des 2ten Bdes werden 47 Abhh. aus 10 Jahren enthalten! Aber die *Qualität* ist sichtbar im umgekehrten Verhältniß. Die Arbeiten des Blinden sind kurz u. fragmentarisch, wenn gleich zahlreich. Das Beste stammt immer aus der goldenen Zeit der vollen Manneskraft. Daher lege ich aber, u. ich glaube nicht mit Unrecht, einen großen Werth auf die größern unedirten Fragmente, die alle aus jener Zeit datiren, in sich vollendet u. eigenhändig mundirt sind.[1])

---

1) Ein Teil dieses Briefes ist bereits von L. Koenigsberger, *C. G. J. Jacobi*, Leipzig 1904, p. 446 abgedruckt worden.

C. G. J. Jacobi an P. H. v. Fuss, März/April 1848.

Hochverehrter Freund

Wenn ich Ihnen erst jetzt auf Ihre drei Briefe[1]) antworte, so müssen Sie dies mit längerem Unwohlsein, einem Umzuge, endlich damit entschuldigen, daß die Beanwortung Ihres ersten längere Muße erforderte, die mir erst jetzt zu Theil wird.

Nun zuerst meinen großen Glückwunsch Ihnen und der Petersburger Akademie zu dem ersten Bande der Eulerschen Abhandlungen, welcher auf mich und meine Freunde durch die Würdigkeit der Ausstattung, die ohne jeden überflüssigen Luxus dem reichen Inhalte angemessen ist, einen lebhaften Eindruck gemacht hat. Es ist dies ein Nationalunternehmen, welches Rußland zu hoher Ehre gereicht, und so gewiß es ohne Ihre jahrelangen, unausgesetzten Bemühungen nicht zu Stande gekommen wäre, so gewiß können Sie des Dankes sein, den Ihnen die mathematische Welt dafür darbringen wird. Ich kann Ihnen noch besonders den meinigen für das kostbare Geschenk abstatten, das Sie mir mit diesem ersten Bande gemacht haben, und insbesondere dafür, daß Sie mir denselben ohne Verzug noch vor der Publication mitgetheilt haben.

Soll ich aber nun nicht Gegenstand zu großen Neides werden, so würden Sie gleich diesen ersten Band schon publiciren, ohne den zweiten abzuwarten. Es wird jeder damit zufrieden sein, die Vorrede zu der ganzen arithmetischen Abtheilung ,beim zweiten nachgeliefert zu erhalten. Besonders ist dies der lebhafte Wunsch meines Freundes und Ihres Correspondenten Dirichlet, der nicht nur die höhere Arithmetik selbst so bedeutend erweitert hat, sondern auch ein tiefes Studium aus ihrer Geschichte gemacht hat, und fortwährend macht, wo er denn die Erscheinung dieses Werkes mit doppelter Theilnahme begrüsst, und ungern bis auf das Erscheinen des 2. Bandes warten möchte.

Irgend etwas noch zu wünschen, wüsste ich nicht Nur wäre es vielleicht gut, wenn Sie auch ein kleines Verzeichniss am Ende hinzufügten, wo nach der Reihenfolge *die Bände der ak Schriften angegeben sind, aus denen die Abhandlungen entnommen sind*[2]); damit wenn in anderen Schriften ein Band Ihrer Commentarien citirt wird, man sogleich nach dem Verzeichniss die betreffende Abhandlung in den *Opp. Ar.* auffinden kann. Auch citirt Euler oft selbst seine früheren Abhandlungen nach dem Bande, so dass man dann in dem Werke selbst sogleich das Citat auffinden könnte. Es scheint dies um so wünschenswerter, als oft

1) Nur die beiden hier abgedruckten Briefe sind erhalten.

2) Das ist in den *Comm. ar.* t. 1, p. LXXX nachgeholt worden; vgl. dort auch p. XXI.

die Titel der Abh. nicht citirt werden, sondern eben nur der Band der Memoiren. Es müßten aber auch die Seitenzahlen der Bände, wo die Abh. stehen, in dem Index angegeben sein. Später einmal könnte bei Beendigung des Ganzen ein ähnlicher Generalindex gegeben werden.

Von einem aus 16 Kapiteln bestehenden Werke *De doctrina numerorum* hatten Sie mir früher nie etwas gesagt, und bin ich den Inhalt zu kennen begierig.

Wenn die Zeitverhältnisse günstiger wären, ließe sich aus der gleichzeitigen Ausführung aller Ihrer Ideen eine hinreichende Unterstützung erwarten, um das Werk mit Kraft weiter zu führen. Es müßten dabei meiner Meinung nach zuerst die größeren Werke Eulers, wenigstens die noch bequem zu haben sind, ganz ausgeschlossen werden. Denn das Hauptbedürfniß ist auf die einzelnen Abh. gerichtet, und es darf nicht das Bessere der Feind des Guten werden. Von dieser Ansicht aus müßten Sie eine neue, bloß auf die Abh. gerichtete Veranschlagung entwerfen, wobei ja unbenommen bleibt, später die größeren Werke einmal hinzuzufügen. Es würde sich hierdurch die Summe von 80000 Rubel doch namhaft ermäßigen. Dann müßten Sie sehen, daß die Akademie eine feste jährliche Summe auswirft, die hauptsächlich dazu dient, daß das Unternehmen nie in Stocken geräth. Diese Summe müßte durch einen jährlichen vielleicht gleichen Beitrag vom Staat erhöht werden. Gleichzeitig müßten diese Anzeigen erfolgen, von denen Sie sprechen[1]), und mehrere wissenschaftliche Journale, wie das Crellesche, Liouvillesche, Schumachersche, London and Edinb. Philos. Mag., das Dublin and Cambridge Mathem. Journ. etc. etc. Subscriptionen annehmen. Es müßte dann noch an die Akademien geschrieben werden und an einzelne Leute, welche die Subscription für die *öffentlichen* Bibliotheken veranlassen könnten. Die Berliner Ak. glaube ich bestimmt, würde 20 Ex. subscribiren. Was hieraus und aus dem sonstigen Verkauf einginge, müßte nicht als Compensation der gemachten Ausgaben angesehen, sondern verwendet werden, um den Weiterdruck kräftiger zu beschleunigen. Wenn nun auch die Zeiten jetzt hiezu ungünstig sind, so glaube ich doch, daß diese Maßregeln selbst jetzt nicht ganz erfolglos sein würden. Sie könnten vielleicht selbst aus Amerika Subscriptionen erhalten.

1) *Nachricht über eine Sammlung unedirter Handschriften Leonhard Eulers und über die von der Akademie begonnene Gesammtausgabe seiner kleineren Schriften*, Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie de St. Pétersbourg, 7 (1849), col. 337—368; diese Übersetzung des *Prooemiums* und der *Supplementa prooemii* aus den *Comm. ar.* ist auch als Broschüre erschienen und von dem Verleger L. Voss in Leipzig für $1\frac{1}{2}$ Silbergroschen verkauft worden, weil er „damit eine zweckmäßigere Verbreitung zu erzielen glaubte als durch völlige Gratislieferung" (Brief an Fuss vom 17. Juli 1849).

Eine sehr wichtige Frage wäre wohl, ob nicht die Arbeiten von J. Albert auch aufgenommen werden müßten, da sich annehmen läßt, daß alles bis auf die Ausarbeitung vom Alten ist. Es wäre gut dieses besonders ebenfalls zu veranschlagen.

Die Idee, die Sie haben, es wäre möglich, einmal einen Sachindex zu geben, der womöglich sich auf die einzelnen §§ der Abh. bezöge, ist großartig. Es würde dadurch etwas Ungeheures geleistet, aber wenn auch die Mühe gegen die Wichtigkeit der Sache gering ist, wer sollte diese Arbeit unternehmen? Sie müßte vielleicht unter mehrere jüngere Gelehrte, die dafür honorirt würden, vertheilt werden, etwa wie die Berliner Sterncharten.

Von Libri dürfen Sie jetzt wohl nichts mehr für den 3. Theil Ihrer *Correspondance* erwarten. Er gehört zu der Klasse Menschen, von denen jeder die Präsumtion hat, daß sie Spitzbuben sind, die aber in der Regel bis zu ihrem seligen Ende durchkommen, weil jeder die Mühe der Beweisführung scheut. Ich denke wir werden ihn aus der Liste der Correspondenten unserer Akademie streichen.

Ich komme jetzt zu den für die fernere Herausgabe von Ihnen zu treffenden Dispositionen.

Die *Mechanik*, die ich folgen zu sehen wünschte, würde sich allerdings schlecht an die *Zahlentheorie* anschließen. Indessen könnte man von der Ordnung, in welcher die Disciplinen in dem ganzen Werke auf einander folgen sollen, für jetzt abstrahiren, so daß derselben die Ordnung, in welcher die Schriften gedruckt werden, nicht zu entsprechen brauchte. Man könnte dann am Ende des Ganzen besondere Titel drucken, welche die Stelle jedes Bandes in demselben bezeichnen. Indessen spräche für einen spätern Druck der Mechanik 1) daß bei dem großen Umfange derselben und der Schwierigkeit der Disposition es vielleicht zweckmäßig wäre, durch den Druck kleinerer Disciplinen mehr Erfahrungen zu machen, und 2) damit das Ende abzusehen wäre, mit der Mechanik zu warten, bis kräftigere Mittel zur Disposition stünden.

Wenn diese und vielleicht andere Gründe Sie bewegen sollten, zunächst Gegenstände von nicht so großem Umfange anzuschließen, so würde ich dazu *Geometrie* und *Algebra* vorschlagen. Leider kann ich den Umfang nicht beurtheilen, da Sie in Ihrer Liste nur die Anfangspagina, aber nicht die Endpagina der Abhandlungen angeben. Auch kann ich, da mir von den Petersb. Mem. nur die 14 Bände der alten Comment. erb- und eigenthümlich gehören, nicht bei allen Abh. wissen, wo sie aufzunehmen sind. Von dem Umfange aber müßte zum Theil abhängen, welche Ausdehnung man jeder der beiden Rubriken zu geben hätte.

Man müßte glaube ich bei den zu machenden Eintheilungen weniger nach dem Namen oder dem Stoffe als nach einem Prinzip gehen. Die reine Mathematik müßte in zwei große Abtheilungen, von denen die erste alles ausschließt, wozu Integralrechnung nöthig ist[, getheilt werden]. Die einfachen, jetzt zu den Elementen zu rechnenden Prozesse des Differenziirens auszuschließen, wäre vielleicht Pedanterie. Es könnten gleichwohl die drei Momente festgehalten werden, als Unterabtheilungen, je nachdem alles im Endlichen bleibt, dieselbe Methode bloß aufs Unendliche angewandt, und endlich die Methode des Differenziirens angewandt wird.

Ich komme zur **Geometrie.**

Davon müßte alles ausgeschlossen werden, was sich auf Rectificationen bezieht, Integration von Differentialgleichungen verlangt, mehr eine Sache des Calculs ist, als uns über die allgemeine Natur der Raumgebilde belehrt. Dieses müßte später einmal in einen besonderen Abschnitt kommen: *Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie,* und gehört um so mehr zur Integralrechnung als die wichtigsten Methoden derselben an dem Bilde geometrischer Betrachtungen ersonnen und demonstrirt sind. Es würden hiezu etwa gehören:

210. 336. 340. 345. 357—362. 366. 368. 387—389. 391—395. 398. 399. 405—407. 409—418. (Ob 348. 421. 426. 427 hieher oder zu den *Elliptischen Integralen* rechnen, muß man einen Blick darauf werfen) 430—432 a et b. [432b = 366.] 434? 435—437. 439.

Dieser reiche und wichtige Abschnitt würde also aus etwa 50 Abhandlungen bestehen, und zur *Integralrechnung,* nicht zur *Geometrie* kommen, jedoch einen Band für sich bilden.

Einen besonderen Abschnitt müßten ihrer heutigen Wichtigkeit wegen die *Elliptischen Integrale* bilden; wie angenehm, alles Eulersche darüber zusammen zu haben! Diese müßten in zwei wesentlich verschiedene Unterabtheilungen zerfallen.

A. Reduction auf E. I., etwa 206. 207. 281. 419. 420. 353. 354. 355. 356. 425.

B. Reduction der E. I.; etwa 267. 269. 270. 282. 346. 352. 364? 423. 424 (zus. etwa 18 Abh.)

Die Tauto- und Brachistochronen würde ich zur Mechanik lassen. Bei der Überschrift *Mouvement des projectiles* in Ihrer Liste darf wohl nicht auf die Abh. über Trajectorien verwiesen werden, die gar nichts mit Mechanik gemeinsam haben, sondern nur auf die eine *ballistische* 390, die noch heut classisch ist. Andere Abh., die jetzt unter Geometrie stehen, würde ich einer neuen Rubrik: *Größtes und Kleinstes* überlassen oder

Isoperimetrische Probleme, worin die Variationsrechnung aufginge. Dahin würden gehören:

196. 197. 199. 289. 290. 383—386. 403—404. 408.

Nach diesen Ausscheidungen würde für Geometrie folgendes zurückbleiben:

1. *Planimetrie* 302—308. 310. 311. 316. 317.
2. *Kegelschnitte* 347—351.
3. *Stereometrie, Kartenprojection, Sphärische Trig.* 309. 312. 318—320. 332—335. 337—339.
4. *Höhere Geometrie* (Anw. der Differenzialrechnung) 358. 367. 401. 402. 428. 429. 433. 438.
5. *Allgemeine Theorie der algebraischen Curven* 343. 344.
(zusammen 37 Abh., würde also vielleicht gerade 1 Band geben.)

Algebra und Analysis.

Die Algebra und Analysis (Analyse) könnte in folgende Unterabtheilungen zerfallen.

1. *Zerfällung der rationalen Brüche in Partialbrüche:* 88. 97. 98.
2. *Kettenbrüche.* (Hiervon müßte alles ausgeschlossen werden, wo der successive Prozeß der den Kettenbruch giebt, aus der Eigenschaft gewisser bestimmter Integrale abgeleitet wird oder wo Differentialgleichungen durch Kettenbrüche integrirt werden; nicht aber wo der Kettenbruch nach allgemeinen Formeln aus einer unendlichen Reihe abgeleitet wird, von der bloß gelegentlich bemerkt wird, daß sie aus der einfachen Entwicklung eines unbestimmten Integrals entspringt.)
89. 91. 92. 95. 99—101. 164.
(89 könnte wegen des Endes zweifelhaft sein, doch ist der elementare Character zu überwiegend);
3. *Imaginäre Größen und imag. Form der Wurzeln der Gleich.:*
102. 189. 103. 108. 109.
4. *Algebraische Auflösung der Gleichungen*
107. 110. 112. 114.
5. *Ausziehung der Wurzeln aus Irrationalgrößen*
138.
6. *Auflösung durch Näherung*
111. 115. (139. 140. 146? [vgl. p. 296 ad 1 und 2]).
7. *Auflösung durch unendliche Reihen*
113. 116. 117. (die Abh. 118. 119 gehören in die *Integration der Dgl.*)
8. *Elimination*
106. (zu verweisen auf *Geometrie* 343. 344.)

9. *Binomischer Lehrsatz; Eigenschaften der Binomialcoëff.*
130—134. 136. [vgl. p. 298 ad 9.] 137.
(auszuscheiden, was besser zu *bestimmten Integralen* gehört.)

10. *Polynomischer Lehrsatz* (Potenzen von Polynomina), *Eigensch. der Polynomialcoëff.*
126. 128. 135. 168. [vgl. p. 298 ad 11.] 170.

11. *Combinatorische Analysis; Theilung der Zahlen.*
40, 5). 129. 191. 192.

(191 enthält die erste Notiz, die Euler über seine Entwicklung von $(1-x)(1-x^2)\ldots$ öffentlich gegeben, in dem Bande für 1741—43, dessen Druck aber 8—10 Jahre sich verspätete bis 1751.)

Diese 43 Abh. könnten wieder einen Band geben; wird er nicht zu dick, so ließe sich an die *Combin. Anal.* sehr gut *Wahrscheinlichkeit* 291—301 anschließen; wenn auch etwas Integr. darin vorkommt.

Einen neuen Band gäbe dann

Analytische Trigonometrie und Summation der Reihen.

Anal. Trig.; *Entwicklung nach den Cos. und Sinus der Vielfachen, Reihen für π.*

147—154. 157—159. 174—175. 178. 182. 313—315. 328—331.

Summation und Transformation der u. Reihen, unendliche Producte.

120—127. 141. 143—145. 155. 156. 165. 171. 173. 176. 177. 180. 181. 183. 185. 187. 188.

Beides zus. 47 Abh. Wieder auszuscheiden, wozu best. Integr. und Integration der Dgl. erfordert wird.

Mit diesen 5 Bänden (2 Zahlenth. 1 Geometrie 1 Algebra 1 Reihen) wäre der quasi elementare Theil geschlossen; und es käme die zweite Abth. der reinen Math., welche best. Int. und Integration der Functionen und Gleichungen fordert.

Integralrechnung.

A.

1. *Endliche Integration* (die sich auf Kreisbogen und Log. zurückführen lassen).
201—205. 208. 211—217. 241—246. (247. 248?)

2. *Entwicklung der Integr. in un. Reihen und u. Producte. Bestimmte Integrale.*
90. 94. 142. 160. 163. 218—240. (zus. etwa 37 Abh.)

B.

3. *Elliptische Integrale* s. oben.

4. *Integration der gewöhnlichen Differentialgleichungen*
(194.) 118. 119. 249—252. 254. 256. 257. 259. 261—266. 268. 271—279 (zus. etwa 44 Abh.).

C.

5. *Wiederholte Integrale. Doppelintegrale*
260. 280.
6. *Partielle Dgl. Discontinuierliche Functionen.*
169. 277. 284. 287. 288.
7. *Integrabilität.*
253. 255. 258.
8. *Isoperimetr. Probleme. Variationsrechnung* s. oben.

Um den Band zu füllen könnte man noch hinzufügen:

9. *Brachistochronen* 378—382. 472.
10. *Tautochronen* 369—377. 396. 397. (zus. 37 Abh.)

D.

Anwendung der Integralrechnung auf Geometrie s. oben.

So wäre mit 9 Bänden die reine Mathematik absolvirt. Es käme dann die angewandte.

Mechanik und Astronomie.

Hier stecken noch die grössten Schätze für *reine* Mathematik. Die Eintheilung könnte etwa so gemacht werden.

Mechanik.

1. *Allgemeine Mechanik.*
400. 440. 443—451. 468. 469. 471. 477. 478. 533—535. 543—545. 743—746.
2. *Über den Stoß.*
479. 480. 503. 547. 548.
3. *Über die Festigkeit der Körper.*
588—593. NB. *Arch. civile et hydraulique* ist wohl ein ungewöhnlicher Gegensatz. Man erwartet *Arch. civile et militaire.*
4. *Statik und Mechanik der biegsamen Körper.*
454—457. 460. 464. 467. 482—485.
5. *Statik und Mechanik der elastischen Körper.*
363—365. 453. 458. 459. 461. 524—526.
6. *Anziehung nach 2 Centren.* (NB. Kann wohl noch eine der Unterabth. von 1. bilden.)
537—539.
7. *Specielle mechanische Probleme.*
452. 462 463. 465. 466. 470. 473—476. 481. 486—488. 494—497. 499.
8. *Hydrostatik und Hydrodynamik.*
562—576.

9. *Anwendung auf Navigation.*
572. 577. 596—601.

10. *Maschinenlehre.*
556—561. 578—587. (Die Abh. 582 muß von *hydraulischen Maschinen* fort.)

11. *Bahn der Planeten und Kometen.*
604. 613—615. 621. 625. 628. 662. 663. 666—667.

Astronomie.

11. s. oben. *Bahn d. Pl. u. K.*

12. *Problem der drei Körper mit Anwendungen auf das Sonnensystem.*

NB. Ich würde hier die Abtheil. a) b) etc. Ihrer Liste nicht machen, sondern alles hierauf bezügliche in chronologischer Ordnung drucken, weil gerade hier der Gang wie E. sich entwickelt hat interessirt.

540—542. 605. 607—611. 616. 617. 620. 629—634. 639—646. 652—657. 681—684. 756.

Es wird ein vorzüglich interessanter Theil, in dem alle E.schen Arbeiten über die 3 Körper zusammen sind.

13. *Sphärische Astr. Parallaxe. Präcession. Nutation. Aberration etc*
606. 618. 623. 635—638. 648. 651. 658. 659. 668—680. 691a. 711. 735 b. 736.

14. *Ebbe und Fluth.*
732. 733.

15. *Sphäroidische Gestalt der Erde und davon herrührende Störungen.*
536. 619. 626. 627. 647.

Vielleicht können 12 einen und 11. 13. 14. 15 einen anderen Band bilden[1]).

Ehe ich es vergesse, bemerke ich noch, daß in Comment. XII eine Abh. von Euler latitiert. Es befindet sich nämlich in einer Abh. von Winsheim: *Determinatio exactior* etc.[2]) eine Abh. S. 224—231, die die Überschrift hat:

Methodus viri celeberrimi Leonhardi Euleri *determinandi gradus meridiani pariter ac Paralleli Telluris secundum mensuram a Celeb.* de Maupertuis *cum sociis institutam.*

Der Vf. sagt:

Communicavit mecum, hunc in finem benignissime methodum suam, Celeb. Eulerus, mire facilem ac compendiosam, *quam ipsissimis Viri Celeb. verbis, bona cum ejus venia, praemitto.*

1) Fuss erkannte Jacobis Vorschläge als zweckmäßig an und hat, unter Berufung auf diesen, die Einteilung für die reine Mathematik mit geringen Änderungen in dem *Prooemium* zu den *Comm. ar.* abgedruckt.

2) Comment. Petrop. **12** ad ann. 1740 (1750), p. 222. Erst durch Jacobis Brief hat Fuss von dieser Abhandlung Kenntnis erhalten, siehe *Comm. ar.* t. **1**, p. XXIV.

Die etwa zu machenden näheren Unterabtheilungen, ähnlich wie oben bei Algebra und Geometrie, habe ich im Vorstehenden nicht angedeutet, weil ich in diesem Augenblick den Inhalt der meisten Abh. nur nach dem Titel vermuthen kann, der bei Euler oft sehr täuscht, so daß es vielleicht in einer künftigen Liste zweckmäßig wäre, neben den Titeln in Klammern bezeichnendere zu setzen.

Ich glaube es wäre gut, wenn Sie Ihre Eulersche Thätigkeit vorläufig auf die bisher erwähnten Capita beschränkten. Die langweiligsten aller Eulerschen Arbeiten sind die dioptrischen, die noch dazu in zahlloser Menge und von unendlichem Umfang sind. Ob es lohnen wird, einmal auch diese zu drucken, weiß ich nicht. Ich glaube aber, daß das bisherige füglich als ein Ganzes erscheinen kann, etwa unter dem Titel: *Euleri Scripta minora mathematica et mechanica*, oder *mathematica, mechanica, astronomica*. Es würden dies etwa 20 Bände in der Art der *Opp. Arithmetica* sein, also etwa 20000 Silberr. kosten. Hätten Sie den Leuten nicht mit Ihren 80000 R. solchen Schreck gemacht, so wären wir vielleicht schon etwas weiter. Es wäre ja damit, wenn dies absolvirt, unbenommen gewesen, das andere hinzuzufügen. Es wäre interessant und wichtig, wenn Sie darüber einen genauen Anschlag machten, in der Art, daß Sie jede Seite der Comm., N. Comm., Acta, N. Acta und der Mém., der *Opusc. V. Arg.*, der *Opusc. Anal.* nach den in den *Opp. Arithm.* gemachten Erfahrungen auf den Wert reduciren, den sie in der neuen Ausgabe erhält, so daß Sie bei jeder Abh. sogleich ihre Seitenzahl in der neuen Ausgabe haben. Wahrscheinlich haben Sie dies schon gemacht. Erst dann könnte man an die Lösung der schwierigen Aufgabe gehen, Bände von beinahe gleichem Umfange zu machen, von denen jeder ein für sich abgeschlossenes — auch besonders käufliches — Ganzes bilden. Ich meinerseits kann ohne eine solche Vorarbeit eigentlich Ihnen weder einen Rath geben noch eine Ansicht haben. Was ich im Vorigen gethan, war nur für mich selbst, um mich in der von Ihnen zu lösenden Aufgabe zu orientiren. Nur muß ich von meinem Standpunkte das Prinzip festhalten, daß jede in sich gegründete Gruppirung bei der Herausgabe ein großer Vorzug des Werkes sein würde, der in ähnlichen Fällen nur der Schwierigkeit wegen aufgegeben wird, so daß man zur chronologischen Ordnung sich nur wie zu einem künstlichen System rettet, wenn man kein natürliches hat. Wenn zwei Stoffe gar keine oder fast gar keine Verbindung untereinander haben, so hat es kein Interesse, sie durch die chronologische Ordnung zu vermengen, wie dies z. B. in den *Opp. Ar.* mit der *Diophantischen Analysis* und der *Zahlentheorie* geschehen ist.

Ergänzung meiner Liste aus den Protocollen der alten Akademie*).

Ich habe mir die Mühe gegeben, noch einmal die alten Protocolle durchzusehen, um vielleicht einige der von Ihnen gestellten Fragen beantworten zu können. Ich bemerke aber, daß sich in diesen Protocollen durchaus nur die Titel und zwar ziemlich oberflächlich angegeben finden, so daß ich keine auf den Inhalt bezügliche Frage beantworten kann. In den drei dicken Foliobänden, welche copirte Msc. Eulerscher Abh. enthalten sind die Titel, wo sie von den gedruckten abweichen, mit denen in den Protocollen übereinstimmend.

1749 9. Oct. *De serierum Determinatione* (?!) [No. 124?]
NB. 1749 4. Dec. heißt im Titel *non sphaerica*.

1751 2. Sept. M. Euler a lu un mémoire concernant *une Machine Hydraulique de l'invention de M. Segner, Membre de l'Académie, par laquelle il semble qu'on produit un mouvement perpétuel.* [No. 578 oder 579?]

1751 7. Oct. *Du mouvement d'un corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile.* [No. 478 oder 477?]
NB. Beim 2. Dec. heißt die Abh. *Tent. th. de frictione solidorum* (nicht *fluidorum*).
NB. Vom 25. Juli 1752 findet sich ein kurzer Bericht Eulers über astronomische Instrum. von e. gewissen Brincken.

1752 9. Nov. M. Mérian lit un mémoire de M. Euler:
Harmonie entre les principes généraux de repos et de mouvement de M. Maupertuis. [No. 445.]

1753 25. Oct. *De frictione corporum rotantium.* [No. 555.]
NB. 1754 22. Aug. heißt die Abh. *Examen d'une* (nicht *de la*) *controv.* etc.
NB. 1754 6. Nov. wird J. A. Euler gewählt.
NB. 1755 12. Juni *De int. aequ. differentialium* (nicht *integralium*).
NB. 1757 29. Sept. *Rech. sur la déclinaison* (nicht *inclinaison*) (No. 740).
NB. 1758 27. Apr. *Remarques* (nicht *Recherches*).

1761 28. Mai. *Dilucidationes de tautochronis in medio resistente.* [No. 373.]
NB. 1763 ist die Juli-Abh. vom 15ten.

NB. Die Abh. 1764 18. Oct. die Euler vorlegt *Norma rat.* etc. ist wohl nicht von ihm selbst, wenigstens geht es nicht aus dem Protocoll hervor.

NB. Die Abh. vom Nov. 1764: *Sur le v. car. d. la Mus. mod.* ist vom 1. und 22., wo sie beendet wird.

*) Ich kann nur, wie Sie sehen, sehr wenigen Ihrer Wünsche durch das folgende genügen. Dieselben reduciren sich aber dadurch, daß Sie bei den Berl. Mém. nie auf den Jahrgang, sondern nur auf die Jahreszahl, wann sie erschienen, Rücksicht zu nehmen haben. Maup. bestimmte, was von den Abh. und wann es gedruckt werden sollte.

NB. Bei 1765 7. März heißt es: *M. Euler a achevé un mémoire sur l'int.* etc.; ich konnte aber nicht finden, wann es angefangen wurde zu lesen.

1766. 6. Febr. M. Bernoulli a lu deux Mémoires de M. Euler

1° *Nouvelle manière de comparer les Observations de la Lune avec la Théorie* No. 654,

2° *Sur la construction des objectifs composés, propres à détruire la confusion* No. 717.

So sind noch von 8 Eul. Abh. die Data hinzugekommen.

Genauere Angabe des Inhaltes der drei dicken Foliobände Msc., in welchen sich von fremder Hand copirt Abh. befinden, die in der Berl. Akademie gelesen sind, soweit dieser Inhalt die Eulerschen Abh. anbetrifft.

Die drei Foliobände sind von gleichem Einband, Format, Papier, aber von verschiedenen Copistenhänden. Das Datum wann sie gelesen, aber nicht der Autor, ist in den ersten beiden Bänden bei jeder Abhand. bemerkt; noch weniger ob und wo sie gedruckt ist. Die Ak. scheint die Copien der Abh., *wie sie gelesen wurden*, haben anfertigen lassen. Beim spätern Druck wurde dann noch manches, auch der Titel verändert. (In dem Statut der neuen Wiener Akademie ist der *Bull*, daß kein Akademiker im Druck etwas anderes als Druckfehler ändern darf. Hätte man die löbliche Einrichtung damals gehabt, so würde man jetzt die Mühe sparen, die Eulerschen gedruckten Abh. mit den handschriftlichen zu vergleichen.) Die Daten in den ersten beiden Bänden findet man mit den in den Protocollen angegebenen übereinstimmend; eben so die Titel. Ich habe mir die Bände der Novi Comm., wo die Abh. gedruckt sind, von der Bibliothek der Akad. geben lassen, um zu sehen, wo Änderungen im Druck gemacht sind. Wo dies nicht ist, habe ich u. g. (unverändert gedruckt) beigesetzt.

Der 1. Bd. enthält die im J. 1747, der 2. die im J. 1748 gelesenen Abh. mit Ausnahme einer einzigen; der dritte Bd. aus verschiedenen Jahren; nämlich

1751. 6 Abh. 7 Jan. 14 Jan. 4 März. 6 Mai. 17 Juni. 21 Oct. (1. 4. 5. 3. 17. 19.)

1752. 7 Abh. 27 Jan. 10 Febr. 9 März. 23 März. 22 Juni. 31 Aug. 28 Sept. (9. 18. 11. 21. 22. 10. 13.)

1753. 2 Abh. 12 Apr. 13 Sept. (6. 8.)

1755. 2 Abh. 3 Mai. 6 Juni (12. 7.)[1]

1758. 1 Abh. 9 Nov. (20.)

Die Nummern bedeuten die Folge, in welcher sie in dem Foliobande sich befinden. Die Abh. 14 und 16 sind vielleicht die am 9. Sept. 1751 gelesenen Abh., was man nur vermuthen kann, da im 3ten Bande kein Datum, wann die Abh. gelesen sind, beigefügt ist.

1) Die mit 12 bezeichnete Abhandlung ist nicht vom 3. Mai 1755, sondern vom 3. Mai 1753, s. p. 264 und p. 294 ad 12; die mit 7 bezeichnete ist nicht vom 6., sondern vom 26. Juni 1755, s. p. 293 ad 7 und p. 265.

Erster Band für 1747.

1. *Dem. g. th. Neut. in quo etc.* u. g.

2. *De numeris amicabilibus*, gänzlich vom gedruckten verschieden. Die letzten $2^1/_4$ Bogen enthalten die auch in der gedruckten Abh. befindliche *Tabelle für die Factorenzerfällung der Factorensummen der Primzahlen und ihrer Potenzen bis 1000.* Die übrige Abh. beträgt $4^3/_4$ Bogen (19 Folioseiten).

3. *Theoremata circa divis. num.* u. g.

4. *Rech. sur le mouv. des c. cél.* u. g.

5. **Découverte d'une Loi toute extraordinaire des Nombres.** Dies ist die von Ihnen so sehr gesuchte Abhandlung; sie ist 13 Folioseiten stark und eine erste Redaction der *Observatio de summis divisorum*, die E. unterm 6. April 1752 nach Pet. schickte zufolge Ihrer Angabe, während jene schon am 22. Juni 1747 gelesen war. Beide Redactionen sind im Ganzen und Detail durchaus nicht wesentlich verschieden, obgleich die lateinische auch keine Übersetzung aus dem französischen ist. Man könnte allerdings diese frühere Redaction dem 2. Theil der *Opp. Ar.* anhängen; man muß aber bedenken, wieviel Abh. schon ganz über denselben Gegenstand von E. zu drucken sind, unter denen eine ist, die vollkommen allein genügt hätte. Ich habe sie S. 345 meiner *Opera mathematica* zusammengestellt, wo ich aus Ihrer *Correspondance* ermittelt habe, daß E. seine merkwürdige Entwicklung wahrscheinlich schon Ende 1740 fand, indem er sie im Januar 1741 D. Bernoulli mittheilt. Auch habe ich sie später noch in einer Abh. der Comment. v. den Jahren 1741—43, die aber erst 1751 erschienen gefunden. Diese Abh. enthält zwei ziemlich von einander unabhängige Theile, von denen der erste combinatorischen Inhaltes ist, und sich mit der Erfindung der Potenzsummen und Combinationen mit Wiederholung der Wurzeln einer Gleichung beschäftigt; der andere aber *de partitione numerorum* handelt, und ganz ähnlich mit diesem Abschnitt in der *Introductio* und mit der Abh. in den Novi Comm. ist, die Sie schon abgedruckt haben. Es befindet sich hierin noch keine Anwendung auf die Factorensummen, die er erst 1747 gemacht zu haben scheint. Er theilt dieselbe auch an d'Alembert in einem größern Briefe vom 15. Febr. 1748 mit, dessen Original Hr. Dr. Friedländer besitzt, der mir erlaubt hat, eine Abschrift davon zu machen.

Die Tabelle S. 149—150 der *Opp. Ar.* ist in der französ. Abh. bis $\int 20$ statt bis $\int 12$ fortgesetzt; zu dem Beispiel für $\int 101$ ist im franz. M. das Beispiel für $\int 301$ hinzugefügt. Dies ist die hauptsächlichste Abweichung der *Décour. d'une Loi* von der *Observatio de summis divis.* [No. 17].

Von dieser letzteren könnte man vielleicht ein genaueres Datum ermitteln als das in den *Opp. Ar.* angegebene. Denn sie scheint nichts anderes als das am 9. Sept. 1751 gelesene *mémoire concernant un théorème d'arithmétique* zu sein; das gleichzeitige *mém. de Stéreométrie* ist dann vielleicht die Abh. 14 im 3ten Volumen der Msc., wo die Abh. *Obs. d. s. d.* die Abh. 16 ist.

Ich möchte mir bei dieser Gelegenheit noch erlauben, Ihnen zu sagen, warum ich mich so für diese Eulersche Entdeckung interessire. Sie ist nämlich der erste Fall gewesen, in welchem Reihen aufgetreten sind, deren Exponenten eine arithmetische Reihe *zweiter* Ordnung bilden, und auf diese Reihen ist durch mich die Theorie der elliptischen Transcendenten gegründet worden. Die Eulersche Formel ist ein specieller Fall einer Formel, welche wohl das wichtigste und fruchtbarste ist, was ich in reiner Mathematik erfunden habe,

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots(z-z^{-1})(1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\ldots$$
$$(1-qz^{-1})(1-q^2z^{-1})(1-q^3z^{-1})\ldots$$
$$= z - z^{-1} - q(z^3-z^{-3}) + q^3(z^5-z^{-5}) - q^6(z^7-z^{-7}) + q^{10}(z^9-z^{-9})\ldots,$$

wo die Exponenten von q, 1, 3, 6, 10 etc. die *dreieckigen* Zahlen sind. Setzt man für z eine imaginäre *Kubikwurzel* der Einheit: so erhält man die Eulersche Formel. Hierdurch habe ich sie mit der *Trisection* der elliptischen Integrale in Verbindung gebracht. Differenziirt man nach z und setzt dann $z = 1$, so erhält man auch für den *Kubus* des Eulerschen Productes die schöne Entwicklung,

$$\{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)\ldots\}^3 = 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - 11q^{15} + \text{etc.}$$

Dies mag wohl in der Analysis das einzige Beispiel sein, daß eine Potenz einer Reihe, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, wieder eine solche Reihe giebt.

6. *De reductione linearum curvarum ad arcus circulares.* **u. g.**

7. **Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires.** 19 Folioseiten, ganz verschiedene Redaction.

8. *Méthode pour trouver les vrais moments tant des nouvelles que des pleines Lunes.*

Diese Abh. enthält die in den Berl. Mem. **III** pg. 154 gedruckte, zu der nur im Druck der Schlußsatz hinzugefügt ist: J'ai cherché ces corrections sur un grand nombre d'Eclipses de la Lune, et c'est après ces corrections que sont dressées les tables, qui se trouvent dans l'Almanac Astronomique pour l'année 1749. Dafür folgen im Msc. noch 16 §§, etwas über 10 Folios. Man ersieht aus der Abh. B. M. **III.** pg. 250, daß diese im Berliner Almanach abgedruckt sind, ob mehr oder weniger wörtlich, kann ich nicht sagen, da ich ihn nicht bei der Hand habe. Ist dieser Almanac Astr. in Bezug auf die Eulerschen Arbeiten unter-

sucht? Ihr Vater notirt eine deutsche Abh. aus dem B. Jahrbuch f. 1783, wahrscheinlich eine Übersetzung Ihrer No. 627, die Sie deshalb nicht in Ihre Liste aufgenommen haben mögen.

In den Protocollen vom 5ten October 1746 finde ich, daß Maupertuis verordnet, der Rechnungsgehilfe Schumacher solle nicht länger Ephemeriden berechnen, weil die Berliner Bb. den Pariser so unendlich nachstünden. Er solle lieber eine untergeordnete Arbeit machen, tel que serait les Ephémérides de la lune suivant la nouvelle Théorie de M. Euler comparée avec les autres. M. Euler s'est chargé de régler le tout en tems et lieu et de donner les directions nécessaires au Calculateur.

9. *Sur une contrad. app. dans la Th. d. courbes.* u. g.

10. *Sur le point de rebroussement etc.* u. g.

11. *Sur la force des rames.* u. g.

12. *Sur la parallaxe de la Lune.* u. g.

II. 1748.

1. *Suite du Discours* (d'un mémoire im Protocoll) *précédent laquelle contient une Démonstration sur le nombre des points etc.* u. g.

2. *Sur l'espace et le tems.* u. g.

3. *De vibratione Cordarum*, lat. Original, wörtlich im Druck übersetzt.

4. *Sur la Friction des corps solides;* im Msc. immer *friction* statt *frottement*, sonst u. g.

5. *Sur la perfection des verres obj. des lunettes* u. g.

6. *Sur l'accord etc.* u. g.

7. *De atmosphaera Lunae* etc., lat. Original der Abh. B. M. IV pg. 103. Der Anfang im Gedruckten ist schlecht übersetzt und könnte das Mißverständniß verursachen, als hätte E. selbst beobachtet:

En observant les momens de l'Eclipse etc.

Cum nuper momenta Eclipsis Solis, quam hic nobis die 25 praesentis mensis Julii observare contingebat, exposuissem etc.

Sonst wörtlich übersetzt.

8. *Recherches sur les plus grands etc.* u. g.

III. Aus verschiedenen Jahren.

1. *De methodo Dioph. analoga.* u. g.

2. *Dem. th. Ferm omnem n. p. formae $4n+1$ esse summam duorum quadratorum.* u. g.

Diese Abh. ist mit der unten folgenden 17 im Druck verbunden, ohne daß E. fortlaufende §§ gemacht hat, so daß die neue 1 bei der Paragraphirung zeigt, wo 17 anfängt Es ist nur der Titel von 17 fortgeblieben, woraus der Übelstand entsteht, daß man jetzt aus Ihrer Liste nicht errathen kann, wo der berühmte Satz steht, daß die Summe

von 4 □ mit der Summe von 4 □ multiplicirt wieder die Summe von 4 □ giebt. Dieser Titel wäre im Index der *Opp. Ar.* deshalb beizufügen. Hiernach wäre das in meinem vorigen Briefe gesagte zu berichtigen, was ich wahrscheinlich aus dem Kopfe geschrieben, ohne die N. C. bei der Hand zu haben. Ich sagte Ihnen, E. erzähle in der Abh. 17, er könne noch nicht beweisen, daß jede Primzahl $4n+1$ die Summe 2 □ sei, während er doch gerade sagt: cuius th. veritatem nuper tandem post plures conatus demonstravi.

Es läßt sich hiernach das Datum der zweiten Hälfte genau feststellen als den 17 Juni 1751. Ich vermuthe, daß die erste Hälfte die am 15. Oct. 1750 gelesene Abh. ist, während die Abh. S. 155 der *Opp. Ar.*, die am 20. März 1749 unter demselben Titel: de numeris qui sunt etc. 2 □ gelesene sein mag. Die Abh. vom 9. Sept. 1751, die ich in meinem früheren Schreiben für die *Dem. th.* Fermat. hielt, halte ich jetzt, wie oben bemerkt worden, für die *Observ. d. s. divis.*

3. *Rech. sur le mouv. des rivières.* **u. g.**

4. *Meth. inv. infin. c. isoperim. aliave c. pr. praeditas.* **u. g.**

Vielleicht die am 14. Jan. 1751 gelesene, *sur le probl. isoperimètre.*

5. *Rech. sur les divers degrés de Lumière. etc.* **u. g.**

6. *Essai d'une expl. Phys. des couleurs etc.* **u. g.**

7. *Rech. pour servir à la perfection des lunettes*, ungedruckt, gelesen 26. Juni 1755, 58 enggeschriebene Folioseiten in 169 §§ und 5 Sectionen. Die Abh. ist daher mit dem Brief Ihrer No. 713 nicht identisch. Sie fängt an: Quoique le hazard ait produit la découverte des lunettes und schließt: Mais puisque le champ apparent devient fort petit, je ne m'arrète pas à développer plus amplement ce cas.

Sect. I handelt 1) De la représentation distincte, 2) De la r. claire, 3) Du grossissement des objets, 4) De la quantité du champ apparent. Dann Considér. gén. sur les lunettes à plusieurs verres, enth. 1 Lemma und 4 Coroll.: La distance du foyer d'un verre étant donnée, trouver le lieu et la grandeur de l'image qu'il représente lorsque l'objet se trouve à une distance donnée du verre; 1 Probl. mit 6 Cor.: Autant de verres qu'on voudra étant disposés sur l'axe OZ en A, B, C, D, E, devant lesquelles se trouve un objet O, trouver tant le lieu que la grandeur des images, qui seront superposées par tous ces verres, 2 Probl. mit 2 Cor. und 2 Sch.: Les verres étant disposés d'une manière quelconque, comme dans le problème précédent, trouver la forme du cône lumineux qui est transmis par tous les verres de chaque point de l'objet.

Die Sect. II—V beziehen sich auf Lunettes mit 2, 3, 4, 5 Gläsern. Sie zerfallen in mehrere Unterabtheilungen, die sich auf die einzelnen Buchstaben der allgemeinen Formeln, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, etc. beziehen.

Ich schreibe Ihnen dies so ausführlich, damit Sie die Abh. mit Ihrer handschr. Abh. über Dioptrik vergleichen können.

8. *Th. plus compl. des Machines qui sont mises en m. par la réaction de l'eau.* u. g.

9. *Obss. de Compar. Arc. Curv. Irrectif.* u. g.

10. *De motu fluidorum in genere.* u. g. Dies ist die Abh. *Principia motus fluidorum*, so daß von dieser Abh., welche so überaus wichtig geworden, das genaue Datum 31 Aug. 1752 aus den Protocollen feststeht. Im Msc. fehlt noch die Überschr. *Pars Prior*; dagegen befindet sich wie im Druck die Überschr. *Pars Secunda* bei § 39. Außerdem fehlen im Msc. die letzten 6 Zeilen, so daß es *atque adeo multo latius patens* schließt.

11. *Subsid. C. Sinuum.* u. g.

12. *De res. aequ. cuiusvis generis.* u. g.

13. *Détermination de l'effet d'une machine hydraulique inventée par M. Segner Professeur à Gottingue, gel. 28 Sept. 1752.* Nur die Einleitung dieselbe, sonst gänzlich verschiedene Redaction, obgleich die gedruckte in demselben Jahre erschienen ist, wo die Hdschr. und zwar erst im Sept. gelesen wurde.

14. *Dem. nonn. insignium propr. quibus solida etc.* [No. 320] u. g., vielleicht die am 9. Sept. 1751 gelesene; sie enthält den quasi Beweis der am 26 Nov. 1750 gelesenen, die vor ihr in demselben Bande **IV** gedruckt ist.

15. *Dem. th. circa ordinem in summis divisorum obs.* u. g. Enthält zuerst den Beweis der Entwicklung von $(1-x)(1-x^2)\ldots$; ein Meisterstück. Datum unbekannt; in demselben Bande wie die folgende.

16. *Obs. de summis divisorum.* [No. 17.] u. g.; hier verzweifelt er noch diesen Beweis zu finden; vielleicht die am 9. Sept. 1751 gelesene.

17. *Demonstratio theorematis Fermatiani omnem numerum sive integrum sive fractum esse summam quatuor pauciorumve quadratorum.* u. g. Dieser Titel wäre zu dem Titel von 2 im Index der *Opp. Ar.* in Klammern beizufügen (una cum Demonstratione etc.) S. oben zu 2.

18. *Nouv. méth. d'éliminer les qu. inc. des équ.* u. g., obgleich E. sie 10 Jahre liegen gelassen.

19. *De cochlea Archim.* u. g.

20. *Du mouvem. d'un Corps solide quelconque, lorsqu'il tourne autour d'un axe mobile.* u. g., nur daß im Druck nach den 56 §§ *drei* andere, bestehend in 2 Cor. und 1 Remarque hinzugefügt sind. [No. 478.]

21. *De aptissima figura rotarum* etc. u. g.

22. *De la Réfr. de la lumière en passant etc.* u. g.

(23. *De draconibus volantibus* von J. A. Euler; existirt noch einmal nebst fr. Übers.)

Die kleinen Berichte von Euler werde ich Ihnen schicken, wenn Sie bestimmt haben werden, was Sie haben wollen. Alle andern Msc. sind die aus der Druckerei zurückgekommenen Originale abgedruckter Abh., so daß sie nur das Interesse der Handschrift haben.

Conclusion.

Es fragt sich nun, was soll ich Ihnen schicken? Es steht Ihnen natürlich alles zu Diensten. Aber das was Sie brauchen könnten, läßt sich nicht detachiren, und Sie müßten daher die Mühe übernehmen, die drei überaus dicken Volumina, die eine Menge Nicht-Euleriana enthalten, kommen zu lassen. In diesem Falle würde ich Sie bitten, gleichzeitig mit der Anzeige besondere Instructionen an Voss in Leipzig zu ertheilen, da er ohne solche dergleichen dicke Sendungen auszuführen zaudert. Vielleicht ziehen Sie es aber vor, das was Sie interessirt, hier abschreiben zu lassen, was mit einigem sogleich, mit anderem vielleicht später geschehen könnte.

Als Grundsatz werden Sie wohl festhalten, *daß von allen Abh., die in französ. Übers. gedruckt sind, von denen aber die lateinischen Originale noch existiren, die letzteren in der neuen Ausgabe gedruckt werden.* (Die Übersetzungen hat wohl immer der treffliche Formey gemacht.) Es würden daher copirt werden müssen:

II. 3. *De vibratione Cordarum* $14^1/_2$ Folios.
II. 7. *De atmosphaera Lunae* etc. $20^1/_2$ Folios. } 35 Fs.

Ferner könnte diejenigen Abh. zu copiren interessiren, welche erste Redactionen sind. Hiezu gehören

I. 2. *De numeris amicabilibus* 19 Fs.
I. 5. *Découverte d'une Loi t. e. d. n.* 13 Fs.
I. 7. *Sur les log. etc.* 19 Fs.
III. 7. *Recherches pour servir à la p. des L.* 58 Fs.
III. 13. *Det. de l'effet etc.* 32 Fs. mit 10 Figuren. } 141 Fs.

Für die *Opp. Ar.* würde nur die I. 2. 5 (32 Fs.) zu copiren Interesse haben, oder gar nur die I. 5. Wenn Sie, *was ich jetzt doch für das bessere halte,* zunächst in die *Geometrica* und *Algebraica* gehen, käme noch I. 7 hinzu. Also bestimmen Sie, ob Sie die ganzen Volumina (die das Unangenehme haben, daß sie nicht paginirt sind) dorthin haben, oder was Sie abgeschrieben haben wollen. Übrigens sehen Sie, auf wie weniges sich das reducirt, was wir Ihnen von hier aus bieten können.

Über die Opp. Arithm.

Ich will Ihnen jetzt einige zerstreuten Bemerkungen und Fragen über die *Opp. Arithm.* machen, und dann einige Vorschläge über die Anordnung

eines Inhaltsverzeichnisses, damit man nicht immer die Titel sämmtlicher Abh. durchzublättern braucht, um etwas zu finden. Die arab. Nummern beziehen sich auf Ihre Liste, die römischen auf das Inhaltsverzeichniß des ersten Bandes Ihrer *Arithmetica*.

1. Werden die Abh. No. 93 *De res. irrat. per fractiones contin.* und No. 139 *Nova ratio qu. irr. proxime exhibendi* hineinkommen? (ich kann sie nicht beurtheilen, da ich die N. Comm. nicht habe).

2. Sollte nicht die Abh. 146 vielleicht aufzunehmen sein, die weniger des Inhaltes wegen als der Methode zu einigen Abh., welche sich mit der Rationalmachung von $\sqrt{a + bx + cx^2}$ beschäftigen, zu gehören scheint? So ist schon XXVIII [No. 140] aufgenommen, die auch rein algebraischer Natur ist, da nur zu den Beispielen ganze Zahlen genommen sind, alles sich aber auf allgemeine Größen bezieht, welche Aufnahme jedoch sehr zweckmäßig ist, da die dort gebrauchte Methode gerade in der Zahlentheorie von großer Wichtigkeit ist.

3. Die Abh. XXVII [No. 34] würde wohl besser zur *Wahrscheinlichkeitsrechnung* gerechnet worden sein, das arithmetische darin ist von gar keiner Consequenz.

4. Die Abh. über den Springerzug [No. 84] rechnen einige, wie Gauss, zur *Geometria Situs*, worüber die Eulersche Abh. in den alten Comm., ob man über alle Brücken des Kniephofs in Königsberg so gehen kann, daß man keine zweimal passirt [No. 302]. Gauss scheint sich viel mit dieser *Geom. Situs* noch in der allerletzten Zeit beschäftigt zu haben. Doch hat Legendre davon in seiner *Th. d. N.* gehandelt.

5. Die Abh. No. 166 *De serie Lambertiana* gehört wahrscheinlich auch in die *Opp. Ar.*

6. Daß die No. 167 *Evol. prod. inf.* $(1-x)(1-x^2)\ldots$ hineinkommt, versteht sich wohl von selbst, da sie genau zu denen *über die Factorensummen* gehört. Sie möchten denn absichtlich, wenn über einen Gegenstand, der seiner Natur nach zweien Zweigen angehört (Zahlentheorie und Reihen), mehrere Abh. geschrieben sind, diese auf die verschiedenen Zweige vertheilen wollen, was sich auch hören ließe. (Hätten Sie mir eine Abschrift des Inhaltes des 2. Theiles geschickt, würde ich Sie nicht mit so viel unnöthigen Fragen belästigen.)

7. In den Briefen*) von J. A. Euler (von denen ich freilich nicht den zehnten Theil in Kopfschmerzstunden durchblättert habe) jammert dieser fortwährend, daß sein Vater nichts als die *magischen Quadrate* im Kopfe habe, und daß die Abh. darüber so endlos würde, daß die Pet. Ak. in Verlegenheit wäre, sie zu drucken. Wir sehen auch in der That, daß

*) Es ist darin einmal Cagliostro erwähnt; Goethes Freund Lenz, der in Moskau wahnsinnig starb, verkehrte viel beim alten und jungen Euler.

sie in einer holl. Zeitschrift (No. 85) erschienen ist. Vielleicht wissen Sie, wie dies gekommen ist.

7[a]. Die unbekannte Abh., auf die sich Euler in XVIII beruft, ist vielleicht die am 8. Juni 1758 gelesene, *Theoremata arithmetica nova methodo demonstrata*. S. 357 Z. 9 des Vol. I der *Opp. Ar.* ist das Citat wahrscheinlich *Introd. i. A.* I Cp. 15, § 279.

Die Fortsetzung dieser Bemerkungen s. nach dem folgenden

Inhaltsverzeichniß.

Ich will Ihnen das Inhaltsverzeichniß des 1. Bandes der *Opp. Ar.* mittheilen, wie ich es zu meinem Gebrauche geordnet habe, jedoch ohne die Titel beizuschreiben.

A. *Diophantische Analysis.* VIII. XIV. XVII. XVIII. XXIX—XXXIII. XXXVI. (II rechne ich nicht dazu.)

B. *Aufl. der unbest. Gleich. des 1" Grades.* III.

C. *Aufl. der unbest. Gl. des 2" Grades. Pellsche Gleichung.* II. XXII. XXIII. XXVIII. XXXIX.*)

D. *Über die quadratischen Reste und die Theorie der quadratischen Formen.* VI. XII. XIII. XV. XXI. XXII. XXXIV. XL.

E. *Allgemeine Theorie der Potenzreste.* I. IV. VII. XIX. XX. XXXV. XXXVII. XLI.

F. *Zerfällung der Zahlen in vier Quadrate (drei 3eckige, vier 4eckige, fünf 5eckige etc.)* XV. XXXVIII.

G. *Erforschung großer Primzahlen; Primzahltafeln.* XXV. XXVI.

H. *Über ein recurrirendes Gesetz der Factorensummen mit Anwendung der 5eckigen Zahlen.* XI. XVI.

J. *Gleichungen, welche in ganzen Zahlen nicht Statt finden können.* V.

K. *Theilung der Zahlen.* IX. XXVII.

L. *Vermischtes (Freundschaftliche Zahlen, Springerzug, magische Quadrate)* [X]. XXIV.

NB. Die Abh. XXII besteht aus zwei wesentlich verschiedenen Theilen, welche nur ganz äußerlich mit einander verbunden sind, von denen der zweite S. 310 oben bei Observ. 5 anfängt. Ich habe sie daher doppelt bei C und D aufgeführt.

Es würde wohl zweckmäßig sein, in jedem Inhaltsverzeichniß bei jeder Abh. auf andere zu verweisen, wo derselbe Gegenstand behandelt wird, wenn sie auch noch nicht in der neuen Sammlung erschienen sind,

*) Nach C müßte in einer neuen Abtheilung die Aufl. der Gl.

$$y^2 (ax^2 + bx + c) + y (a' x^2 + b'x + c') + a'' x^2 + b''x + c'' = 0$$

oder die Rationalmachung von $\sqrt{(\alpha x^4 + \beta x^3 + \ldots \varepsilon)}$ kommen; steht in inniger Verbindung mit der Theorie der elliptischen Integrale.

oder sich in einzelnen Kapiteln der größeren Werke befinden. So könnte bei XVIII auf XXI verwiesen werden; bei der Abh. *de partitione numerorum* auf das entsprechende Kapitel der *Introductio* und auf die oben bereits erwähnte Urabhandlung in den Comm. von 1741—43, auf die auch bei H verwiesen werden müßte.

Es wäre wünschenswerth, wenn Sie Ihre und Ihres Vaters Theorie bei der Bestimmung der Jahreszahlen vereinigten und bei jeder Abh. im Verzeichniß neben der Jahreszahl, wann sie geschrieben, auch die angäben, wann sie publicirt wurde. Das eine ist für die Geschichte der Eulerschen Arbeiten, das andere für die Geschichte der Arbeiten anderer von Interesse. Aus dem Briefwechsel ersieht man dann bisweilen, welche Privatmittheilungen, die oft zwischen dem einen und dem andern fallen, Euler gemacht hat. In den Comm. scheint in den einzelnen Jahrgängen strenge nur das aufgenommen worden zu sein, was wirklich in dem betreffenden Jahre gelesen worden. Es wäre von Wichtigkeit dieses festzustellen*). Die Berliner Ak. ist ganz von diesem Prinzip abgewichen, und enthält sehr oft spätere Abh. als die Jahreszahl des Bandes.

Ich komme noch einmal auf das NB zurück, um die Frage zu stellen, ob es nicht ausführbar wäre, bei diesen Verweisungen auch auf Ihre *Correspondance* Rücksicht zu nehmen. Einige Mühe würde es wohl machen, aber den Werth des Verzeichnisses sehr erhöhen.

Fortsetzung der obigen Bemerkungen.

8. Wollen Sie sich nicht für den 2. Theil der *Arithmetica* von der Pariser Akademiebibliothek eine Copie der beiden Eulerschen Briefe an Lagrange erbitten, die Legendre in der *Théorie d. N.* 2ter Theil S. 142 erwähnt? Legendre war damals sehr begierig zu wissen, ob sich nichts über die darin erwähnten Probleme unter Eulers Papieren finde, was ich Ihnen glaub' ich vor langer Zeit geschrieben.

9. Gehört etwas von den Eigenschaften der Binomialcoeff. (etwa No. 136) in die *Opp. Ar.*?

10. Die Abh. 161 muß wohl auch hinein, und würde bei F im Index unterzubringen sein {ist darin}.

11. Die Abh. 168 gehört ebenfalls in die *Opp. Ar.*; sie würde einen Abschnitt bilden: *Anwendung der unendlichen Reihen und Producte auf die Zahlentheorie*, der in neuester Zeit durch Dirichlet einer der sublimsten Zweige der Mathematik geworden ist, und sich gänzlich auf das 15. Kapitel der *Introductio* basirt, worauf hierbei zu verweisen wäre.

*) Was mir mittels Ihres Briefwechsels bei einigen historischen Untersuchungen gelungen ist.

12. Die Abh. Nr. 81 und 82 würden Sie im zweiten Bande wohl fortzulassen haben.

13. Auf die Abh. XXX wäre bei *Geometrie* zu verweisen, da sie wichtiger für die Transformation der Coordinaten als für die Zahlentheorie ist.

Systematische Liste.

Das Wichtigste was Sie für die Mathematik thun können, wäre möglichst schnell an die 2. Ausgabe der systematischen Liste zu gehen. Die Sache ist so schwer, daß es gar nicht zu hoffen ist, daß selbst diese 2. Ausgabe so vollkommen wird gemacht werden können, daß nicht später einmal noch einmal eine dritte gemacht werden könnte. Aber hierfür würden Sie den Satz der 2. stehen lassen können, während von der 1. Ausgabe nur wenige Parthien stehen bleiben könnten. Sie ist in der That nur, eine zwar sehr große, aber doch nur eine Vorarbeit zu einer systematischen Liste. Was können einem 5 enggedruckte Seiten *Titel* von Abh. über *Reihen*, 8 desgleichen über *Integralrechnung* helfen. Man erhält danach kein bestimmtes Bild von Eulers Thätigkeit, und es ist fast unmöglich unter einer halben Stunde etwas zu finden. Lassen Sie sich davon nicht abschrecken, daß bei einigen Abh. die Rubrizirung zweifelhaft ist; es kommt hier nur darauf an, zuerst etwas bestimmt hinzustellen, so daß Verbesserungen nur bei Einzelnem zu machen sind. Je mehr Sie gruppiren und Unterabtheilungen bilden, desto wichtiger wird Ihre Arbeit. Der bloße Anblick Ihrer Überschriften muß das Gerippe einer mathematischen Encyklopädie darstellen, so daß man auch bei Arbeiten anderer Mathematiker gleich weiß, wo sie einzufügen sind. Dann wird Ihre systematische Liste für die Geschichte der Mathem. überhaupt von der größten Wichtigkeit sein, und man bei jedem Kapitel derselben gleich die Stelle bestimmen können die Euler darin einnimmt. In dem Index der Arith. habe ich angedeutet, wie ich es mir denke. Dies wurde freilich hier viel leichter, wo man die Abh. zusammengedruckt vor sich hat; aber es hindert ja nichts, der Liste ihre letzte Vollendung nach Beendigung der Herausgabe des größeren Theils der gesammelten Werke zu geben. Bis dahin wird umgekehrt eine solche 2. Ausgabe, so gut wie Sie sie jetzt machen können, die wichtigste Hilfe für die Herausgeber sein. In die Liste wären wohl auch die Übersetzungen aufzunehmen. Ich weiß nicht ob Ihnen bekannt ist, daß erst neulich von einem der Rechner der Berl. Sternwarte Dr. Wolfers die alte Mechanik übersetzt worden.

Folgen **Varia Euleriana.** Denn, da dieser Brief schon so lang ist, ist kein Grund vorhanden, warum er nicht noch länger sein soll.

Die 2. Ausgabe der Theoria Motus Corporum Rigidorum.

Sie läugneten mir einmal die Existenz dieser 2. Ausgabe ab[1]). Zur Strafe gebe ich Ihnen für den Fall, daß sie noch nicht in Ihren Besitz gekommen ist, die nähere Beschreibung.

Die Ausgabe führt auf dem Titel den Zusatz *Editio Nova, Desideratissimi Autoris supplementis locupletata et emendata.* Sie ist vom Jahre 1790, von demselben braven Greifswalder Buchhändler Anton Ferdinand Röse veranstaltet wie die erste und mit einer 2 Seiten langen Vorrede begleitet, worin er sagt, daß die wenigen Exemplare, die er abgezogen (E. sagt in einem Briefe an D. B.[2]) er könne ihm kein Exemplar schicken, da er selbst nur ein Paar Freiexemplare erhalten) in 25 Jahren vergriffen seien. Ihr Großvater habe ihm zur Bereicherung der neuen Ausgabe 6 Abh. geschickt. Die 2. ist Zeile für Zeile wie die erste, nur ist das $3^1/_2$ Seiten lange *Supplementum* am Ende der alten Ausgabe an der bezeichneten Stelle am Ende von § 761 eingefügt, aber so gedankenlos, daß die Worte: Verum hic fateri cogor, ulterius me hanc resolutionem prosequi non posse; neque ergo hoc problema ad finem perducere licet nebst der Note Plena solutio in fine adjicietur beibehalten sind, die fortfallen mußten. Vor dem *Supplementum* S. 447 sind als *Additamentum* die Abh. No. 468. 469. 494 eingefügt (von denen die beiden ersten ganz verloren gegangene Formeln für die Transformation dreier rechtwinkliger Coordinaten enthalten, die mit denen von Monge große Ähnlichkeit haben und später von Gergonne in seinen Annalen wiedergefunden sind. Ich habe sie im 2. Bande des Crelleschen J. S. 108 Eulern restituirt, und seitdem ist sehr viel darüber geschrieben; endlos von Grunert in seinem *Wörterbuch.* Auch Ihr Vater hat eine Abh. darüber. So würde man in *Geometrie* unter Transf. d. Coord. auf den 2. Theil der *Introductio,* diese beiden mechan. Abh. und Abh. XXX der *Opp. Ar.* zu verweisen [haben].) Ferner sind am Ende des Werkes die Abh. No. 466. 495. 481 angefügt. In der Vor-

1) Jacobi hatte am 14. Mai 1843 seinem Bruder Moritz geschrieben: „Dirichlet sagt, er besitze *eine zweite Ausgabe* von *Eulers theoria motus corporum rigidorum* (er besitzt auch die erste) von der ich nie gehört und die auch Fuss bei Eulers Werken nicht aufführt. Grüße Fuss, dem Du dies sagen kannst, auf das eifrigste von mir." *Briefw. Jacobi*, p. 97.

2) Mit D. B. ist jedenfalls Daniel Bernoulli gemeint. Aber in dem unveröffentlichten Briefe Eulers an Daniel Bernoulli vom 22. Nov. 1767, dem einzigen aus der Zeit nach dem Erscheinen der *Theoria motus*, der uns noch erhalten ist (Herzogliche Bibliothek zu Gotha, cod. chart. B 689), ist (nach einer Mitteilung von Herrn Prof. Dr. R. Ehwald in Gotha) von diesem Werke nicht die Rede. Die drei anderen bis jetzt aufgefundenen Briefe Eulers an D. B. hat G. Eneström abgedruckt, Bibl. Math. (3) 7 (1906/7), p. 126; dieser vermutet, daß Jacobi die Briefe bei Libri (p. 252) gesehen habe, der Stücke aus dem Nachlaß Daniel Bernoullis besessen hat.

rede von Karsten zur alten Ausgabe ist die Notiz interessant, daß Eulers Integralrechnung schon 1763 zum Druck fertig war (ob das Ganze?), daß er aber keinen Verleger finden konnte; ferner daß E. bei Herausgabe des Werkes die 2. Abh. von d'Alembert im 1. Bande seiner *Opuscules* v. J. 1761 nicht kennt. D'Al. äußert sich sehr giftig irgend wo über Eulers Rivalität in der Theorie der Präcession, der erst anerkennt, daß er durch ein (früheres) Mémoire von d'Al. darauf gekommen, und dann davon immer nur als von seiner Erfindung rede.

Von der Abh. von d'Al. über die schwingenden Saiten, die Euler nicht hat in die Berl. Mem. aufnehmen lassen und damit das Verhältniß zu d'Al. abbrach (nach den Briefen von D. B. erfolgte bei d'Al. Besuch in Berlin eine Versöhnung), habe ich jetzt das Original (das früher von mir gefundene Msc. war eine von Seiten der Ak. gefertigte reinliche Copie) von d'Al. aufgefunden, wo er vieles corrigirt hatte, und zwar nicht bloß im Stil, sondern alle Höflichkeitsbeweise. So hat er immer das *grands* bei Géomètres weggestrichen, wenn von E. und D. B. die Rede war. Es war allerdings etwas impertinent, ein solches Msc. nach Berlin zu schicken, und es mag dies wohl E. mehr geärgert haben, als die Sache selbst. Ich werde Ihnen die Abh. Ihrem Wunsche gemäß gelegentlich schicken.

Von der Bitterkeit zwischen d'Al. und E. zeugen zwei Stellen in den B. M.: Im Bande für **1765** S. 313 sagt E.: M. d'Alembert dira, sans doute, qu'il réfutera ma solution dans quelcun de ses ouvrages qu'il publiera dans la suite, et il se contentera pour le présent d'en avertir le public. Diese Stelle citirt d'Al. Band für **1763** S. 240, indem er an Lagrange schreibt: Je passe sous silence la plaisanterie qu'il (Euler) essaye de me faire pg. 313, parceque l' essentiel n'est pas ici de plaisanter. Vous, Monsieur, qui m'avez quelque fois combattu avec raison (sic!) et sans plaisanter etc. Es scheint uns jetzt unglaublich, wie bornirt und verrannt d'Al. bei der schwingenden Saite war. — Der Band für 1763 ist später als die vier folgenden erst im J. 1770 zugleich mit dem Bande für 1768 erschienen; auch enthält er Abh. die im J. 1769 gelesen sind. Woher die Confusion, läßt sich nirgends finden. Seit Mitte von 1750 hörte der historische Theil auf und im 1. Bande der Nouvelles Mémoires, wo die Geschichte resumiert wird, findet sich darüber keine Notiz.

Die Berliner Ak. hat im J. 1763 in Kleinfolio einen Schulatlas von 41 Karten herausgegeben, wozu Euler eine ziemlich lange Vorrede geschrieben hat, die sich hauptsächlich über die dort befolgte Projectionsart

ausläßt *(Atlas Geographicus etc.)*. Ich habe ihn nicht gesehen, aber eine franz. Übersetzung der Eulerschen Vorrede.

Der Preisschrift v. Clairaut über die Mondtheorie, welche die Petersb. Akad. im J. 1752 herausgab, ist ein Auszug der Eulerschen Concurrenzschrift, welche den Preis nicht erhielt (obgleich sie die Aufgabe ebenfalls löst), beigefügt:

Recensio theoriae Eulerianae motus atque anomaliae Lunae, in Conventu Ac. Sc. Imp. publicatae, die 7 Sept. 1752 biduo post solemnia dici Invict. Russiorum Imper. Elisabethae praelecta a N. Popow, in 4° 22 Seiten.

Journal littéraire de l'Allemagne.

Das Journal ist nicht so verschollen, wie Sie glauben, und jedenfalls anders als unsere heutigen Litteraturzeitungen. Es giebt sehr gute Auszüge der größeren Eulerschen Werke und auch vieler einzelner Abh., die nicht rein mathematisch sind. Es sind unter dem obigen Titel nur 4 Bände erschienen, vor und nachher führte es den Titel: Bibliothèque Germanique ou Histoire littéraire de l'Allemagne de la Suisse et des Pays du Nord. Dies Journal begann 1720, von einer *anonymen Gesellschaft* herausgegeben, die sich bei Lenfant versammelte und brachte es bis zu 50 Theilen. Nach dem Tode von Lenfant im J. 1728 übernahm[en] Herr v. Beausobre, der Vater, und Hr. Mauclerc die Leitung. Im J. 1734 associirte Beausobre sich Formey, der es nach Beausobres Tode 1738 mit Mauclerc allein herausgab. Als die zum 50. Bande gekommen waren, änderten sie den Titel in Journal Littéraire de l'Allemagne, von der 4 Bände erschienen waren, als Mauclerc starb, worauf Formey mit Hr. v. Perard sich associirte, und das Journal unter dem Titel Nouvelle Bibl. G. etc. fortsetzte. Es sind hiervon 25 Bände erschienen; der 26. enthält einen Generalindex. Einzelne Recensionen wie über Eulers Übers. von Robins *Artillerie*, Leupolds *Theatrum machinarum arithmeticarum* enthalten schätzbare eigene litterarische Untersuchungen des gelehrten Formey. Die kleine anonyme Eulersche Abh., die Ihnen Gauss abschrieb, scheint die einzige Originalabh. geblieben zu sein.

Haben Sie die bisher ungedruckte Eulersche Abh. im 35. Bde. S. 106 des Crelleschen J. gesehen?

In der *Geschichte* der B. A. v. J. 1784 pg. 9 wird E. *der neue Tiresias* genannt[1]).

1) In der Festsitzung der Berliner Akademie am 29. Januar 1784 gedachte deren Sekretär S. Formey des im Jahre zuvor gestorbenen ehemaligen Mitgliedes

Im 10. Bande der Berl. Ak. pg. 346 findet sich eine bemerkenswerthe halbe Seite von E.: *Avertissement.*

Ich habe Ihnen schon einmal von einem sehr guten (ich vermute von Formey verfaßten) handschriftlichen Index zu den Berl. Memoiren geschrieben. Er führt den Titel: *Table des Noms des Académiciens et autres auteurs qui ont fourni des Mémoires, des Observations, des Lettres etc. au Recueil des Miscellanea Berolinensia, des Mémoires et des Nouveaux Mémoires, de l'Académie R. d. Sciences et B. L. de Berlin jusqu'en 1786 etc. Avec les Titres ou l'indication du contenu de leurs écrits. De plus, les Noms des Académiciens titulaires, dont les Eloges seulement se trouvent dans ce Recueil. Enfin, les noms des Académiciens qui ont remporté des Prix sur des questions proposées par l'Académie, et les sujets de ces Prix.*

Hierin finde ich den Titel einer Eulerschen Abh., deren Auszug in der *Geschichte* zum 1. Bande S. 36—40 steht, folgendermaßen angegeben, was Ihnen von Interesse sein wird:

Précis de sa méthode de déterminer en rigueur géométrique, sans approximation, la position et l'espèce d'Ellipse, dans laquelle les Planètes se meuvent autour du Soleil: méthode par laquelle et au moyen des observations de Flamsteed il a calculé de nouvelles Tables du Soleil inserées dans le Tome VII des Commentaires de l'Acad. des Sc. de Pétersbourg.

Eine Abh. *Recherches des forces dont les corps sont sollicités entant qu'ils ne sont pas sphériques* ist von Euler Vater d. 23. Nov. 1758, von Euler Sohn d. 7. Nov. 1765 gelesen worden; letztere ist gedruckt, und erwähnt einer früheren Abh. des Vaters gar nicht, wie vom Sohn sonst zu geschehen pflegt. Wahrscheinlich fand E. Vater sie unter seinen Papieren, hatte vergessen, daß er selbst sie schon gelesen und gab sie dem Sohn, der in Verlegenheit war.

Alles in der Welt muß einmal ein Ende haben, und so auch dieser Brief. Sagen Sie meinem Bruder, daß ich seinen Brief erhalten hätte, und ihm dafür danke, und rühmen Sie mich ein bischen gegen ihn.

Wenn etwas von Ihrer Ak. in der Eulerschen Sache beschlossen wird, theilen Sie es mir wohl gefälligst mit, da ich das Bulletin nur sehr unvollständig zu Gesicht bekomme.

Ihr treu ergebener

C. G. J. Jacobi.

Euler mit den Worten: „privé de la lumiere du jour, ce nouveau Tirésias a percé mieux que jamais jusqu'au fond des abymes qu'offre l'immensité de la nature à ceux qui veulent la soumettre aux loix du calcul"; Histoire de l'acad. d. Sc. Berlin, année 1784 (1786), p. 9.

C. G. J. Jacobi an **P. H. v. Fuss**, Berlin, März-April 1849.

Ich schicke Ihnen, mein hochverehrter Freund, anbei die verlangten Abschriften, welche mehr Mühe, auch mir, gemacht haben, als ich gedacht hatte. Es war nicht möglich zu sehen, ob die Controlle ausreichend sei, als sie aufs neue einer Controlle zu unterwerfen, und es zeigte sich bald, daß es nicht genügte, dies probeweise bei einzelnen Bogen zu thun. Dies war besonders bei der optischen Arbeit überaus beschwerlich, und ich glaube kaum, daß Euler so viel Arbeit beim Verfassen derselben gehabt hat, als dies Abschreiben gekostet hat. Das Controlliren, indem der eine die Abschrift vorliest und der andere das Original vergleicht, war bei den Formeln, in welchen große und kleine, lateinische und deutsche Buchstaben gemischt waren, kaum durchzuführen, und ich mußte zuletzt vom Abschreiber, der einige mathematische Kenntnisse hatte, alles nachrechnen lassen, was sich noch als das leichteste zeigte. Dies ist auch zum größten Theil bei den übrigen Abh. geschehen, und es haben sich hiebei einige Fehler des Originals gezeigt. Den Text habe ich in dieser Beziehung selbst revidirt, und meine Conjecturen, wo der Sinn ausging, darüber geschrieben; wo sie zweifelhaft waren, mit einem ?. Die optische Abh. war noch dazu mit einer kleinen, schon ganz verblaßten Perlschrift geschrieben, welche den Abschreiber bisweilen irre geführt hat. Da es unmöglich war, diese Sache von einem gewöhnlichen Copisten abschreiben zu lassen, so mußte leider die Sachkenntniß durch weniger zierliche Handschrift erkauft werden, wozu kam daß der Copist das Fieber bekam und weil er glaubte, es hatte große Eile, auch in diesem weiter schrieb, wodurch mehrere Bogen eine etwas ungleiche Schrift haben. Doch werden Sie finden, daß alles sehr deutlich ist, was doch eigentlich die Hauptsache ist. Der Copist war des französischen ziemlich kundig, da er von der Colonie ist, aber eben deshalb war es nicht durchzusetzen, daß er die alte Orthographie beibehielte, was ich gern wollte, die übrigens auch im Original sehr wechselt. Auch läßt die Interpunction. wie im Original, sehr viel zu wünschen übrig. Die kleinen lateinischen Buchstaben, mit denen die Größen bezeichnet werden, sind immer im Original unterstrichen; als ich den Copist hiezu anwies, mißverstand er dies, und unterstrich auch die großen und griechischen, was hernach, um es auszumerzen, viele Radirungen nöthig gemacht hat, doch ist wohl noch manches der Art stehen geblieben. Durch die vielen Emendirungen und Controllen ist das Papier etwas aus seiner ursprünglichen Glätte und Weiße gekommen, doch wird das durch die dadurch erreichten Vortheile compensirt. Wo Abweichungen vom Text Seitens des Copisten gemacht sind, wie z. B. daß er immer a^2 für aa geschrieben, habe ich es angemerkt, da das Corrigieren, was ich anfäng-

lich versuchte, zu mühsam wurde. Auch wo die Buchstaben nicht recht deutlich waren, wie bei dem auch im Original schrecklichen deutschen großen 𝔏, habe ich es angemerkt. Natürlich nicht in jedem einzelnen Fall. Die Bogen, die ich Ihnen bereits geschickt, sind keiner so strengen Controlle meinerseits unterworfen worden, die erst bei der optischen Abh. nöthig wurde, doch möchte ich wissen, ob sich beim Druck Fehler gezeigt haben. Es wurden die Abh.

Déterm. de l'effet	19	Bogen	
De Atmosph. Lunae	11	„	
Recherches pour servir	32	„	(der Bogen 25 zählt doppelt)
Sur les logarithmes etc.	9	„	
Die 2 Abh. die Sie haben	15	„	
	86	Bogen.	

Die leeren Blätter sind mitgezählt als Compensation für die schwereren Figuren, obgleich diese nicht besonders sind, woran das Original jedoch Schuld ist; bei einer oder zwei muß man wie dort zum Verständniß den Text zu Hülfe nehmen, in welchem Falle jedoch alles klar wird. Wegen der großen Arbeit des wiederholten Controllirens und Nachsehens schien jetzt der Preis von 10 Silbergr. keinesfalls zu fühlen. Ich übersende Ihnen die Quittung über die danach ausgelegten 26 ℛ 20 Sgr. Wenn ich dies Geld bedenke und die Arbeit, die die Abschrift gekostet, so scheint mir jetzt fast besser, ich hätte alles außer den beiden ersten Abh. im Crelleschen Journal abdrucken lassen.

Ich könnte mir Gewissensbisse machen, daß ich bei 20000 halbfertigen Abh., die mir auf dem Halse liegen, mit diesen Allotriis und anderen so manche Zeit hinbringe; ich habe aber einen Trost, der Ihnen zugleich zeigen wird, daß ich es bin, der Ihnen für die Veranlassungen zu dergleichen Dank schuldig ist. Ich habe nämlich, seitdem ich hier bin, alle Jahre mehrere Monate lang an Schwindel gelitten, der sich einstellte, sobald ich einige Zeit hindurch schärfer arbeitete. Dieses letzte Jahr bin ich aber fast ganz frei davon geblieben, und schiebe die Hauptursache auf diese und andere Unterbrechungen, die doch meiner Arbeit immer weniger Abbruch thun als jenes fatale schwindlige Wesen. Einen vortheilhaften Einfluß mag auch die reinere Luft meiner jetzigen Wohnung gehabt haben, und — die politischen Aufregungen.

Berlin, Ihr treu ergebener
d. 20. März 1849. C. G. J. Jacobi.

Beifolgendes mit Gutta-Percha überzogenes Stück Kupferdrath sind Sie wohl so gut meinem Bruder auszuliefern nebst dem Preiscourant.

Zu den Protokollen der Berliner Akademie finde ich:

1770. 29. Nov. M. Bernoulli a lu un Mémoire de M. Léonard Euler intitulé: *Solution d'une question très difficile dans le calcul des probabilités* {No. 293}.

1771. 19. Oct. M. Bernoulli a lu deux Mémoires de M. Léonard Euler:
I. Théorème analytique universel servant à reconnaître si une formule differentielle quelconque est intégrable ou non?
II. Construction d'un Télescope sans verres.

2. April 1849

C. G. J. Jacobi.

Bei späteren etwaigen Zusendungen lassen Sie besser die Worte *zu Händen des* fort; es genügt, wenn an die Akademie adressirt wird und auf dem Buche selbst der Name des Empfängers irgend wie bezeichnet ist. Unsere Post versteht jenes nicht.

Den Avis über die an Sie abgegangene Sendung der Copien werden Sie durch meinen Bruder erhalten haben, und bitte ich nochmals um Nachricht über die Ankunft. Meiner Adresse fügen Sie gefälligst, wenn Sie mich mit einem Schreiben erfreuen, meine Adresse

Bellevuestr. 11.a

bei, weil der Brief sonst an alle Jacobis geht.

Euleriana.

1°. E. verweist in seiner *Differentialrechnung* im 11. Cap. des 3. Theils in mehreren §§§ (282. 283. 286) auf eine folgende Section, die niemals erschienen ist. In der Anzeige der DR. (von einem gelehrten Mathematiker, der seinen Namen zu nennen nicht erlaubt hat), welche sich in der von dem Secretär der B. Ak. Formey herausgegebenen Nouvelle Bibliothèque Germanique t. **XII**, S. 269 findet, liest man die hierauf bezügliche Note:

C'est un Ouvrage particulier dans lequel l'Auteur donne l'application du Calcul Infinitésimal à la Géométrie, mais qui n'est point encore paru.

Findet sich hiervon etwas in den E.schen Msc.?[1]) Formey war E.'s nächster Freund.

2°. Zum ballistischen Problem gehört außer der Hauptabh. noch die *Sur la route des boulets.* Es wäre vielleicht bei einer neuen Ausgabe der systematischen Liste zweckmäßig, alle Abh. über die Bewegung *in einem widerstehenden Mittel* zusammenzustellen, in welchen E. die verschiedenen Widerstandsgesetze discutirt. Dazu möchten dann auch die Abhh. *über die Windmühlen* kommen.

1) Fuss hat das unvollendete Manuskript dieser Section in Eulers Nachlass gefunden: s. *Comm ar.*, t. 1, p. XI sub 8.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1³: 12, 15, 22, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 61.

1³: 33. Die *Vita* PYTHAGORAE des PORPHYRIUS, die nach der Ausgabe von TH. KIESSLING aus dem Jahre 1816 (siehe meine Bemerkungen zu **1³**: 459) zitiert wird, liegt in neuer Ausgabe vor, nämlich in *PORPHYRII philosophi platonici opuscula selecta* iterum recognovit AUGUSTUS NAUCK, Leipzig 1886 [Bibliotheca Teubneriana]. Sie reicht dort von S. 17 bis S. 52.

FERDINAND RUDIO.

1³: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 61—64. — **1³: 163—165,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1³: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 64—65.

1³: 202. In dem Kapitel über HIPPOKRATES ist zwar in der dritten Auflage die neuere und neueste Literatur auf das sorgfältigste verwertet worden, so daß die Darstellung jetzt dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft durchaus entspricht, immerhin aber sind noch zwei verbesserungsbedürftige Stellen übrig geblieben. Die eine, auf BRYSON bezügliche, habe ich kürzlich (BM **7**₃, 1906/7, S. 378) behandelt, heute wende ich mich zu dem Satze: „Es wird sogar erzählt, er [HIPPOKRATES] habe es sehr bald dahin gebracht, selbst Unterricht in der Mathematik erteilen zu können, und habe dafür Bezahlung angenommen. Von da an hätten die Pythagoreer ihn gemieden.“ Als Beleg hierfür ist angegeben JAMBLICHUS, *De philosoph. PYTHAGOR.* lib. III, bei ANSSE DE VILLOISON, *Anecdota Graeca,* pag. 216 (sollte besser heißen: Tom. II, pag. 216). Der zitierte Satz mitsamt dem Hinweis auf JAMBLICHUS ist offenbar aus BRETSCHNEIDERS bekanntem Buche *Die Geometrie und die Geometer vor* EUKLIDES (p. 93; dort heißt es sogar, HIPPOKRATES sei „ausgestoßen worden“) herübergenommen worden. Man kann aber kaum annehmen, daß BRETSCHNEIDER die von ihm als Beleg herangezogene Stelle jemals wirklich selbst gelesen habe. Zunächst lautet nämlich der eigentliche Titel des zitierten Buches (auch bei VILLOISON): *περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης (de communi mathematica scientia),* und zwar ist dieses Buch das dritte (*λόγος γ*) der großen Enzyklopädie *περὶ τῆς Πυθαγορικῆς αἱρέσεως* des JAMBLICHUS (siehe meine Bemerkungen zu

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

1³ : 459). Das erste Buch (λόγος α) dieser Enzyklopädie hat den Titel: περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου (*de vita* PYTHAGORICA). Während dieses erste Buch von A. NAUCK (Petersburg 1884) neu herausgegeben worden ist, ist jenes dritte von N. FESTA (Leipzig 1891) neu ediert worden. Das Buch wäre daher auch zweckmäßiger nach dieser neuen, der Bibliotheca Teubneriana angehörenden Ausgabe zu zitieren, als nach der alten, schwer zugänglichen Ausgabe von VILLOISON (Venedig 1781; dort füllt es die S. 188—225 des zweiten Bandes). Obwohl sich nun die Ausgaben von VILLOISON und FESTA auf zwei verschiedene Codices stützen, so hat doch jene Stelle, die von BRETSCHNEIDER als Beleg für HIPPOKRATES herangezogen worden ist, in beiden Ausgaben (von zwei unbedeutenden Abweichungen und den belanglosen Unterschieden in der Interpunktion abgesehen) genau denselben Wortlaut, nämlich:

„περὶ δ' Ἱππάσου λέγουσιν, ὡς ἦν μὲν τῶν Πυθαγορείων, διὰ δὲ τὸ ἐξενεγκεῖν καὶ γράψασθαι πρῶτος σφαῖραν τὴν ἐκ τῶν δώδεκα ἑξαγώνων[1]) ἀπόλοιτο κατὰ θάλατταν ὡς ἀσεβήσας, δόξαν δὲ λάβοι ὡς ⟨εὑρών,⟩[2]) εἶναι δὲ πάντα ἐκείνου τοῦ ἀνδρός· προσαγορεύουσι γὰρ οὕτω τὸν Πυθαγόραν καὶ οὐ καλοῦσιν ὀνόματι. ἐπέδωκε δὲ τὰ μαθήματα, ἐπεὶ ἐξηνέχθησαν[3]) ⟨κατὰ πᾶσαν τὴν Ἑλλάδα, καὶ πρῶτοι τῶν τότε μαθηματικῶν ἐνομίσθησαν⟩[4]) δισσοὶ προάγοντε μάλιστα, Θεόδωρός τε ὁ Κυρηναῖος καὶ Ἱπποκράτης ὁ Χῖος. λέγουσι δὲ οἱ Πυθαγόρειοι ἐξενηνέχθαι γεωμετρίαν οὕτως. ἀποβαλεῖν τινα τὴν οὐσίαν τῶν Πυθαγορείων, ὡς δὲ τοῦτ' ἠτύχησε, δοθῆναι αὐτῷ χρηματίσασθαι ἀπὸ γεωμετρίας."

„Von HIPPASUS wird erzählt, er sei zwar Pythagoreer gewesen, weil er aber unter die Leute gebracht habe, er habe auch zuerst die Kugel aus den zwölf Fünfecken [siehe Anm. 1] beschrieben, sei er als Gottloser auf dem Meere umgekommen, denn er habe sich Ruhm erworben als Erfinder, während doch alles „Jenem, dem Meister" gehöre. Denn so nennen sie den PYTHAGORAS und nennen ihn nicht mit dem Namen. Die mathematischen Wissenschaften aber machten Fortschritte, nachdem sie sich über ganz Griechenland ausgebreitet hatten, und als die ersten der damaligen Mathematiker galten die zwei, die besonders fördernd wirkten, THEODORUS der Kyrenäer und HIPPOKRATES der Chier. Die Pythagoreer aber sagen, daß die Geometrie auf folgende Weise in die Öffentlichkeit gebracht worden sei: Einer der Pythagoreer habe sein Vermögen verloren, und nach diesem Mißgeschicke sei ihm gestattet worden, aus der Geometrie einen Erwerb zu machen."

Wie diese Erzählung als Beleg dafür angesprochen werden kann, daß HIPPOKRATES Unterricht gegen Bezahlung erteilt habe und deshalb von den Pythagoreern gemieden worden sei, ist ganz unverständlich. Ob man dabei den Zusatz von DIELS weglassen oder beibehalten will, spielt natürlich gar keine Rolle. Dazu kommt übrigens noch, daß wahrscheinlich der ganze Satz ἐπέδωκε ... ὁ Χῖος (vielleicht auch nur die Wortfolge δισσοί ... ὁ Χῖος) ein fremdes

---

1) So bei VILLOISON und FESTA. Es muß natürlich πενταγώνων heißen.

2) ⟨εὑρών,⟩ ist Zusatz von FESTA, bei VILLOISON heißt es ὡς εἶναι δὲ πάντα ...

3) Die unrichtige Wortform ἐξενηνέχθησαν bei VILLOISON ist Schreib- oder Druckfehler.

4) Die Parenthese ⟨κατὰ ... ἐνομίσθησαν⟩ ist von DIELS (*Die Fragmente der Vorsokratiker* 1², p. 30) hinzugefügt worden, da der überlieferte, von VILLOISON und FESTA wiedergegebene Text offenbar unvollständig ist. Sollte übrigens BRETSCHNEIDER am Ende durch ἐξηνέχθησαν zu seiner Übersetzung „ausgestoßen" verleitet worden sein?

Einschiebsel ist, das von einer Randbemerkung her in den Text geraten ist. Dafür spricht nicht nur der Umstand, daß der Satz entschieden unvollständig ist und überhaupt gar nicht hierher gehört, dafür spricht auch noch folgendes. Von unwesentlichen Abweichungen abgesehen, findet sich diese ganze Erzählung *περὶ δ' Ἱππάσου . . . χρηματίσασθαι ἀπὸ γεωμετρίας* auch in dem schon genannten, von Nauck herausgegebenen ersten Buche (*λόγος α*) der großen Jamblichusschen Encyklopädie. Dort (*Vita Pyth.* ed. A. Nauck, p. 66) heißt es auch richtig *πενταγώνων* [siehe Anm. 1], ferner *ὡς εὑρών* [siehe Anm. 2] und dort fehlt der ganze Satz *ἐπέδωκε . . . ὁ Χῖος*, der ja in der Tat auch ganz überflüssig ist. Ist aber dieser Satz im dritten Buche ein fremdes Einschiebsel, so würde in der als Beleg herangezogenen Stelle der Name Hippokrates überhaupt gar nicht einmal vorkommen.

Ferdinand Rudio.

1^3 : 203. Neben den Berichten des Simplicius und des Themistius über die Quadraturen des Antiphon sollte auch als dritter der des Philoponus (in der ersten Hälfte des 6. Jahrhunderts) erwähnt werden. Er findet sich in dem Kommentare, den Philoponus zur *Physik* des Aristoteles geschrieben hat (*Philop. in phys.* ed. H. Vitelli 31, 9—32, 3), und er ist auch in dem ersten Hefte der Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume (Leipzig 1907, p. 106—109) mit deutscher Übersetzung abgedruckt.

Ferdinand Rudio.

1^3 : 203, 213, 225, 236, 245, 270, 287, 297, 298, 310, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 65—66. — **1^3 : 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 174—176. — **1^3 : 351,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66. — **1^3 : 365, 368,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 177. — **1^3 : 380,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66—67. — **1^3 : 388, 406, 409, 410,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 177—178. — **1^3 : 429, 431,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67. — **1^3 : 432,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1^3 : 433, 452,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 179.

1^3 : 459. Die Mitteilungen über das angeblich aus zehn Büchern bestehende Werk des Jamblichus über Pythagoras sind zwar der *Philosophie der Griechen* von E. Zeller entnommen, sie sind aber trotzdem zu modifizieren, da sie mit den maßgebenden Überlieferungen nicht übereinstimmen. Die folgenden Angaben stützen sich zugleich auf Mitteilungen, die ich Herrn Prof. Diels verdanke, und die zum Teil auch schon im ersten Hefte der Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume (Leipzig 1907, p. 97) verwertet sind.

Bei der Aufzählung der Schriften des Jamblichus beruft sich Zeller namentlich auf Syrianus, den Lehrer des Proklus. Indem aber Syrianus in seinen Scholien zu Aristoteles das Werk des Jamblichus *συναγωγὴ τῶν πυθαγορείων δογμάτων* nennt, gibt er keineswegs damit den eigentlichen Titel, sondern nur den Sinn des Buches wieder, wie es denn überhaupt die Alten bei Titeln gewöhnlich nicht so genau genommen haben. Maßgebend für den Titel des ganzen Werkes und für die Titel der einzelnen Bücher, in die es zerfiel, ist der Florentiner Archetypus aus dem 14. Jahrhundert, den A. Nauck seiner Ausgabe der *Vita Pythagorica* zugrunde gelegt hat. Obwohl nämlich von den neun (nicht zehn) Büchern der großen Enzyklopädie des Jamblichus fünf verloren sind, so hat sich doch der Index des Ganzen in der genannten Florentiner Handschrift erhalten, nämlich (siehe *Vita Pyth.* ed. Nauck p. XXXIV, oder auch p. 97 der Urkunden):

Οἱ ἐννέα λόγοι Ἰαμβλίχου περὶ τῆς Πυθαγορικῆς αἱρέσεως.

α *Περὶ τοῦ Πυθαγορικοῦ βίου.*
β *Προτρεπτικὸς ἐπὶ φιλοσοφίαν.*
γ *Περὶ τῆς κοινῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης.*
δ *Περὶ τῆς Νικομάχου ἀριθμητικῆς εἰσαγωγῆς.*
ε *Περὶ τῆς ἐν φυσικοῖς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης.*
ς *Περὶ τῆς ἐν ἠθικοῖς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης.*
ζ *Περὶ τῆς ἐν θεοῖς ἀριθμητικῆς ἐπιστήμης.*
η *Περὶ γεωμετρίας τῆς παρὰ Πυθαγορείοις.*
ϑ *Περὶ μουσικῆς τῆς παρὰ Πυθαγορείοις.*

Der Titel der JAMBLICHUSschen Enzyklopädie heißt also nicht *συναγωγὴ τῶν πυθαγορείων δογμάτων*, sondern *περὶ τῆς Πυθαγορικῆς αἱρέσεως* (über die pythagoreische Sekte). Von den neun Büchern sind nur die vier ersten erhalten, die anderen fünf verloren. Auszüge freilich aus dem siebenten (ζ), aber nicht das vollständige Buch, stehen in den *Theologumena,* die FR. AST 1817 herausgegeben hat.

Was nun die vier ersten Bücher anbetrifft, die auf uns gekommen sind, so liegen diese alle in neuen Ausgaben vor. Und nach diesen sollte daher allemal zitiert werden, nicht nach den veralteten Ausgaben. Das erste Buch, die *Vita PYTHAGORICA* (nach dem Florentiner Archetypus als *λόγος α* bezeichnet) ist von A. NAUCK (Petersburg 1884) herausgegeben worden, während die auf dem Codex Cizensis beruhende Ausgabe von TH. KIESSLING, die CANTOR allein zitiert — sie gibt freilich auch noch eine lateinische Übersetzung —, aus dem Jahre 1815[1]) stammt. Das zweite Buch, der *Protrepticus,* ist als *λόγος β* im Titel überliefert. Auch von diesem zitiert CANTOR nur die Ausgabe von KIESSLING aus dem Jahre 1813, obwohl wir jetzt seit 1888 in der Bibliotheca Teubneriana die neue Ausgabe von H. PISTELLI besitzen, die sich ebenfalls auf den Florentiner Archetypus stützt. Das dritte Buch, das gewöhnlich als *De communi mathematica scientia* zitiert wird, ist zum erstenmal von VILLOISON im zweiten, *Diatriba* betitelten Bande seiner *Anecdota Graeca* (1781) herausgegeben worden (siehe meine Bemerkungen zu **1**³ : 202). Auf Grund der Florentiner Handschrift hat aber N. FESTA 1891 eine neue, ebenfalls in der Bibliotheca Teubneriana erschienene Ausgabe veranstaltet. Dieses Buch, in der Florentiner Handschrift als *λόγος γ* der JAMBLICHUSschen Enzyklopädie bezeichnet, wird bei CANTOR S. 155 so zitiert, daß der Leser glauben muß, es handle sich bei VILLOISON und FESTA (Anm. 2 ist zu *De communi mathematica* hinzuzufügen: *scientia*) um ganz verschiedene Schriften des JAMBLICHUS. Überdies fehlt der Name VILLOISON im Register. Das vierte Buch endlich, 1668 von TENNULIUS herausgegeben, ist 1894 von H. PISTELLI, wiederum auf Grund des Florentiner Archetypus, neu ediert worden. Auch diese Ausgabe findet sich in der Bibliotheca Teubneriana. Es ist daher ganz überflüssig, wenn bei CANTOR neben der Ausgabe von PISTELLI allemal auch noch die alte, schwer zugängliche und überdies weniger gute von TENNULIUS zitiert wird.

Die Schriften des JAMBLICHUS werden bei CANTOR sehr häufig zitiert. Von S. 51 an bis zu S. 739 sind es 27 Seiten, auf denen sich Hinweise auf JAMBLICHUS finden. Alle diese Hinweise sind auf Grund der hier gegebenen Darlegungen sorgfältig durchzukorrigieren.

FERDINAND RUDIO.

1) Der zweite Band dieser Ausgabe enthält die *Vita PYTHAGORAE* des PORPHYRIUS. Er ist 1816 erschienen.

1^3: 464, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 179.

1^3 : 470. Wenn Herr CANTOR zuerst bemerkt, daß die Terme *δύναμις* und *κύβος* vor DIOFANTOS benutzt wurden und dann hinzufügt: „DIOPHANT geht darüber hinaus und nennt Quadratoquadrat (*δυναμοδύναμις*)", so ist dies buchstäblich richtig, aber dennoch leicht irreleitend, denn man weiß jetzt, daß der Term *δυναμοδύναμις* schon bei HERON vorkommt (*Metrika*, S. 48 der Ausgabe von H. SCHÖNE). G. ENESTRÖM.

1^3: 488, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1^3: 498,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180. — **1^3: 500, 502,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1^3: 503—504,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180—181. — **1^3: 509, 510, 513, 515, 528, 545, 563—564,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67—69. — **1^3: 576,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 69—70, 181. — **1^3: 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70. — **1^3: 706,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70, 181. — **1^3: 713,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70. — **1^3: 715—716,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^3: 717,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1^3: 718,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 719,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 183—184. — **1^3: 720,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 730,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1^3: 734,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 736—737,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1^3: 738, 743, 748, 750,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72. — **1^3: 764, 770,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 185. — **1^3: 780, 781, 794, 800,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72—73. — **1^3: 801,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 185—186. — **1^3: 802,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S 73, 186—187. — **1^3: 805—806, 815, 855, 857, 859, 862, 863,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1^3: 867,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1^3: 869, 875—876, 877, 878, 882, 889, 893,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 74—78. — **1^3: 900,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1^3: 902,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 78—79. — **1^3: 906,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79, 188—189. — **1^3: 908, 909, 910, 911,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79—80.

Über Bemerkungen zu den Bänden **2** und **3** der „Vorlesungen" siehe S. 189—215.

Anfragen.

135. Über eine alte Scherzfrage, die der Lösung einer unbestimmten Gleichung ersten Grades entspricht. In seiner DIOFANTOS-Ausgabe (Paris 1621, S. 263) hat BACHET das folgende „vetus epigramma" zum Abdruck gebracht:

Vt tot emantur aues, bis denis vtere nummis
Perdix, Anser, Anas empta vocetur auis.
Sit simplex obolus pretium Perdicis, ematur.
Sex obolis Anser, bisque duobus Anas.
Vt tua procedat in lucem quaestio, mentem
Consule, sic loquitur pectoris arca mihi.
Sint Anates tres atque duae, simplex erit Anser.
Accipe perdices quatuor atque decem.

Diese Frage führt offenbar zu den Gleichungen $x + y + z = 20$, $\frac{1}{2}x + 3y + 2z = 20$, und als Lösung wird $x = 14$, $y = 1$, $z = 5$ angegeben. Das Epigramm hat BACHET nach seiner eigenen Aussage aus „Pithoeum" lib. 4 entnommen, was wohl die *Opera sacra, juridica, historica et miscellanea* (Paris 1609) von P. PITHOU bedeutet.

Es wäre von Interesse zu wissen, ob die Scherzfrage älter als der *Liber abbaci* des LEONARDO PISANO ist, denn vor LEONARDO ist bisher im christlichen Abendlande nur eine Frage dieser Art nachgewiesen worden, nämlich die 34. Aufgabe der *Propositiones ad acuendos juvenes*. G. ENESTRÖM.

Rezensionen.

W. W. R. Ball. Histoire des mathématiques. Edition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par **L. Freund.** Tome 1—2. Paris, Hermann 1906—1907. 8°, VII + 422 S.; (5) + 271 S. Francs 20.

Über die Verdienste und die Fehler des *Account of the history of mathematics* von Ball habe ich mehr als einmal Gelegenheit gehabt, mich in dieser Zeitschrift zu äußern (vgl. z. B. Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 244—248; $\mathbf{5}_3$, 1904, S 313—316). In betreff des ersten Bandes der jetzt vorliegenden französischen Übersetzung kann man das allgemeine Urteil fällen, daß er kaum größere Verdienste und ganz gewiß nicht geringere Fehler als der entsprechende Teil des Originals hat. Freilich wird auf dem Titelblatte angegeben, daß die Ausgabe revidiert ist, und in Wirklichkeit sind ausnahmsweise einige der zahlreichen Ungenauigkeiten und Unrichtigkeiten des Originals verbessert, aber auf der anderen Seite sind viele Angaben, die 1901 (das Erscheinungsjahr der 3. Auflage) als richtig betrachtet werden konnten, jetzt auf Grund der neuesten Forschungen als ungenau oder unrichtig zu bezeichnen. In diesem Sinne kann man also sagen, daß die Zahl der Fehler des ersten Bandes der französischen Ausgabe größer als die des entsprechenden Teiles des Originals ist.

Da diese Ausgabe selbstverständlich in erster Linie für französische Leser bestimmt ist, so könnte man erwartet haben, daß der Übersetzer versucht hätte, eine genauere Revision der Ballschen Angaben in betreff der französischen Mathematiker vorzunehmen, aber von einem solchen Versuche habe ich im ersten Bande keine Spur entdecken können. Als Beleg mache ich hier auf einige unrichtige Angaben aufmerksam, die unverändert übersetzt worden sind, obgleich es sehr leicht gewesen wäre, dieselben zu verbessern.

S. 187. „L'ouvrage sur lequel est principalement fondée sa réputation [es handelt sich um Oresme] traite de questions sur les monnaies et sur le change commercial. Au point de vue mathématique, il est à citer à cause de l'emploi des fractions ordinaires et de l'introduction de symboles pour les représenter." Die Unrichtigkeit dieser Behauptungen (liegt vielleicht eine Verwechselung mit Leonardo Pisano vor?) geht schon daraus hervor, daß keine zuverlässige mathematisch-historische Arbeit (vgl. z. B. die von Ball selbst zitierte Abhandlung von Curtze) Oresme als Verfasser einer Schrift über kaufmännische Arithmetik nennt, und daß im christlichen Abendlande gewöhnliche Brüche, sowie die jetzt geläufige Bezeichnung derselben, schon etwa ein paar Jahrhunderte vor Oresme benutzt worden sind.

S. 240. „Des exemples occasionnels d'une notation, se rapprochant de la notation avec indices, telles que A^q, se rencontrent, dit-on, dans les œuvres de VIÈTE.“ Über VIÈTES Bezeichnung von Potenzen finden sich genaue Angaben in ZEUTHENS *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Leipzig 1903, S. 98) und VIÈTE hat nie Exponenten benutzt.

S. 242. Daß der hier Z. 2 angegebene Ausdruck für $\frac{2}{\pi}$ auf Druckfehlern bei VIÈTE beruht, ist schon längst allgemein bekannt (vgl. ZEUTHEN, a. a. O. S. 121).

S. 276. Daß hier die von P. TANNERY und CHR. ADAM besorgte neue Ausgabe von DESCARTES' Werken *nicht* genannt wird, betrachte ich als einen offenbaren Fehler.

S. 280. „Le troisième [livre de la *Géométrie* de DESCARTES] comprend une analyse de l'algèbre telle qu'elle existait à l'époque.“ Diese Angabe, die S. 282 wiederholt wird, ist zum mindesten höchst ungenau. Sie kann wohl kaum anderes bedeuten, als daß DESCARTES wesentlich die früheren Errungenschaften auf dem Gebiete der Algebra zusammenfaßte, aber von einer solchen Zusammenfassung findet sich bei DESCARTES fast gar nichts.

S. 282. „Une traduction latine [de la *Géométrie* de DESCARTES] avec des notes explicatives fut préparée par F. DE BEAUNE et une édition avec un commentaire par F. VAN SCHOOTEN, publiée en 1659 eut un grand succès.“ F. DE BEAUNE hat nie eine lateinische Ausgabe vorbereitet, und die lateinische Sprache scheint ihm wenig geläufig gewesen zu sein. Was er französisch schrieb, wurde teils von F. VAN SCHOOTEN, teils von E. BARTHOLIN ins Lateinische übersetzt. Die Ausgabe von F. VAN SCHOOTEN erschien bekanntlich zum erstenmal 1649, und darin finden sich F. DE BEAUNES „In geometriam RENATI DES CARTES notae breves“.

S. 283. „Il [DESCARTES] pensait avoir donné une méthode permettant de résoudre les équations algébriques de degré quelconque, mais il y a là une erreur de sa part.“ Daß eine Gleichung beliebigen Grades algebraisch lösbar sei, hat DESCARTES im dritten Buche seiner *Géométrie* nicht behauptet, und über die geometrische Lösung sagt er nur ganz im Vorübergehen, daß sie vermittels eines Kreises und einer Kurve höheren Grades ausgeführt werden kann; die letztere Kurve deutet DESCARTES freilich nur sehr unvollständig an („il ne faut que suivre la même voie pour construire tous ceux [d. h. die Gleichungen] qui sont plus composés à l'infini“). Wie ist es möglich, diese gelegentliche Bemerkung ohne weiteres als fehlerhaft zu bezeichnen?

S. 303. Der hier erwähnte undatierte Brief von FERMAT ist im August 1659 an CARCAVY geschrieben (siehe *Oeuvres de FERMAT*, éd. TANNERY et HENRY II, Paris 1894, S. 431), ein Umstand, der offenbar BALL unbekannt gewesen ist. Daß FERMAT, der sich schon 1636 mit den Gleichungen $x^3 + y^3 = z^3$ und $x^4 + y^4 = z^4$ beschäftigt hatte (siehe a. a. O. S. 65), den Beweis der Unmöglichkeit der letzteren Gleichung, wie BALL annimmt, erst nach der Abfassung des Briefes gefunden hat, ist geradezu unglaublich (vgl. P. TANNERY, *Sur la date des principales découvertes de FERMAT;* Bullet. d. sc. mathém. 7_2, 1883, S. 123).

Auf dem Titelblatt des ersten Bandes wird angegeben, daß die französische Ausgabe nicht nur durchgesehen, sondern auch vermehrt ist. Die letzte Angabe bezieht sich wahrscheinlich nicht auf die vom Übersetzer selbst her-

rührenden unbedeutenden Zusätze, sondern auf den Anhang, der nach gedruckten Quellen folgende „Notes“ bringt:

1. S.(!) Viète considéré comme géomètre d'après Michel Chasles (17 Zeilen).
2. Analyse des ouvrages originaux de Napier relatifs à l'invention des logarithmes. Par M. Biot (S. 328—353).
3. Sur Kepler. Par J. Bertrand (S. 354—358).
4. Développement des principes de la dynamiques. Travaux de Galilée et Huyghens. Par E. Mach (S. 359—409).
5. Sur les origines de la statique. Par P. Duhem (S. 410—412).

Der zweite Band der französischen Ausgabe von Balls Geschichte der Mathematik entspricht den vier letzten Kapiteln des Originals, und in diesen Kapiteln sind die wirklichen Unrichtigkeiten weniger hervortretend, so daß man leichter von einer eingehenden Revision der Angaben absehen konnte. Dagegen ist bei Ball die Darstellung teilweise sehr lückenhaft, teilweise ziemlich oberflächlich; um die französische Ausgabe in diesen Hinsichten zu verbessern, hat Herr R. de Montessus den Text an vielen Stellen ergänzt, teils durch kleine Bemerkungen, die in den ursprünglichen Text eingefügt sind, teils durch besondere Notizen über Mathematiker, die Ball übergangen hat, teils durch ausführlichere Aufschlüsse über die Entwickelung der verschiedenen mathematischen Theorien im 19. Jahrhundert.

Die kleinen Bemerkungen werden ohne Zweifel den Lesern willkommen sein, und es ist nur schade, daß Herr de Montessus nicht gleichzeitig gewisse Stellen der Übersetzung verbessert hat, die einem Mathematiker sofort auffallen müssen. Beispielsweise erwähne ich den Passus S. 56: „Il [d. h. das Buch *Analyse des infiniment petits* von Hôpital] renferme une étude partielle (!?) de la valeur limite du rapport de deux fonctions qui, pour une certaine valeur de la variable, prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$, problème résolu (?) par Jean Bernoulli en 1704“. Wer kann aus diesen Worten erraten, was dem Marquis, was Johann Bernoulli zugewiesen werden soll? In Wirklichkeit ist es Johann Bernoulli, der das fragliche Problem allein gelöst hat. Zuerst fand er als Wert von $/^{x=a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $f(a)=\varphi(a)=0$ den Ausdruck $\frac{f'(a)}{\varphi'(a)}$ und teilte sein Verfahren brieflich dem Marquis mit; dieser veröffentlichte dann das Verfahren 1696 in der *Analyse des infiniment petits* (sect. IX, prop. I). Später bemerkte Johann Bernoulli, daß es Fälle gibt, in denen der gefundene Ausdruck selbst unbestimmt ist, nämlich wenn $f'(a)=\varphi'(a)=0$, und ergänzte seine Lösung (1704), indem er darauf hinwies, daß man durch fortgesetzte Differentiation von $f'(x)$ und $\varphi'(x)$ zuletzt den gesuchten Wert erhält. Statt „étude partielle de“ sollte also „le procédé permettant de trouver, dans le cas ordinaire“ oder etwas Ähnliches gesetzt werden.

Die Mathematikernotizen, die Herr de Montessus hinzugefügt hat, sind ebenfalls angebracht und passen im allgemeinen ziemlich gut in den Rahmen der Ballschen Darstellung. Anders liegt dagegen die Sache in betreff der oben erwähnten Aufschlüsse über die Entwickelung der mathematischen Theorien, denn durch diese wird die ursprüngliche Darstellung oft geradezu entstellt. Ball behandelt nämlich die Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert so, daß er zuerst einige kurze Notizen über die Entwickelung einer gewissen

Theorie gibt und dann ausführlicher die Arbeiten der hervorragenden Mathematiker erwähnt, die sich seines Erachtens in erster Linie mit dieser Theorie beschäftigt haben. Beispielsweise nennt er unter „Höherer Algebra“ CAUCHY, ARGAND, HAMILTON, GRASSMANN, BOOLE, GALOIS, DE MORGAN, CAYLEY, SYLVESTER, LIE. Nun hat Herr DE MONTESSUS S. 165—171 unmittelbar nach den Notizen über CAUCHY einen Abschnitt eingefügt über die Untersuchungen, die durch CAUCHY angeregt worden sind, und folglich erscheinen die fraglichen Untersuchungen als zur Höheren Algebra gehörend, obgleich sie sich zum größten Teil auf ganz andere Sachen, z. B. die Theorie der Differentialgleichungen beziehen. Übrigens ist es klar, daß es im 19. Jahrhundert wichtige Untersuchungen gegeben hat, von denen es unmöglich ist zu entscheiden, ob sie wesentlich durch CAUCHY oder durch andere Mathematiker angeregt worden sind, so daß die von Herrn DE MONTESSUS gewählte Anordnung oft durchaus willkürlich ist.

Obgleich also die Aufschlüsse des Herrn DE MONTESSUS an sich sehr interessant sind, ist ihr Vorkommen in der französischen Ausgabe von BALLS Arbeit kaum geeignet, den Lesern eine bessere Übersicht als die des Originals in betreff der Geschichte der Mathematik im 19. Jahrhundert zu geben. Wollte man dagegen die französische Ausgabe wesentlich als ein Nachschlagebuch betrachten, so konnte der jetzt hervorgehobene Umstand vielleicht von untergeordneter Bedeutung sein, wenn man ein gutes Namen- und Sachregister zur Verfügung hätte, aber leider fehlt der französischen Ausgabe gänzlich ein solches Register.

Wie aus den vorangehenden Ausführungen erhellt, sind die zwei Bände, worüber jetzt berichtet worden ist, meines Erachtens so verschiedenartig, daß man sie eigentlich als zwei Arbeiten betrachten sollte. Der erste Band kann möglicherweise wegen seiner stilistischen Verdienste von Liebhabern der Mathematik mit Vergnügen gelesen werden, aber wer zuverlässige und sachkundige Auskunft über die Geschichte der Mathematik wünscht, soll andere Arbeiten studieren. Der zweite Band dagegen enthält viele Aufschlüsse, die auch für den Fachmann wertvoll sind, und kann also aus diesem Grunde empfohlen werden, aber die Abteilung, die die interessantesten Aufschlüsse bringt, ist eigentlich eine ohne wirkliche Planmäßigkeit zusammengestellte Sammlung von Notizen über Mathematiker und mathematische Untersuchungen im 19. Jahrhundert.

Am Ende des zweiten Bandes (S. 233—261) ist G. DARBOUX' bekannte *Etude sur le développement des méthodes géométriques* abgedruckt.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
24 : 1 (1907).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
8_3 (1908) : 2.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [3
1907 : 2.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [4
36 (1905) : 2.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 173—189. (Th. Häbler, G. Eneström, H. Suter.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 189—213. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 214—215. (G. Eneström.) [5

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von M. Cantor (1907). [Rezension des 1. Heftes:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 5, 1907, 409—412. (A. von Braunmühl.) [6

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Édition française revue et augmentée. Traduite sur la troisième édition anglaise par L. Freund. Tome deuxième. Avec additions de R. de Montessus. Paris, Hermann 1907. [7
8°, (5) + 271 S. — [8 fr.] — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 267—269. (J. T.)

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo (1907). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 171. (J. T.) — Nuovi doveri (Palermo) 1, 1907, 121—123. (C. A. Nallino.) [8

Aubry, A., L'arithmétique avant Fermat. [9
L'enseignement mathém. 9, 1907, 417—433.

Bonola, R., La geometria non-euclidea. Esposizione storico-critica (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 615—622. (P. M.) [10

Duhem, P., Les origines de la statique (1905—1906). [Rezension:] *Porto*, Acad. polytechn., Annaes 2, 1907, 187. (G. T.) [11

***Enriques, F.,** Problemi della scienza. Bologna, Zanichelli 1906. [12
8°, IV + 593 S. — [10 lire.] — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907, 33—37. (A. Garbasso.)

Miller, G. A., Mathematical prodigies. [13
Science 26_2, 1907, 628—630.

b) **Geschichte des Altertums.**

***Kugler, F. X.,** Sternkunde und Sterndienst in Babel. Assyriologische, astronomische und astralmythologische Untersuchungen. I. Entwickelung der babylonischen Planetenkunde von ihren Anfängen bis auf Christus. Münster, Aschendorff 1907. [14
8°, XV + 292 S. — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 505—507. (A. Berberich.)

Simon, M., Zur altägyptischen Bruchrechnung. [15
Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 377.

Gilbert, O., Die meteorologischen Theorien des griechischen Altertums. Leipzig, Teubner 1907. [16
8°, V + 746 S. — [20 M.]

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates. Griechisch und deutsch. Leipzig, Teubner 1907. [17
8°, XI + (1) + 184 S. — [4.80 M.] — Urkunden zur Geschichte der Mathematik im Altertume, Heft 1.

***Albert, G.,** Die platonische Zahl als Präzessionszahl und ihre Konstruktion. Wien, Deuticke 1907. [18
8°. — [1 M.]

Albert, G., Der Sinn der platonischen Zahl. [19
Philologus 66, 1907, 153—156.

***Frankland, W. B.,** The first book of Euclids Elements with a commentary based principally upon that of Proclus Diadochus Cambridge, University press 1905. [20
8°, XVI + 139 S.

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes (1907). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 242—249. (J. T.) — Mathesis 7_3, 1907, 245—246. [21

Reinach, Th., Archimède. Des théorèmes mécaniques ou de la méthode (éphodiques). Traité nouvellement découvert et publié par M. Heiberg. Traduit en français pour la première fois, complété et annoté. Introduction par P. Painlevé. [22
Revue génér. d. sc. 1907. Sonderabdruck 91 S. 8°.

Rudio, F., Sur l'histoire des conchoïdes. [23
Mathesis 7_3, 1907, 261—262.

Manitius, K., Hipparchs Theorie des Mondes nach Ptolemaeus. [24
Das Weltall 8, 1907, 1—9, 26—30, 45—54.

Meier, R., De Heronis aetate (1905). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 217—218. (G. Eneström.) [25

Tittel, K., Das Weltbild bei Heron. [26
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 113—117.

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Einige griechische Aufgaben der unbestimmten Analytik. [27
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 118—134.

***Manilius, M.,** Astronomica. Edidit Th. Breiter. I. Carmina. Leipzig, Dieterich 1907. [28
8°, XI + 149 S. — [3.80 M.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2655—2659. (H. Kleingünther.)

***Kleingünther, H.,** Textkritische und exegetische Beiträge zum astrologischen Lehrgedicht des sogenannten Manilius. Leipzig, Fock 1907. [29
8°, 50 S. — [2 M.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2976—2978. (A. Kraemer.)

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Kugener, M. A., Un traité astronomique et météorologique syriaque attribué à Denys l'Aréopagite. Edité, traduit et annoté. [30
Actes du XIV° congrès international des orientalistes 2 (Paris 1907). (3) + 62 S.

Al-Battânî sive Albatenii Opus astronomicum. Ad fidem codicis Escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a C. A. Nallino. Pars II. Versio tabularum omnium cum animadversionibus, glossario, indicibus. Mediolani 1907. [31
Milano, Osservatorio di Brera, Pubblicazioni 40. 2. XXXI + 413 S.

Wiedemann, E., Über die Reflexion und Umbiegung des Lichtes von Nasîr al Dîn al Tusî. [32
Jahrbuch f. Photographie (Halle a. S.) 1907. 8 S.

Wiedemann, E., Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. X. Zur Technik bei den Arabern. XI. Über Al Fârâbîs Aufzählung der Wissenschaften (De scientiis). [33
Erlangen, Physik-mediz. Sozietät, Sitzungsber. 38, 1906, 307—357; 39, 1907, 74—101.

Jordan, L., Materialien zur Geschichte der arabischen Zahlzeichen in Frankreich. [34
Arch. f. Kulturgesch. (Berlin) 3, 1905, 155—195.

Eneström, G., Über eine dem Jordanus Nemorarius zugeschriebene kurze Algorismusschrift. [35
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 135—153.

Eneström, G., Über den Mathematiker Bernardus de Villacampi. [36
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 215—216. — Anfrage.

Eneström, G., Über das „Quadripartitum numerorum" von Johannes de Muris. [37
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 216. — Anfrage.

Duhem, P., Études sur Léonard de Vinci. I (1906). [Rezension:] L'enseignement mathém. 9, 1907, 500—502. (A. Bernoud.) [38

d) **Geschichte der neueren Zeit.**

Björnbo, A. A., Joannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor, de meteoroscopiis libri sex. Cum prooemio Georgii Joachimi Rhetici. I. De triangulis sphaericis. [39
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 24 : 1, 1907. (3) + (12) + (1) + 184 S. + Porträt. — [8 M.]

Bosmans, H., Sur le „Libro de algebra" de Pedro Nuñez. [40
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 154—169.

Waard, C. de, De uitvinding der verrekijkers (1906). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 630—637. (H. BOSMANS.) [41

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2685—2686. (A VON BRAUNMÜHL.) — Mathesis 7_3, 1907, 213—216. (H. BOSMANS.) [42

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXI. Benedetto Castelli. Venezia 1907. [43
8°, 130 S. + Porträt.

Le opere di GALILEO GALILEI. Edizione nazionale. Volume III : 2; XIX. Firenze, Barbera 1907. [44
4°, S. 401—886; 670 + (2) S. — Herausgegeben von A. FAVARO.

Stuyvaert, M., Sur l'auteur de l'„Histoire de la roulette" publiée par Blaise Pascal. [45
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 170—172.

Geer, P. van, Christiaan Huygens en Gottfried Wilhelm Leibniz. [46
Tijdspiegel 1908. 26 S.

Endō, R., [Sekis Arbeiten]. [47
Tokyo, Sugaku-Buturigakkwai, Kizi 4_2, 1907, 94—96. — Japanisch.

Kawakita, T., [Genealogie der mathematischen Schule Sekis]. [48
Tokyo, Sugaku-Buturigakkwai, Kizi 4_2, 1907, 88—91. — Japanisch.

Knoblauch, J., Über den Plan der Herausgabe von Leonhard Eulers gesamten Werken. [49
Berlin, Mathem. Ges., Sitzungsber. 6, 1907, 69—72.

Brill, A., Zur Einleitung der Euler-Feier. [50
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 555—558.

Müller, Felix, Leonhard Euler. Sein Leben und Wirken. [51
Unterrichtsbl. für Mathem. 13, 1907, 97—104. — [Résumé:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1907, 370.

Hoppe, E., Die Verdienste Eulers um die Optik. [52
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 558—567.

Bortolotti, E., Sulla pubblicazione delle „Opere matematiche" di Paolo Ruffini e del suo „Carteggio" con gli scienziati del suo tempo. [53
Palermo, Circolo matem., Rendiconti 24, 1907, 403—411.

e) **Nekrologe.**

Gustav **Bauer** (1820—1906). [54
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907, 64.

Asaph **Hall** (1829—1907). [55
Science 26_2, 1907, 805—806, 809—812. (H. S. PRITCHETT.)

Diro **Kitao** (1844—1907). [56
Tokyo, Sugaku-Buturigakkwai, Kizi 4_2, 1907, 188—191.

Maurice **Loewy** (1833—1907). [57
Paris, Bureau des longitudes, Annuaire 1908, D : 1—18. (H. POINCARÉ.) — L'enseignement mathém. 9, 1907, 493. — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 645—647. (A. BERBERICH.)

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [58
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907, 59—60.

Charles Philo **Matthews** (1867—1907). [59
Science 26_2, 1907, 842—843.

Adriano de **Paiva** (?—1907). [60
Porto, Acad. polytechn., Annaes 2, 1907, 129—130 + Porträt.

Georg **Sidler** (1831—1907). [61
L'enseignement mathém. 9, 1907, 493.

Charles **Trépied** (?—1907). [62
Paris, Bureau des longitudes, Annuaire 1908, E : 1—7. (M. LOEWY.)

Hermann Carl **Vogel** (1841—1907). [63
Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 530—531. (A. BERBERICH.)

f) **Aktuelle Fragen.**

Slocum, S. E., The rational basis of mathematical pedagogy. [64
Science 26_2, 1907, 334—341.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens. X. [65
L'enseignement mathém. 9, 1907, 473—479.

[Deutsche Mathematiker-Vereinigung 1907.] [66
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_1, 1907, 133—138. (C. A. NOBLE.) — Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 16, 1907, 567—572. — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 594—595. (E. NAETSCH.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent A. Becker in Heidelberg zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent F. Bernstein in Halle zum Professor der Versicherungswissenschaft an der Universität in Göttingen.

— Privatdozent A. Bucherer in Bonn zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor K. Carda in Wien zum Professor der Mathematik an der Deutschen Technischen Hochschule in Prag.

— Professor J. Geitler von Armingen in Prag zum Professor der Physik an der Universität in Czernowitz.

— Privatdozent G. Herglotz in Göttingen zum Professor der theoretischen Astronomie an der Universität daselbst.

— Professor S. Jolles in Berlin zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor M. Lelieuvre in Rouen zum Professor der Mathematik an der „Ecole des sciences" daselbst.

— Ingenieur J. Löschner zum Professor der Geodäsie an der Deutschen Technischen Hochschule in Brünn.

— Professor E. Pascal in Pavia zum Professor der höheren Analysis an der Universität in Neapel.

— Privatdozent A. Pflüger in Bonn zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Privatdozent J. Plemelj in Wien zum Professor der Mathematik an der Universität in Czernowitz.

— Privatdozent M. Reinganum in Freiburg i. Br. zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. Roquemont zum Professor der angewandten Mathematik an der „Ecole des sciences" in Rouen.

— Professor G. Schmidt in Königsberg zum Professor der Physik an der Universität in Münster.

— Privatdozent E. Strömgren in Kiel zum Professor der Astronomie an der Universität in Kopenhagen.

— Professor G. Torelli in Palermo zum Professor der Höheren Analysis an der Universität in Neapel.

Todesfälle.

— Asaph Hall, Professor der Astronomie an der „Harvard university" in Cambridge, Mass., geboren zu Goshen, Conn., den 15. Oktober 1829, gestorben in Annapolis den 22. November 1907.

— Jules Janssen, Direktor des astrophysikalischen Observatoriums in Meudon, geboren in Paris den 22. Februar 1824, gestorben daselbst den 23. Dezember 1907.

— Diro Kitao, Professor der Physik an der landwirtschaftlichen Akademie in Tokyo, geboren in Matsuye den 24. August 1844, gestorben 1907.

— Alexander Krassnow, Professor der Astronomie und Geodäsie an der Universität in Warschau, geboren in Tambow den 14. August (a. St.) 1866, gestorben 1907.

— Charles Philo Matthews, Professor der Elektrotechnik an der „Purdue university" in La Fayette, Indiana, geboren zu Fort Covington, N. Y., den 18. September 1867, gestorben in Phoenix, Arizona, den 23. November 1907.

— William Thomson, Lord Kelvin, früher Professor der Physik an der Universität in Glasgow, geboren in Belfast den 26. Juni 1824, gestorben in Glasgow den 17. Dezember 1907.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Paris hat Professor L. Raffy für das Wintersemester 1907—1908 eine einstündige Vorlesung über Geschichte und Methoden der analytischen Geometrie angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Darmstadt hat Professor F. Gräfe für das Wintersemester 1907—1908 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie des sciences de Paris.* Des prix ont été décernés: 1. à MM. F. Enriques et F. Severi pour leur mémoire sur le sujet: „Reconnaître d'une manière générale si les coordonnées des points d'une surface algébrique peuvent s'exprimer en fonctions abéliennes de deux paramètres, de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde plus d'un système de valeurs des paramètres (aux périodes près). Etudier en particulier le cas où l'équation de la surface serait de la forme $z^2 = f(x, y)$, f étant un polynome, et donner des exemples explicites de telles surfaces"; 2. à MM. J. Hadamard, A. Korn, G. Lauricella et T. Boggio pour leurs mémoires sur la question: „Perfectionner, en un cas important, le problème d'analyse, relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, c'est-à-dire le problème de l'intégration de l'équation

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y)$$

avec les conditions que la fonction u et sa dérivée suivant la normale au contour de la plaque soient nulles. Examiner plus spécialement les cas d'un contour rectangulaire".

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'an 1910. On sait trouver tous les systèmes de deux fonctions méromorphes dans le plan d'une variable complexe et liées par une relation algébrique. Une question analogue se pose pour un système de trois fonctions uniformes de deux variables complexes, ayant partout à distance finie le caractère d'une fonction rationnelle et liées par une relation algébrique. Indiquer, à défaut d'une solution complète du problème, des exemples conduisant à des classes de transcendantes nouvelles.

Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1907.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1907 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Dresden 15.—18. September statt. In der auf der vorigen Jahresversammlung beschlossenen Sitzung zum Andenken Eulers wurden Vorträge gehalten von den Herren A. von Brill (Zur Einleitung der Euler-Feier), L. Schlesinger (Über ein Problem der diophantischen Analysis bei Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré), A. Pringsheim (Über die Eulersche Reihentransformation), E. Brauer (Die Eulersche Turbinentheorie), F. S. Archenhold (Über Briefe von Euler), R. Gans (Euler als Physiker), E. Timerding (Über Eulers Arbeiten zur nautischen Mechanik), W. Hort (Die Bedeutung Eulers für die wissenschaftliche Technik) und E. Hoppe (Eulers Verdienste um die Optik). Andere Vorträge wurden gehalten von den Herren K. Rohn (Referat über algebraische Raumkurven), F. Klein, G. Landsberg, L. Schlesinger (Über die Entwickelung der analytischen Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865), A. Schönflies, F. Hausdorff, H. Wiener und V. Varičák.

Vermischtes.

— Un prix Binoux a été décerné en 1907 par l'académie des sciences de Paris à M. G. Loria pour ses travaux d'histoire des sciences.

Monge e le congruenze generali di rette.

Di C. Segre a Torino.

Il *Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais* (1781) di Monge[1]) contiene le prime proposizioni sulle congruenze *generali* di rette, oltre a quelle speciali relative alle congruenze *normali*.

È diviso in due parti, corrispondenti rispettivamente al problema dei trasporti entro un dato piano, oppure nello spazio.

La 2ª Parte, prima d'entrare in materia, stabilisce, come dice l'Autore (pag. 685), alcune proposizioni di Geometria, sulle quali son fondate le ricerche seguenti.

Anzitutto si ha nell'art. XIX (pag. 685—687) la proposizione così enunciata:

Si par tous les points d'un plan, l'on conçoit des droites menées dans l'espace, suivant une loi quelconque, et qu'on considère une de ces droites, je dis que de toutes celles qui l'environnent et qui en sont infiniment proches, il n'y en a généralement que deux qui la coupent, et qui soient par conséquent dans un même plan avec elle.

La dimostrazione di Monge coincide con una, che anche oggidì si trova frequentemente esposta. La retta del dato sistema vien rappresentata colle equazioni, in coordinate variabili di punti x, y, z,

$$x - x' + Az = 0, \quad y - y' + Bz = 0;$$

A e B essendo delle funzioni di x' e y', determinate dalla legge secondo cui vengon condotte le rette nello spazio. Affinchè quella retta sia incontrata (nel punto x, y, z) dalla retta infinitamente vicina, corrispondente ai valori $x' + dx'$, $y' + dy'$ dei parametri, si dovrà avere:

$$dx' = z\,dA, \quad dy' = z\,dB.$$

Ne segue

$$dx'\,dB = dy'\,dA$$

Ora, sostituendo qui ad A e B le date funzioni di x', y', si ottiene un' equazione di 2° grado pel rapporto $\frac{dy'}{dx'}$: donde si deduce il teorema enunciato.

1) Histoire de l'académie royale des sciences. Année 1781. Avec les mémoires de mathématique et de physique, pour la même année. Paris 1784. — A pag. 34—38 della Histoire è riassunto il concetto del lavoro. Questo si trova poi a pag. 666—704 dei Mémoires.

Art. XX (pag. 687). „Il suit de-là que dans le système de droites dont il s'agit, on peut toujours passer de deux manières différentes d'une quelconque de ces droites à une autre infiniment proche, qui soit avec elle dans un même plan: cela posé, de l'une quelconque de ces droites, passons en effet à l'une de celles qui la coupe, ensuite et dans le même sens, à celle qui coupe la seconde, de-là à celle qui dans le même sens coupe la troisième; il est évident qu'en continuant ainsi de suite nous parcourrons une surface développable: par la même raison, en employant constamment l'autre sens, nous aurions parcouru une autre surface développable qui auroit évidemment coupé la précédente dans la première droite que nous avons considérée; et parce qu'il n'y a aucune de ces droites pour laquelle on ne puisse faire la même opération, il s'ensuit que toutes ces droites ne sont autre chose que les intersections de deux suites de surfaces développables, telles que chaque surface de la première suite coupe toutes celles de la seconde en lignes droites, et réciproquement."

Dopo queste ricerche sui sistemi generali di rette, si passa ai sistemi normali.

Art. XXI (pag. 687—689). „Si l'on conçoit toutes les normales possibles d'une surface courbe quelconque, je dis qu'elles sont toujours les intersections de deux suites de surfaces développables, telles que chaque surface de la première suite coupe toutes celles de la seconde en lignes droites et à angles droits, et réciproquement."

Per dimostrare ciò, prende il sistema delle normali

$$x - x' + p'(z - z') = 0, \quad y - y' + q'(z - z') = 0,$$

alla superficie luogo del punto (x', y', z'); e ritrova direttamente per questo sistema l'equazione di 2° grado in $\frac{dy'}{dx'}$, già adoperata nell' Art. XIX. Indi, supponendo preso l'asse delle z parallelo alla normale in (x', y', z'), osserva che quell'equazione risulta avere per prodotto delle radici -1. Ne segue che quei due piani che noi ora chiamiamo *focali* sono ad angolo retto

L'Art. XXII ed i segu[i] svolgono una serie di considerazioni e di ricerche, che poi son diventate classiche, intorno ai raggi di curvatura di una superficie, linee di curvatura, luoghi dei centri, ecc. Esse si ritrovano più tardi nel Trattato *Feuilles d'analyse appliquée à la géométrie*[1]); ma in questa Memoria comparivano per la prima volta. Rileviamo soltanto che nel breve Art. XXIII (pag. 690) Monge, considerando gli spigoli di regresso dei due sistemi di sviluppabili formati dalle normali ad una superficie, ottiene senz'altro due superficie a cui saranno tangenti tutte quelle rette. Ora, poichè nell'Art. XX si era stabilita per una congruenza *qualunque* l'esistenza dei due sistemi di sviluppabili, anche per una con-

1) 1ª edizione, Paris 1795. La 3ª ediz. (1807) e le successive s'intitolano, come è noto, *Application de l'analyse à la géométrie.* — È interessante per noi osservare che la 4ª ediz.e (1809) è preceduta da un elenco di Memorie publicate da Monge, nelle quali *„on trouvera . . . plusieurs questions qui n'ont pas été traitées dans cet ouvrage";* e che fra esse è posta in evidenza quella *sur les déblais et remblais* col seguente avvertimento: *„On y trouve la théorie des lignes de courbure d'une surface, et la démonstration de cette proposition remarquable par sa généralité . . ."* (Segue l'enunciato, sopra riferito, del teorema fondamentale contenuto nell'Art. XIX).

gruenza generale varrà quella considerazione di Monge, si avranno cioè due superficie *focali*.[1]) —

Infine (Art. XXXIV, pag. 699 e seg[i]) si ritorna al problema dei *déblais et remblais:*

„Étant donnés dans l'espace, deux volumes égaux entr' eux, et terminés chacun par une ou plusieurs surfaces courbes données; trouver dans le second volume le point où doit être transportée chaque molécule du premier, pour que la somme des produits des molécules multipliées chacune par l'espace parcouru soit un *minimum?*"

Monge suppone essenzialmente che per fare i trasporti si possan percorrere cammini *rettilinei*. Risulta allora che tutte le rette congiungenti gli elementi corrispondenti dei due volumi dovranno formare una *congruenza* (non un complesso). In conseguenza, per gli Art[i] XIX, XX, le rette stesse saranno le intersezioni di due sistemi di sviluppabili, tali che ogni superficie del 1° sistema taglia quelle del 2° sistema secondo linee rette. Ma per avere il *minimo* suddetto si vede che quelle sviluppabili devon tagliarsi ad angolo retto. Perciò, applicando l'Art. XXI, Monge conchiude che i cammini cercati seguiranno le rette normali di una stessa superficie.[2])

Ho creduto che valesse la pena di mettere in evidenza, per chi non ha modo di consultare la Memoria di Monge, il suo contenuto geometrico, che non pare sufficientemente noto.[3])

In fatti la maggior parte degli scrittori di Geometria della retta ritengono che Monge abbia solo considerato le congruenze *normali* di rette, e che quelle *più generali* si trovino per la prima volta nel noto lavoro di Malus[4]), l'antico discepolo di Monge. In conseguenza attribuis-

1) Forse anche non sarà inutile quest'altra osservazione. A pag. 698 (Art. XXXII) del *Mémoire* si ha un pennello elementare di normali, e calcolando l'area di una sua sezione retta, alla distanza variabile u dal punto della data superficie, si trova un'espressione proporzionale a $(u-R)(u-R')$, ove R, R' sono i raggi di curvatura. È un'anticipazione del risultato di Malus, Hamilton e Kummer, intorno all'*intensità* luminosa *(clarté)*, o *densità* di un sistema di raggi.

2) Come si sa, dopo Monge, si occuparono della questione dei *déblais et remblais* Dupin ed altri, introducendo ipotesi più conformi ai casi pratici.

3) Nelle *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik herausgegeben von M. Cantor*, **4**, Leipzig 1908, articolo di V. Kommerell, pag. 451 e seg[i], non si parla del *Mémoire* di Monge: forse perchè l'Autore supponeva che la sostanza geometrica di esso si ritrovi tutta nelle *Feuilles d'analyse*, di cui è esposto minutamente il contenuto (pag. 559 e seg[i]). Invece qui Monge non aveva riportato le cose relative alle congruenze generali di rette. Cfr. la nota a pag. 322.

4) *Optique;* Journal de l'éc. polytechn. t. 7 (= 14° cahier), 1808. — Insieme a tante altre cose originali notevoli vi si ritrovano i risultati di Monge sopra riportati, senz'alcuna citazione.

cono a Malus la scomposizione di quelle congruenze in due sistemi di sviluppabili, e quindi l'esistenza delle due superficie focali.

Così faceva già Hamilton.[1]) Ed ora, fra i moderni, Mannheim[2]), Darboux[3]), Lie[4]), Zindler[5]), ed altri.

Da quanto ho esposto risulta che questa opinione deve essere corretta.[6])

---

1) *Theory of systems of rays;* Trans. Irish Acad. **15**, 1828. *First supplement to an essay on the theory . . .;* ibid. **16**, 1830. V. specialmente in questo secondo lavoro la fine di pag. 22.

Kummer, *Allgemeine Theorie der geradlinigen Strahlensysteme* (Journ. für Mathem. **57**, 1859) nell'introduzione cita Monge solo per le congruenze normali.

2) *Mémoire sur les pinceaux de droites et les normalies;* Journ. de mathém. 17_2, 1872 (v. la fine di pag. 121).

3) *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* 2e Partie, Paris 1889; v. la nota a pag. 280.

4) *Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von Lie und Scheffers*, Leipzig 1896. V. le notizie storiche a p. 268 e segt. — È caratteristica la 3a nota a piè della pag. 271, relativa alle congruenze normali: „*Dieser spezielle Fall ist, wie oben erwähnt wurde, schon von Monge betrachtet worden. Einige ältere Verfasser haben wohl mit Unrecht Monge die allgemeineren Betrachtungen zugeschrieben, die Malus anstellte*". (La citazione „Vgl. auch Mémoires de l'Académie 1781, S. 684", che si trova a pag. 268, sembra tolta da un'altra Memoria di Monge che ivi pure è citata, e che conteneva già l'indicazione *sbagliata* pag. 684.)

5) *Die Entwicklung und der gegenwärtige Stand der differentiellen Liniengeometrie;* Jahresb. d. Deutsch. Mathem.-Verein. **15**, 1906. V. il contrasto che qui vien posto fra Malus e Monge nella nota [2]) a pag. 186. Lo si ritrova al principio del cenno storico, a pag. 128 del trattato dello stesso Autore: *Liniengeometrie mit Anwendungen,* II. Bd, Leipzig 1906.

6) Mi sia permesso di aggiungere qui un' altra piccola osservazione storica sulla Geometria della retta.

La legge secondo cui variano i piani che son tangenti ad una rigata non sviluppabile nei punti di una sua generatrice rettilinea è comunemente attribuita a Chasles (*Mémoire sur les surfaces engendrées par une ligne droite;* Correspondance mathém. et physique 3_3, 1838). Ma già Hamilton, nella citata *Theory of systems of rays,* a pag. 108—109, aveva ricercato la detta legge, e ne aveva stabilita l'equazione sotto la forma, ora ben nota, $\delta \, tg \, P = u$. La costante u, che ora suol dirsi *parametro,* vien chiamata da Hamilton col termine espressivo „*coefficient of undevelopability*". Essa compare anche nell' espressione $\varDelta = \sqrt{u^2 + \delta^2} \cdot d\Theta$, che egli dà per la distanza che un punto mobile sulla generatrice ha dalla generatrice successiva (facente con quella l'angolo $d\Theta$). In particolare ne trae che u è uguale alla minima distanza fra queste due rette divisa pel loro angolo.

Friedrich Hultsch.

Von Ferdinand Rudio in Zürich.

Die mathematisch-historische Wissenschaft hat in den letzten Jahren schwere Verluste erlitten: aus der ohnehin kleinen Zahl derer, die sich um die Erforschung und die Erschließung der griechischen Mathematik bleibende Verdienste erworben haben, sind in rascher Folge abberufen worden: George Johnston Allman (1904), Paul Tannery (1904), Wilhelm Schmidt (1905), Hermann Usener (1905) — und nun ist ihnen am 6. April 1906 auch Friedrich Hultsch gefolgt, der Altmeister der Metrologie, der Herausgeber des Polybius und des Pappus, mehr als vier Jahrzehnte lang der anerkannte und bewährte Führer auf dem Gebiete der Geschichte der Mathematik des Altertums.

Am 22. Juli 1903 hatte Hultsch, geistig noch frisch und regsam, wenn auch körperlich schon leidend, seinen siebenzigsten Geburtstag gefeiert. Bei diesem Anlasse wurde ihm von Franz Poland, seinem ehemaligen Schüler und späteren Kollegen und Freunde, in einem im Dresdner Anzeiger veröffentlichten Aufsatze eine überaus herzliche Gratulation dargebracht, die neben einer Würdigung der Tätigkeit zugleich auch eine Schilderung der Lebensverhältnisse des Jubilars enthielt. Die folgenden biographischen Mitteilungen sind im wesentlichen diesem Aufsatze (zum Teil wörtlich) entnommen.[1])

Friedrich Otto Hultsch wurde am 22. Juli 1833 als dritter Sohn von neun Kindern eines Kupferdruckereibesitzers in Dresden geboren. Die

1) Außerdem konnte ich einen kurzen Nekrolog benutzen, der im Berichte des sächsischen Gymnasiallehrervereins (Leipzig 1906) enthalten ist. Auch hatten die Herren Rektor Dr. Th. Opitz (Zwickau), Prof. Dr. F. Poland (Dresden) und Prof. Dr. A. Witting (Dresden) die große Freundlichkeit, mir weiteres wertvolles Material zur Verfügung zu stellen. Für die Würdigung der wissenschaftlichen, insbesondere der philologischen Tätigkeit von Hultsch standen mir sodann noch die *Worte zum Gedächtnis von Friedrich Hultsch*, gesprochen am 14. November 1906 von Hermann Lipsius (Berichte über d. Verhandl. d. k. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. 58, 1906, 191—198) zu Gebote.

Familie heißt eigentlich HULTZSCH, und es wird erzählt, daß HULTSCH, der seinen Namen später ja freilich oft genug schreiben mußte, das überflüssige z der Zeitersparnis wegen weggelassen habe. So anekdotenhaft das klingt, so charakterisiert es doch den Mann. Denn nur bei einer solchen Denkweise, die unablässig darauf gerichtet ist, die kostbare Zeit peinlichst, selbst bis ins scheinbar kleinliche, auszunützen, war es möglich, zu leisten, was HULTSCH in seinem Leben an Arbeit geleistet hat.

Der hochbegabte Knabe empfing die Grundlagen seiner Bildung in der Schule, die für seine Lebensgestaltung später so entscheidend werden sollte, in der altehrwürdigen Kreuzschule, der er an der Seite tüchtiger Mitschüler, wie HEINRICH VON TREITSCHKE, von 1846 bis 1851 angehörte. Mit den glänzendsten Zeugnissen ausgestattet, begab er sich darauf nach Leipzig, wo er sich mit einer damals noch kleinen Schar von Genossen, zu denen aber ein später so angesehener Meister der Wissenschaft, wie JUSTUS HERMANN LIPSIUS, gehörte, dem Studium der Philologie widmete. Den Professoren gegenüber, unter denen ihn besonders ANTON WESTERMANN förderte, wahrte sich der junge Student seine Selbständigkeit und er verriet schon in jungen Jahren, einmal sogar zum ärgerlichen Erstaunen eines etwas wunderlich gewordenen alten Herrn, in seinen Übungsarbeiten seine außerordentliche Begabung für kritische Tätigkeit, seine Berufung zum Herausgeber. Im Februar 1855 bestand er in einem Alter, wo mancher erst das Studium beginnt, die Staatsprüfung, und am 12. April desselben Jahres erwarb er sich die philosophische Doktorwürde. Wieder war es die Kreuzschule, die seine erste Lehrtätigkeit sah, da er hier, Ostern 1855 bis Ostern 1856, das gesetzliche Probejahr bestand. Gleichzeitig wirkte er als Lehrer der klassischen Sprachen in den oberen Klassen der damals hochangesehenen KRAUSEschen Lehr- und Erziehungsanstalt. Er blieb dann noch bei KRAUSE, bis er Ostern 1857 als zweiter Adjunkt an der Nikolaischule in Leipzig angestellt wurde. Aber schon Herbst 1858 ging er als Ordinarius der Tertia an das Gymnasium in Zwickau. Hier erteilte er drei Jahre lang, bei durchschnittlich 20 Stunden in der Woche, den Unterricht in Latein, Griechisch und Deutsch, und zwar in Tertia und Quarta. Nachdem er inzwischen Oberlehrer geworden war, wurde er Herbst 1861 an seine geliebte Kreuzschule zurückberufen, die nun der eigentliche Schauplatz seines gesegneten pädagogischen Wirkens werden sollte.

HULTSCH begann seine Tätigkeit an der Kreuzschule als Klassenlehrer von Untertertia, stieg dann aber sehr rasch auf. Schon 1866 war er Klassenlehrer von Obersekunda, und mit Beginn des Jahres 1868 wurde er, als Nachfolger von JULIUS KLEE, zum Rektor der Kreuzschule ernannt. Am 21. April 1868 fand die feierliche „Einweisung“ statt, durch die

Hultsch „als der zweiundzwanzigste in der Reihe der ehrwürdigen Männer, welche seit dem alten M. Nicolaus Cäsius, dem Freunde Melanchthons, des Praeceptor Germaniae, an diesem Platze gestanden haben", in das Amt eines Rektors der Schule zum heiligen Kreuz eingeführt wurde. Auf die Worte des einführenden Vertreters der Behörde antwortete der noch nicht 35jährige Rektor in einer äußerst gehaltvollen Rede, die in dem Schulprogramme vom Jahre 1869 abgedruckt ist.

Als Lehrer konnte sich Hultsch ja nun im wesentlichen auf Latein und Griechisch in Prima beschränken — gelegentlich übernahm er zwar auch den Unterricht in unteren Klassen —, um so anstrengender und zeitraubender aber gestaltete sich die Verwaltungstätigkeit. „Auch wer die Entwickelung der letzten Jahrzehnte nur oberflächlich verfolgt hat, wird zugestehen müssen, daß dem erst 35jährigen Rektor Hultsch keine leichte Aufgabe zugefallen war. Unter seiner Leitung wurde das einfache Gymnasium mit nicht 400 Schülern allmählich zu einem Doppelgymnasium mit über 600 Schülern ausgebaut. Sein Scharfblick und seine Gewissenhaftigkeit machten die Verwaltung der Schule mit ihren vielen noch aus alter Zeit herrührenden Stiftungen, Bibliotheken usw. zu einer allerorten anerkannt mustergültigen. Es genüge, bei dem Mangel an Raum nur ein paar Zahlen zu erwähnen. In einer Zeit von 21 Jahren hat Hultsch 2449 Schüler aufgenommen, 903 Abiturienten das Zeugnis der Reife erteilt. Unter ihm sind 13 neue Stiftungen mit einem Kapital von 181000 Mark der Schule und gegen 3000 Mark ihm persönlich zur beliebigen Verwendung im Interesse der Schule zugewiesen worden. Zu allen diesen zeitraubenden Arbeiten kam noch von 1879 bis 1882 die Einrichtung und Leitung des Wettiner (des zweiten städtischen) Gymnasiums."

Hultsch verwaltete das Rektorat der Kreuzschule bis Ostern 1889, um dann in den Ruhestand zu treten, d. h. um sich von da an ausschließlich seinen wissenschaftlichen Arbeiten zu widmen. In welch hohem Maße es ihm gelungen war, sich die Liebe und Dankbarkeit seiner Schüler und die Hochachtung der Kollegen und der vorgesetzten Behörde zu gewinnen, das kam so recht zum Ausdruck bei der erhebenden Abschiedsfeier, die am 12. April 1889 in der Aula des Gymnasiums veranstaltet wurde, und über die das Schulprogramm von 1890 berichtet. Sein Nachfolger, heißt es in diesem Programme, darf „Zeugnis ablegen von den Gefühlen der Verehrung und Dankbarkeit, von denen er die Lehrerschaft der Schule für den geschiedenen Rektor erfüllt weiß; er muß das Beispiel strengster Pflichttreue und Gewissenhaftigkeit rühmen, das Herr Rektor Hultsch seinen Amtsgenossen und seinem Nachfolger an dieser Schule hinterlassen hat, und er kann vor allem mit dem Aus-

druck der Bewunderung nicht zurückhalten über die außerordentliche Kraft und Stetigkeit der Arbeit, mit der es seinem Vorgänger möglich gewesen ist, in diesem die Zeit und Kraft gewiß stark in Anspruch nehmenden Amte noch eine Reihe von wissenschaftlichen Arbeiten zu fördern, welche ihm den Dank und die Anerkennung, die sie ihm schon bei Lebzeiten eingetragen haben, für alle Zeiten sichern". Und auf diesen Ton der Verehrung und der Dankbarkeit waren alle die Kundgebungen gestimmt, die HULTSCH nicht nur bei jenem Festakte, sondern auch bei anderen Gelegenheiten dargebracht wurden. „Die dankbare Liebe von Tausenden von Schülern," sagt POLAND, „die treue Anhänglichkeit von zahlreichen Amtsgenossen an ihren „alten" Rektor beweisen, daß HULTSCH die edle Humanität, die er lehrte, stets im Leben im reichsten Maße betätigt, daß er die wichtigste Aufgabe des Lehrers, die Eigenart einer fest und edel ausgeprägten Persönlichkeit in sich selbst zu entwickeln, um auch im Schüler den ganzen Menschen zu wecken, meisterlich verstanden hat. Abhold aller unklaren Gefühlsschwärmerei und Schönrednerei, wußte er doch die Schönheiten der antiken Literatur dem jugendlichen Gemüte aufgehen zu lassen. Vor allem aber gewöhnte sein scharfer, klarer Geist den Schüler daran, selbst klar zu denken und nüchtern zu urteilen. So schulte HULTSCH den Geist des Schülers für die Anforderungen des späteren gelehrten Berufes wie des Lebens." Und in einem anderen Berichte wird HULTSCH nachgerühmt, wie er sich bei aller Strenge und scheinbaren Unnahbarkeit stets mit rührender Sorge seiner Schüler angenommen habe, mit Rat und Tat, auch über die Schulzeit hinaus. Für viele soll er das Schulgeld bezahlt und manche auch sonst noch aus eigenen Mitteln unterstützt haben.

An Anerkennung seiner pädagogischen und seiner wissenschaftlichen Tätigkeit hat es HULTSCH auch in weiteren Kreisen nicht gefehlt. Schon im Alter von 31 Jahren wurde er zum Professor ernannt, bei seinem Rücktritte von der Kreuzschule 1889 erhielt er den Titel eines Oberschulrates, vier Jahre zuvor war er zum Mitgliede der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften gewählt worden. Außerdem war er Mitglied des *ἑλληνικὸς φιλολογικὸς Σύλλογος* in Konstantinopel und seit 1885 korrespondierendes Mitglied der Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen.

Im übrigen floß das äußere Leben von HULTSCH, ein schlichtes, deutsches Gelehrtenleben, still und ereignislos dahin. Nur wenige Studienreisen nach Paris und Italien unterbrachen den gleichmäßigen Lebensgang. Um so inhaltreicher war freilich das innere Leben. Denn selbst die Schultätigkeit, die wir kurz skizziert haben, und die wissenschaftliche Arbeit, zu deren Würdigung wir uns nun wenden wollen, vermochten

noch nicht, dieses Leben ganz auszufüllen. „Nichts von allem, was die Menschheit Bedeutsames und Schönes kennt, ist ihm fremd geblieben, so sehr seine Wissenschaft ihn beschäftigt hat: die Fragen der Politik, die Sorge für die Interessen des eigenen engeren Stadtkreises, die Schönheit edler Kunst fesselten ihn ebenso, wie die Reize der Natur, mochte er sich in die Schönheiten der engeren Heimat versenken oder vor allem auch die herrliche Alpenwelt genießen, die ihn fast alljährlich nach dem Süden gelockt hat."

So lebte und wirkte Hultsch noch siebzehn Jahre lang nach seinem Rücktritte von der Kreuzschule. Von der geistigen Frische, die er sich bis in die letzten Jahre zu bewahren wußte, zeugt zur Genüge seine große Abhandlung vom Jahre 1903 über *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte.* Die wissenschaftliche Arbeit half ihm auch, die körperlichen Leiden leichter zu tragen, die sich schließlich doch einstellten, und denen er nach langer Krankheit am 6. April 1906 erlag.

Die wissenschaftliche Tätigkeit von Hultsch hat sich auf zwei großen, scheinbar weit auseinander liegenden Gebieten bewegt, dem der *klassischen Philologie* und dem der *Geschichte der Mathematik.* Für Hultsch allerdings waren diese Gebiete nicht getrennt, sondern vielmehr zu einem einzigen großen Arbeitsfelde vereinigt, und zwar namentlich durch Vermittelung einer Disziplin, die er stets mit besonderer Sorgfalt kultiviert hat, und deren heutige Gestalt er mit hat schaffen helfen, der *Metrologie.* Wer freilich die beiden hervorragenden, weit hinaus leuchtenden Denkmäler, die Hultsch auf dem philologischen und dem mathematisch-historischen Gebiete errichtet hat, die Ausgabe des Polybius und die des Pappus, ohne weitere Vermittelung betrachtet und miteinander vergleicht, der möchte wohl kaum glauben, daß er Werke desselben Autors vor Augen habe.

Mit Polybius hat sich Hultsch schon sehr frühe befaßt, und er hat — wie schon ein flüchtiger Blick auf das Verzeichnis seiner Schriften zeigt — nicht mehr abgelassen von ihm bis in sein hohes Alter. Ist doch noch eine seiner letzten Arbeiten der Besprechung der von Büttner-Wobst umgearbeiteten Polybius-Ausgabe von Dindorf gewidmet! Nachdem er bereits 1857 und 1858 zwei Noten *Emendationen zu Polybios* veröffentlicht hatte, ließ er im Jahresbericht des Gymnasiums zu Zwickau, 1858/59, seine erste[1]) größere Abhandlung, betitelt *Quaestiones*

---

1) Nach einer gütigen Mitteilung von Herrn Prof. E. Sievers in Leipzig ist eine gedruckte Doktordissertation von Hultsch nicht vorhanden, da Doktordissertationen damals in Leipzig überhaupt nicht gedruckt wurden.

Polybianae folgen. In dieser Programmschrift setzt HULTSCH zunächst kurz auseinander, welche Bedeutung den Schriften des POLYBIUS für die Erforschung der κοινή, der gemeingriechischen Sprache der Spätzeit, zukommt. Darauf wendet er sich zu einer Besprechung und Vergleichung der Handschriften, von denen er besonders fünf hervorhebt. Sie stammen alle von einem gemeinsamen Archetypus ab, was sich deutlich aus den übereinstimmenden Lücken erkennen läßt. Am nächsten kommt diesem Archetypus unter den hervorgehobenen Handschriften der Vaticanus aus dem 11. Jahrhundert, und diesen legt daher HULTSCH den nun folgenden Untersuchungen zugrunde, um an zahlreichen Beispielen die sprachlichen Eigentümlichkeiten des POLYBIUS zu kennzeichnen, sowohl was besondere Wortformen, als auch was die Syntax betrifft.

Obgleich es sich hier um eine rein philologische Untersuchung handelt, so glaubte ich doch, an dieser Erstlingsarbeit von HULTSCH nicht still vorübergehen zu sollen. Denn die Art der Behandlung ist vorbedeutend nicht nur für seine philologischen, sondern auch für seine mathematisch-historischen Arbeiten. Indessen dürfte es wohl nicht angehen, die Leser der Bibliotheca Mathematica allzulange mit diesen etwas abliegenden Untersuchungen zu unterhalten, und so sei hier zunächst nur gesagt, daß die *Quaestiones Polybianae* nur den Anfang bilden von einer stattlichen Reihe weiterer Arbeiten über POLYBIUS, die in der vierbändigen Ausgabe des großen Historikers ihren Höhepunkt, aber noch lange nicht ihren Abschluß fanden. „Diese Ausgabe“, sagt LIPSIUS, „hat alle früheren Leistungen weit überholt und die ihr unmittelbar vorausgegangene Ausgabe von L. DINDORF sofort antiquiert, weil sie die *recensio* des Textes auf festen Boden stellt durch genaue Vergleichung namentlich der für die vollständigen fünf Bücher maßgebenden Handschriften und zugleich die *emendatio* auf der sicheren Grundlage sorgfältiger Beobachtung des polybianischen Sprachgebrauchs fördert.“

Ich darf auf eine weitere Besprechung der speziell philologischen Arbeiten von HULTSCH um so eher verzichten, als Herr Prof. POLAND mit einer Biographie für BURSIANS Jahresbericht beschäftigt ist, die natürlich der philologischen Tätigkeit von HULTSCH besonders Rechnung tragen wird. Und so will ich zum Schlusse hier nur noch die auf POLYBIUS bezügliche Stelle aus dem wiederholt benutzten Dresdner Aufsatze des Herrn POLAND folgen lassen. Es heißt dort: „Zunächst müssen die Verdienste von HULTSCH um die Herausgabe des ihm kongenialen großen Historikers des nachklassischen Griechentums, des schlichten, klardenkenden POLYBIUS hervorgehoben werden. Nachdem er sich schon im Jahre 1859 durch ein Programm von Zwickau den Boden bereitet hatte, erschien von 1867 bis 1872 (die ersten beiden Bände in zweiter Auflage

1888 und 1892) seine große kritische Ausgabe des Historikers, die zum ersten Male wieder eine feste, auf reichem handschriftlichem Materiale beruhende Textgestaltung bietet und bis heute die einzige moderne, große, kritische Ausgabe geblieben ist. Wurde dieses gewaltige Werk begleitet von einer Fülle kleinerer Arbeiten, in denen Einzelfragen der Textgestaltung scharfsinnig und eingehend erörtert wurden, so zeitigte die Beschäftigung mit Polybius vor allem auch eine Arbeit von allgemeinerer Bedeutung, die Untersuchungen über die erzählenden Zeitformen bei Polybius (in den Abhandlungen der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften von 1891, 1892 und 1893), in denen einer neuen lebendigeren Auffassung über den Gebrauch der griechischen Tempora in eindringender und feinsinniger Weise die Wege geebnet werden, und die für neuere grammatische Forschungen vorbildlich gewesen sind". Die drei genannten Abhandlungen (die Bände, in denen sie erschienen sind, tragen die Jahreszahlen 1893 und 1894) füllen zusammen nicht weniger als 431 Seiten großen Formates. Die Kritik bezeichnete sie als „das Beste und Zuverlässigste, was im Gebiete der Syntax des Polybius überhaupt geleistet worden ist", und als „für die Kenntnis des Sprachgebrauches des Polybius und der *κοινή* überhaupt von größter Wichtigkeit".

Wenn ich nun auch auf die zahlreichen rein philologischen Arbeiten von Hultsch nicht weiter eingehen kann — ich wäre dazu auch nicht kompetent genug — so glaube ich doch auf zwei Arbeiten von allgemeinerem Interesse noch besonders hinweisen zu sollen: auf die Festrede über *Die staatsmännische Wirksamkeit des Demosthenes*, die Hultsch 1863 in der Aula der Kreuzschule gehalten hat, und die man in Fleckeisens Jahrbüchern abgedruckt findet, und sodann auf die Ausgabe (Leipzig 1867) der Schrift *De die natali* des römischen Grammatikers Censorinus. Da diese Schrift doch allerlei enthält, was auch für Mathematiker und Naturforscher interessant ist, und da sie überdies auch mit anderen Arbeiten von Hultsch, die wir noch werden zu besprechen haben, zusammenhängt, so sei es gestattet, den Inhalt in aller Kürze zu skizzieren. Die Schrift stammt aus dem Jahre 238 n. Chr. und ist dem Q. Caerellius zum Geburtstage dediziert. Demzufolge enthält sie nach einer kurzen einleitenden Widmung zunächst allerlei Betrachtungen, die sich auf die Geburt des Menschen beziehen, auf Zeugung und Schwangerschaft, auf Zwillingsbildung, auf die Entwickelungszeit der Leibesfrucht und ganz besonders auf den Einfluß der Gestirne. Dabei werden immer die Meinungen der verschiedenen griechischen Philosophen und Ärzte, wie Anaxagoras, Empedokles, Hippokrates, Hippon usw. mitgeteilt, was den Wert der Schrift natürlich sehr erhöht. Der zweite Teil der Schrift behandelt sodann Fragen der Chronologie und des Kalenders, nämlich die Teilung der Zeit

in Tage, Monate, Lustren und Saecula. Im wesentlichen folgt dabei CENSORINUS den Schriften VARROS und SUETONS. Die Handschriften, in denen die Schrift des CENSORINUS überliefert ist, gehen alle auf den Codex Coloniensis saec. VII zurück, der sich zur Zeit der Ausgabe von HULTSCH in Darmstadt befand (auf ihn als Darmstadiensis 166 saec. VII stützt HULTSCH seine Edition), jetzt aber wieder in Köln ist. Durch Blattausfall ist in diesem Codex der Schluß der Schrift des CENSORINUS verloren gegangen und damit zugleich auch Titel und Anfang einer zweiten, sich daran anschließenden Schrift, die jetzt in der Literatur als *Fragmentum CENSORINO adscriptum* bezeichnet wird. Dieses Fragment, das in der Ausgabe von HULTSCH von S. 53 bis S. 73 reicht, und auf das HULTSCH 1880 noch einmal in einer kurzen Note zurückgekommen ist, scheint einem größeren encyklopädischen Werke zu entstammen. Es enthält zunächst in kurzen Kapiteln wörterbuchartige Erklärungen über die Welt, den Himmel, die Sterne, die Erde, über Geometrie, Musik, und sodann namentlich über Rhythmus und Metrik. Diese letzten Kapitel (de metris id est numeris, de legitimis numeris, de numeris simplicibus) enthalten zugleich die älteste auf uns gekommene Darstellung lateinischer Metrik (vgl. den Artikel CENSORINUS von G. WISSOWA in der *Realencyklopädie* von PAULY-WISSOWA). —

HULTSCH hatte kaum seine POLYBIUS-Studien begonnen, als sich ihm bereits ein neues, weites Arbeitsfeld eröffnete, das für seine ganze wissenschaftliche Tätigkeit von der größten Bedeutung werden sollte, die *Metrologie*. Es war das natürlich nicht zufällig. Die verschiedenen Angaben über Maße aller Art, die er bei POLYBIUS vorfand, von dem man ja weiß, daß er für Fragen der angewandten Mathematik ein ganz besonderes Interesse besaß, mußten einen Mann von der peinlichen Genauigkeit eines HULTSCH veranlassen, den Dingen möglichst auf den Grund zu gehen und die Angaben um so einläßlicher zu prüfen, je ungenauer sie waren. HULTSCH sagt darüber selbst in dem gleich näher zu besprechenden Werke folgendes:

„Als Quellen [für die Metrologie] sind selbstverständlich auch alle übrigen Schriften des Altertums, insofern sie Angaben über Maße, Gewichte und Münzwährungen enthalten, zu betrachten. Hier hat die Forschung in jedem einzelnen Falle den Wert der Mitteilung zu prüfen. Selbst Schriftsteller, die in anderen Beziehungen wegen der Genauigkeit ihrer Berichte gerühmt werden, wie HERODOT und POLYBIUS, sind in einigen Angaben über Maße und Messungen minder zuverlässig. Doch teilte diesen Mangel an Präzision mehr oder minder das ganze Griechenvolk. Die Gewohnheit, in runden Zahlen zu rechnen, die Maße nur nach ihrem ungefähren Betrage zu nehmen, ähnliche Maße verschiedener Völker gleichzusetzen, Entfernungen nur nach ungenauer Abschätzung zu bestimmen, war ganz allgemein. Auch darf man nicht vergessen, daß die meisten Notizen nur gelegentlich bei Behandlung anderer Gegenstände gegeben werden, und daß auch neuere Schriftsteller in solchen Fällen nicht ängstlich eine absolute Genauigkeit erstreben.“

Hultsch machte es sich also zur Aufgabe, alles zu sammeln und geordnet zusammenzustellen, was an zuverlässigen Angaben über die Längen-, Flächen- und Hohlmaße, über die Gewichte und über die Münzen bei den Griechen und Römern vorhanden war, mochten sich diese Maßbestimmungen aus unmittelbaren Quellen ergeben, nämlich aus den Maßstäben, Hohlmaßen, Gewichtsstücken und Münzen, die jetzt noch erhalten oder doch in Abbildungen überliefert sind, oder mochten sie auf geschriebene Quellen zurückgehen, auf eigentliche metrologische Schriften, oder auch solche, die nur nebenbei Metrologisches enthielten. Die metrologische Literatur, die Hultsch vorfand, und die er zu verarbeiten hatte, war übrigens schon eine recht umfangreiche. Abgesehen von den allerdings meist nur fragmentarischen Schriften aus dem Altertume, die Hultsch dann später besonders herausgab, waren es vor allem die Arbeiten französischer und holländischer Philologen des sechzehnten und siebzehnten Jahrhunderts, wie Budé, Scaliger, Gronov, Savot, die bereits umfangreiches, mit vielem Fleiß gesammeltes Material darboten. Dazu kamen im achtzehnten und neunzehnten Jahrhundert die Werke von Eisenschmid, Letronne, Hussey, namentlich aber dann die grundlegenden *Metrologischen Untersuchungen* von August Böckh (1838) und die *Geschichte des römischen Münzwesens* von Theodor Mommsen (1860). Auf die beiden zuletzt genannten epochemachenden Werke stützt sich Hultsch natürlich ganz besonders, jedoch ohne dabei seine Selbständigkeit aufzugeben.

Schon im Jahre 1862 konnte er als Ergebnis seines Fleißes seine *Griechische und römische Metrologie* veröffentlichen. Sie war zum größten Teile noch in Zwickau entstanden, und so hat denn auch Hultsch dieses sein erstes größeres Werk gleichzeitig seinem neuen Rektor Julius Klee und seinem ehemaligen Direktor in Zwickau, Friedrich Kraner, gewidmet. Über die Aufgabe der Metrologie und über die Einteilung des Stoffes spricht sich der Verfasser folgendermaßen[1]) aus:

„Der Mensch ist das Maß aller Dinge. Dieser oft angeführte Ausspruch des alten Protagoras bildet auch den Fundamentalsatz für die Lehre von den Maßen, die Metrologie. Alles Messen ist eine Vergleichung. Eine bestimmte Größe wird zugrunde gelegt und diese als Maßstab auf alle gleichartigen Größen angewendet. Die daraus hervorgehende Verhältniszahl ist das Maß des gemessenen Gegenstandes. Zuallererst, denn es läßt sich das überhaupt nicht von dem Begriffe menschlichen Seins und Wirkens trennen, müssen die räumlichen Ausdehnungen gemessen worden sein. Naturgemäß bildet hier der menschliche Körper selbst die Unterlage. Die Handbreite, die Armlänge, die ausgebreiteten Arme, der Fuß, der Schritt sind Maße, auf deren Gebrauch die Natur selbst den Menschen hinweist; sie sind bei allen Erwachsenen ungefähr gleich, sie lassen sich fast überall leicht anlegen und reichen so für die

1) Ich habe geglaubt, diese Einleitung nach der später noch zu besprechenden zweiten Auflage zitieren zu sollen, in der Hultsch doch manches geändert hat.

Bedürfnisse des ersten Kulturzustandes aus. Die ausgeschrittene Länge wurde auf dem Ackerfelde zum Flächenmaß. Hundert Fuß lang, so weit als die Pflugstiere in einem Atem getrieben werden konnten, zog der Pflüger seine Furche und fügte so viele nebeneinander daran, bis die Breite des beackerten Stückes der Länge gleich war. Dieses Geviert der hundertfüßigen Furche war bei Griechen und Italikern das ursprüngliche Flächenmaß.

Von den natürlichen Maßen war es nur ein kleiner Schritt zu der Anwendung von künstlichen, nach einer vereinbarten Norm hergestellten Maßstäben. Die Baukunst läßt sich ohne dieselben nicht denken, daher finden wir bei den Ägyptern, den ältesten Baumeistern der Erde, auch die ältesten genau normierten Maßstäbe; und dasselbe Volk hat auch, wie die Alten, HERODOT an der Spitze, vielfach hervorheben, zuerst die Kunst der genauen Vermessung des Landes erfunden. Alljährlich überschwemmte der Nil das fruchtbare Ackerland und bedeckte mit seinem Schlamme die Marken des Grundbesitzes, alljährlich wurde daher durch genaue Vermessung den Besitzern das ihrige wieder zugeteilt, eine Einrichtung, die jedenfalls ebenso alt ist als überhaupt die ägyptische Kultur.

Nicht so leicht wie zu dem Maßstabe für die Längen- und Flächenausdehnung gelangte man zu Maßen für das Volumen und für die Schwere der Körper. Ursprünglich hat der Krug, in welchem Öl oder Wein aufbewahrt wurde, das größere oder kleinere Gefäß, in welches die Feldfrüchte geschüttet wurden, oder der mit Getreide gefüllte Sack, den ein Mann auf dem Rücken tragen konnte, die Maße für Flüssiges und Trockenes abgegeben. Aus diesen einfachen Voraussetzungen erwuchs schon frühzeitig ein in sich geschlossener Zusammenhang aller Maße. Denn wenn das Gefäß, welches als Hohlmaß diente, eine regelmäßige Form erhielt, so war einerseits die Beziehung zu dem Längenmaße leicht aufzufinden, anderseits stellte die Wassermenge, welche das Gefäß füllte, ein bestimmtes Gewicht dar. Zum vollendeten Ausdruck ist dieser Gedanke erst in dem heutigen, vom Meter ausgehenden Systeme der Maße gelangt; aber auf ähnliche Anschauungen war die Menschheit schon in einer sehr frühen Periode der Kultur gekommen, nur daß im Altertum die Systeme nicht ausschließlich vom Längenmaße aus aufgebaut wurden, sondern ein bereits durch den Gebrauch festgesetztes Gewicht einerseits und die ebenfalls schon üblichen Maße des Raumes anderseits einander im Hohlmaße begegneten, so daß dann nur noch eine genauere Regelung der durch die Praxis bereits gegebenen Maße stattfand.

Am einfachsten ist, wie es scheint, das System des alten Ägyptens gewesen. Die Babylonier setzten den fünften Teil des Kubus ihrer Elle als Einheit des Hohlmaßes und teilten sowohl dieses Hohlmaß als das Gewicht des Wassers, welches das Hohlmaß füllte, in Sechzigstel; außerdem hatten sie noch mit dem aus Ägypten überkommenen Hohlmaße sich auseinanderzusetzen. Die Griechen entlehnten ihre Maße und Gewichte aus Vorderasien, entwickelten sie aber mit eigenem Erfindungsgeiste weiter. Noch in nächster Beziehung zu den babylonischen Normen steht das äginäische oder vielmehr altpeloponnesische System; einen weiteren wichtigen Fortschritt stellte die von SOLON eingeführte Maß- und Gewichtsordnung dar. Auf das attische System gründeten weiter die Römer die Beziehung ihres Hohlmaßes, welches gleich dem Kubus des römischen Fußes war, zu dem Gewichte von 1 attischen Talent oder 80 römischen Pfund. Hier zuerst, also auf italischem Boden und in verhältnismäßig später Zeit, sind uns auch ausdrücklich die gesetzlichen Formeln überliefert, nach denen Längenmaß, Hohlmaß und Gewicht miteinander geglichen wurden, Formeln, welche wir, der Ähnlichkeit folgend, mit großer Wahrscheinlichkeit zurück auf attisches Maß und Gewicht und weiter auf die weit älteren Systeme Ägyptens und Vorderasiens übertragen können.

Ebenfalls schon in sehr früher Zeit wurde die Kunst des Wägens angewendet auf Gold und Silber, in Ägypten auch auf Kupfer, um diese Metalle als Wertmesser für andere Gegenstände des Besitzes gelten zu lassen. Hieraus entwickelte sich in Babylonien bereits lange vor der ersten Münzprägung eine feste Währung der Gewichte Goldes und Silbers, welche statt des Geldes dienten. Die Stempelung der auf bestimmtes Gewicht ausgebrachten kleinen Barren Goldes und Silbers übten zuerst, gegen Anfang des siebenten Jahrhunderts vor unserer Zeitrechnung, die kleinasiatischen Griechen und wurden damit zu Erfindern des Geldes im eigentlichen Sinne.

Mit dem Auftreten der Münze entstand gewissermaßen aus dem Gewichte ein neues selbständiges Maß. Die Münze ist nicht mehr bloß ein genau abgewogenes Stück Wertmetall, sie wird vielmehr das Maß für alle Wertschätzung, weshalb sie auch, je weiter Handel und Verkehr sich entwickeln, um so häufiger durch bloße Kreditzeichen vertreten wird. Freilich ist sie ihrer Natur nach kein ganz unveränderlicher Maßstab, aber doch immerhin der am wenigsten schwankende, der sich herstellen ließ. In diesem Sinne hat die Metrologie auch das Münzwesen der alten Völker zu behandeln. Sie hat vor allem den Münzfuß zu ermitteln, das Normalgewicht und die Feinheit des Metalls festzustellen und dann den Wert der Münze im Verhältnis zu dem heutigen Gelde zu bestimmen. Das Gebiet der Numismatik hat sie nur da annähernd zu berühren, wo das Gepräge der Münzen, sei es der Stil der Bilder, oder die Beizeichen und Aufschriften, herbeigezogen werden muß, um Aufschluß über die Zeit der Prägung zu geben."

Entsprechend diesen Ausführungen, die hier wörtlich wiedergegeben sind, weil sie eine treffliche Orientierung über den Plan des ganzen Werkes geben, zerfällt nun also das Buch (in der ersten Bearbeitung) in drei Teile. Der erste (S. 25—100) behandelt die *Längen-, Flächen- und Hohlmaße,* und zwar zunächst die griechischen Längen- und Flächenmaße. Das Gefühl, daß die Längenmaße ursprünglich von dem menschlichen Körper abgeleitet waren, blieb den Griechen allezeit lebendig. So bemerkt Heron[1]) zu dem Ursprung der Maße: *τὰ δὲ μέτρα ἐξηύρηνται ἐξ ἀνθρωπίνων μελῶν, ἤγουν δακτύλου, κονδύλου, παλαιστοῦ, σπιθαμῆς, ποδός, πήχεως, βήματος, ὀργυιᾶς καὶ λοιπῶν.* An die Besprechung dieser Maße schließt sich die der größeren Längenmaße an, die nicht unmittelbar vom menschlichen Körper entlehnt werden konnten, die aber die Griechen in ein einfaches Verhältnis zu jenen setzten: das Hundertfache des Fußes war das *πλέθρον*, das Hundertfache der Orgyia das *στάδιον*. Das *πλέθρον* war zugleich Flächenmaß, nämlich das Quadrat des gleichnamigen Längenmaßes. Eine ausführliche Untersuchung widmet nun Hultsch der eigentlichen Bestimmung der griechischen Längenmaße, insbesondere des Stadions. Es folgen sodann die römischen Längen- und Flächenmaße, die, wie auch Vitruv bestätigt, ebenfalls von dem menschlichen Körper abgeleitet worden sind. Die eigentliche Einheit sowohl für die Längen- wie für die Flächenmaße war der römische Fuß, dessen genauere Bestimmung nun vorgenommen wird. Den Schluß des ersten Teiles bilden die attischen und die römischen Hohlmaße und ihre Bestimmung.

1) *Heronis Alex. geom.* ed. Hultsch p. 47, 4.

Der zweite Teil (S. 101—120) ist den griechischen und römischen *Gewichten* gewidmet Die Elemente des griechischen Gewichtssystems sind *τάλαντον*, *μνᾶ*, *δραχμή* und *ὀβολός*, deren Verhältnis auf einer Verschmelzung des duodezimalen und dezimalen Rechnens beruht. Der Ursprung des Systems ist orientalisch, worauf schon das semitische *μνᾶ* hinweist. Das kleinste Gewicht des Systems, der Obolos, wurde von Ärzten noch weiter geteilt, nämlich in acht *χαλκοῖ*. Alle diese Gewichte bezeichneten zugleich das Münzgewicht des athenischen Staates seit SOLON. Früher hatte ein anderer Münzfuß und ein anderes Gewicht, nämlich das äginäische, bestanden, das sich auch noch später als Handelsgewicht erhielt. Es folgt nun bei HULTSCH weiter das römische Gewichtssystem, dessen Einheit die *libra* war, nach MOMMSEN die mit ausgestrecktem Arme auf der Hand *schwebend zu haltende Last*. Die Teilung dieser Libra fand nach dem eigentümlich italischen Duodezimalsystem statt, in dem die größere Einheit *as*, die kleinere Einheit oder das Zwölftel *uncia* heißt. Auf die Einteilung des römischen Pfundes folgt seine Bestimmung, und damit schließt der zweite Teil.

Der dritte, weitaus umfangreichste Teil (S. 121—254) behandelt die mit den Gewichten in engstem Zusammenhange stehenden *Münzen*, und zwar zunächst das griechische Münzwesen. In einer Einleitung werden die ursprünglichen Tauschmittel und die Entstehung der Münze besprochen.

„Für die Viehzucht treibenden Voreltern der Hellenen und Italiker lag nichts näher, als das Tier, in welchem ihr Hauptbesitz bestand, das Rind, zum Ausdrucke des Wertes auch für ihren übrigen Besitz zu wählen . . . Allein schon HOMER kennt neben den Rindern die Metalle als Tauschmittel... Wenn man aber in dieser Weise die Metalle im Tauschhandel benutzte, so mußte notwendig der Gebrauch der Wage hinzukommen. Und so wird denn bei HOMER das Gold, wo es allein seinem Metallwert nach in Betracht kommt, regelmäßig nach dem Gewicht, dem Talent, bezeichnet."

Wie lange die Griechen das Metall als Tauschmittel gewogen haben und welche Metalle sie dazu besonders verwendeten, ist nicht genau bekannt, sicher aber ist, daß sie

„frühzeitig von Kleinasien und Phönikien her noch eine andere Art der Wertmessung durch die Metalle kennen lernten. Es kam von selbst dahin, daß das zum Tausch benutzte Metall eine konventionelle, dem Bedürfnis entsprechende Form erhielt. Größere Quantitäten zirkulierten in Barrenform. Ein eigentümlicher Beleg dafür ist vielleicht in dem griechischen *ὀβολός* zu suchen, wenn die alte Tradition richtig ist, daß damit das älteste eiserne Geld bezeichnet worden sei, welches die Form von Spießen, d. h. von länglichen, an den Enden dünneren Barren hatten. Wenn nun die in feststehende Form gegossenen Barren mit einem Stempel versehen wurden, der das Gewicht angab, so daß ein jedesmaliges Nachwägen erspart wurde, wenn dann ferner die kleineren Gewichtsteile durch runde, platte, ebenfalls gestempelte Metallstücke ausgedrückt wurden, so ging dadurch das bisher nur gewogene Wertmetall in die Form der *Münze* über."

Hultsch bespricht nun die Bedeutung des Münzstempels und das gegenseitige Verhältnis der Wertmetalle, um alsdann eingehend zu behandeln: die persische und kleinasiatische Münzwährung, den äginäischen Münzfuß, die älteste Münzwährung von Athen und die Einführung einer neuen durch Solon, die Feststellung des Normalgewichtes der attischen Münze, die attische Silberprägung, die Gold- und Kupferprägung, die Wertbestimmung des attischen Kurantes, den Kurs des Goldes, den attischen Münzfuß im makedonischen Reiche, die attische Währung in der Römerzeit.

Der zweite Abschnitt des dritten Teiles bringt das Münzwesen der römischen Republik.

„Viel deutlicher als bei den Griechen lassen sich bei den Römern die Spuren davon verfolgen, wie von dem ältesten einfachen Tauschverkehr allmählich der Übergang zum Gebrauch der Münze stattfand. Gerade wie den Griechen im Zeitalter Homers, so diente auch den Römern bis in noch spätere Zeit das Rind und daneben das Schaf als Tauschmittel. Es war in Wirklichkeit ihr ältestes Geld, weshalb sie auch diesen Begriff in ihrer Sprache nicht besser als durch eine Ableitung von *pecus* auszudrücken wußten . . . Aber das Bedürfnis des Verkehrs und das Beispiel anderer bereits mehr vorgeschrittener Völker führte frühzeitig dazu, neben dem Vieh noch andere Wertmesser anzuwenden. Dazu ist in Italien allgemein das Kupfer gebraucht worden. Das älteste Zeugnis dafür liefert wiederum die Sprache in dem von *aes* gebildeten Worte aestimare; außerdem beweisen es verschiedene Münzfunde. Das Metall wurde zugewogen, der rechtliche Kauf geschah per aes et libram . . .“

Ursprünglich zirkulierten rohe Kupferstücke, die Einführung von gemarktem Kupfer, *aes signatum*, schreibt die Tradition dem Könige Servius zu, wie sie ihm auch die Feststellung von Maß und Gewicht beilegte. Aber „erst zur Zeit der Dezemviralgesetzgebung (451) ist man darauf gekommen, das Kupfer mit Wertzeichen zu versehen, es somit unabhängig von der Wage zu machen und ihm dadurch die Geltung der Münze zu verleihen“. Es folgen nun bei Hultsch Untersuchungen über das Gewicht des ältesten Asses, über den Libralfuß, über die Ausmünzung des Kupfergeldes und über die Wertbestimmung der libralen Kupfermünze.

„Nach der einstimmigen Erklärung der Alten wog der Kupferas ursprünglich ein Pfund, seit der Reduktion vor dem ersten Punischen Kriege nur $^1/_6$ Pfund. Gleich als wollte er jedes Mißverständnis beseitigen, sagt Varro ausdrücklich, daß der alte As vor dem Punischen Kriege 288 Scrupel, also ein volles Pfund gewogen habe, und in gleicher Weise behaupten Plinius, Volusius Maecianus und andere, daß der As bis zu dem angegebenen Zeitpunkte pfündig (*as libralis* oder *librarius*) gewesen sei... Befragen wir dagegen den Befund der Münzen, so zeigt sich ein auffallend abweichendes Ergebnis. Zwar gibt es einen römischen As, der den Betrag des Pfundes noch übersteigt; aber was besagt diese eine Ausnahme gegen die zahlreichen übrigen Stücke, welche sämtlich zwischen 11 und 9 römischen Unzen stehen? Wie erklärt sich dieses auffällige Zurückbleiben hinter dem Normalgewicht, welches in einem solchen Grade bei Silbermünzen ohne Beispiel ist?“

Im Gegensatz zu Mommsen, der die Erklärung des niedrigeren Fußes in einer der alten Kupferwährung korrelaten Silberwährung sucht, schlägt

Hultsch für die Differenz zwischen dem normalen und effektiven Gewicht folgende Erklärung vor:

„Der Kupferas ist nicht eine eigentümliche Schöpfung der römischen Gemeinde, er steht im engen Zusammenhange mit dem in Latium und noch weiter in Mittelitalien verbreiteten Schwerkupfer, welches zum Teil älter sein muß als das römische. Diese Münzen lehnten sich an ein Pfund an, das wir als das latinische oder italische bezeichnen können, und von welchem das spätere römische Münzpfund nur der genaue nach dem griechischen Gewicht fixierte Betrag ist. Auf dieses Pfund wurde in Mittelitalien in den verschiedensten Abstufungen gemünzt . . .“

Die folgenden Paragraphen behandeln nun die Einführung der Silberprägung, die römische Silberwährung und die Goldprägung der römischen Republik. Der dritte Abschnitt des dritten Teiles ist dem Münzwesen der Kaiserzeit gewidmet.

In einem Anhange (S. 255—295) bespricht Hultsch noch die partikularen Maße, Gewichte und Münzen in einzelnen Ländern, die er in zwei Gruppen ordnet: 1) Griechenland und der Osten, nämlich Böotien, Ägina, Korinth, Sparta, griechische Inseln, Makedonien, Kleinasien, Syrien, Palästina, Persien, Ägypten, Cyrenaica; 2) Italien und der Westen, nämlich Italien, Sizilien, Hispanien, Gallien, Germanien.

Den Schluß des ganzen Werkes bilden, abgesehen von einem Sachregister, neunzehn Tabellen, in denen die wichtigsten der im Texte behandelten Maße, Gewichte und Münzen übersichtlich geordnet, miteinander verglichen und auf moderne reduziert werden. Eine besondere Erwähnung verdient aber auch noch das gewaltige Material an Literaturnachweisen, die in den umfangreichen, fast jeder Seite des Buches beigefügten Anmerkungen enthalten sind. —

„Nächst den Münzen und Gewichten, den Längen- und Hohlmaßen, die in unseren Museen geborgen liegen, und den Abmessungen der Bauwerke, deren Reste sich erhalten haben, lehren über antikes Maß und Gewicht noch das meiste die dürftigen Trümmer, die von der metrologischen Literatur der Alten auf uns gekommen sind. Dem bei seiner Darstellung empfundenen Bedürfnisse nach Vereinigung und Erläuterung dieser zerstreuten Stücke hat Hultsch selbst Abhilfe geschafft in den zwei Bänden seiner *Scriptorum metrologicorum reliquiae* (1864—1866), zu denen erst jüngste Funde erheblichen Zuwachs gebracht haben“ (Lipsius). Die beiden Bände, die Hultsch im engsten Zusammenhange mit seiner *Metrologie* in der Bibliotheca Teubneriana hat erscheinen lassen[1]), enthalten also, wie ihr Titel sagt, die Reste der metrologischen Literatur des Altertums, gesammelt zum Teil aus gedruckten und zum Teil aus ungedruckten Quellen. „Die Freunde unserer Wissenschaft werden ihm dafür noch dankbarer

1) Siehe hierzu, wie auch zur *Metrologie* selbst, die ausführliche Besprechung von W. Christ in Fleckeisens Jahrbüchern 1865, 433—461.

als für die Ausarbeitung seines Handbuches sein. Bisher waren nämlich jene Schriften in verschiedenen größeren Werken, die in kleineren Bibliotheken nicht leicht zu finden sind, zerstreut, so daß sich der Forscher zu jeder einzelnen Detailfrage erst mühsam sein Material zusammentragen mußte. Wäre daher schon eine bloße Zusammenstellung jener Fragmente eine sehr verdienstvolle Arbeit gewesen, so hat sich Hultsch ein noch größeres Verdienst dadurch erworben, daß er überall den Text auf sicherer Grundlage zu geben sich bemühte ... Bei der Herausgabe jener Fragmente ist nun Hultsch in der Art verfahren, daß er unter den Text den kritischen Apparat in bündiger Kürze setzt, in einer besonderen Einleitung die kritischen Hilfsmittel in den einzelnen Fragmenten bespricht und in ausführlichen Prolegomena die metrologische Seite der einzelnen Texte erörtert. In diesen Prolegomena zeigt der Verfasser einen glänzenden Scharfsinn und ein ungemeines Geschick in der Lösung der schwierigsten Fragen des Maß- und Gewichtssystems: manche Angaben, denen wir noch in der *Metrologie* begegnen, sind hier berichtigt, viele andere durch subtile Beweisgründe erläutert und erhärtet, aber auch ganz neue Fragen, namentlich bezüglich der Maßverhältnisse der Ägypter sind hier angeregt und zum größten Teil in überzeugender Weise erledigt. Da ferner gerade bei metrologischen Tafeln der Wert der Angaben vorzüglich von der Erkenntnis der Zeit, in der dieselben in Geltung waren, abhängt, so hat sich Hultsch auch bemüht, die Zeit der Abfassung der einzelnen Fragmente zu ermitteln, soweit dies bei den spärlichen und schwachen Anhaltspunkten möglich war.“ Dies das sachkundige Urteil von Christ.

Das erste Bändchen, 1864 erschienen, ist den griechischen Schriftstellern gewidmet. Die eigentlichen metrologischen Fragmente (Nr. 1—101) sind, ähnlich wie in der *Metrologie,* in solche über Längen- und Flächenmaße, über Körpermaße, über Hohlmaße und Gewichte, und über Münzen geordnet. Daran schließen sich noch Fragmente aus griechischen Lexikographen (Nr. 102—107), namentlich Exzerpte aus Hesychius und Suidas. Ungefähr die Hälfte des ganzen Bändchens aber nehmen die schon erwähnten Prolegomena ein (S. 3—176), durch die die einzelnen Fragmente kommentiert werden.

Zu den wichtigsten metrologischen Fragmenten gehören unbedingt die des Heron, insbesondere die acht sogenannten Heronschen Maßtafeln. Von diesen Fragmenten waren die meisten gelegentlich schon früher von B. de Montfaucon (1688), A. Mai (1819) und J. A. Letronne (1851 durch Vincent) veröffentlicht worden, einige aber teilt Hultsch hier zum erstenmal mit. Die Tafeln über die Längen- und Flächenmaße sind von Hultsch nach den Pariser Handschriften vollständig wiedergegeben, aus ihnen ist auch im wesentlichen der erste Abschnitt zusammengesetzt.

Aber auch der zweite, der die Körpermaße behandelt, enthält Berechnungen, die HERON entlehnt sind. Begreiflicherweise ist denn auch ein nicht unbeträchtlicher Teil der Prolegomena den HERONschen Fragmenten gewidmet. Indessen können wir diese Untersuchungen, die sich im großen und ganzen an MARTIN anschließen, hier nicht im einzelnen verfolgen, und so sei daher nur noch besonders auf die Erörterungen hingewiesen, die CHRIST gerade an diesen Teil der Darlegungen von HULTSCH anknüpft. Wir kommen übrigens auf die HERONschen Fragmente noch wiederholt zurück.

Das zweite Bändchen der *Metrologici scriptores*, wie die Fragmente gewöhnlich zitiert werden, erschien 1866. Es enthält Fragmente (Nr. 108—141) aus römischen Schriftstellern, insbesondere aus VARRO, aus COLUMELLA, aus den Gromatikern FRONTINUS, HYGINUS, BALBUS, aus VOLUSIUS MAECIANUS, PRISCIANUS, ISIDOR u. a. Auch diesen Fragmenten gehen kommentierende Prolegomena voraus (S. 3—45). Den zweiten Teil des Bändchens füllen ausführliche und sorgfältig bearbeitete Indices zu dem ganzen Werke, ein Index graecus (S. 161—228), ein Index latinus (S. 229—261) und ein Conspectus auctorum (S. 261—262).

Zwanzig Jahre nach dem Erscheinen der *Metrologie*, 1882, gab HULTSCH eine zweite Bearbeitung heraus. In den beiden Jahrzehnten war die metrologische Literatur durch zahlreiche und verdienstvolle, zum Teil sogar ganz hervorragende Forschungen bereichert worden. Abgesehen von den eigenen Arbeiten von HULTSCH, über die noch zu sprechen sein wird, ist da vor allem das Werk von J. BRANDIS *Das Münz-, Maß- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf ALEXANDER den Großen* (Berlin 1866) zu nennen. HULTSCH hat diesem Werke, das er selbst als epochemachend bezeichnet, und von dem er sagt, daß es mit MOMMSENS *Geschichte des römischen Münzwesens* (Berlin 1860) die Grundlage des metrologischen Wissens der Gegenwart bilde, außer einer Anzeige im Literarischen Centralblatt eine sehr ausführliche Besprechung in FLECKEISENS Jahrbüchern (1867) gewidmet, in denen er wenige Jahre zuvor (1862) auch das Werk von MOMMSEN eingehend rezensiert hatte. Schon ein flüchtiger Blick auf die neue Auflage der *Metrologie* zeigt, daß man es zum Teil wenigstens mit einem ganz neuen Werke zu tun hat: bei vergrößertem Formate ist die Seitenzahl von 328 auf 746 angestiegen. Dieser Zuwachs betrifft allerdings zum weitaus größten Teile den Anhang der alten Auflage, der über die partikularen ausländischen und provinzialen Maße gehandelt hatte und dem von der Kritik mit Recht „eine größere Ausführlichkeit und mitunter auch eine größere Genauigkeit" gewünscht worden war. Der Hauptinhalt der ersten Auflage, die drei Teile, die der Darstellung der attischen und römischen Metrologie gewidmet waren, und die wir ausführlich besprochen haben,

hat zwar auch einige Erweiterung (von 254 auf 348 Seiten) erfahren, doch konnte sich Hultsch hier im wesentlichen darauf beschränken, die Darstellung den Ergebnissen der neueren Forschungen anzupassen. Als Beispiel sei etwa die Bestimmung der griechischen Längenmaße (§ 8) hervorgehoben. Es wird dort gezeigt, daß die Griechen ihren Schritt, *βῆμα*, nicht anders als zu $2^1/_2$ Fuß angesetzt haben können, und nicht zu 3 Fuß, wie man früher geglaubt hatte. Demnach war das Wegmaß, das die Griechen *στάδιον* nannten, gleich 240 Schritt, während Hultsch in der ersten Bearbeitung seines Handbuches im Anschluß an Ideler 2 Schritt gleich einer griechischen Orgyie und mithin 200 Schritt gleich einem Stadion gesetzt hatte.

Zu einer gänzlichen Umarbeitung und Erweiterung des alten Anhanges sah sich Hultsch namentlich dadurch veranlaßt, daß „die Frage nach dem Zusammenhange der griechisch-römischen Maße, Gewichte und Währungen mit denen des alten Ägyptens und Babyloniens nicht mehr beiseite gelassen werden konnte". So fügte denn Hultsch den drei Teilen der ersten Auflage statt des alten, nur 40 Seiten umfassenden Anhanges drei weitere Teile von zusammen 347 Seiten hinzu. Indessen müssen wir uns darauf beschränken, den Inhalt dieser drei neuen Teile (IV—VI) nur in aller Kürze zu skizzieren. Der vierte Teil (S. 349—528) handelt von den Systemen Ägyptens und Vorderasiens und von der Übertragung der vorderasiatischen Maße und Gewichte nach Griechenland. Es bedarf keiner besonderen Erwähnung, daß gerade für diesen Teil das Werk von Brandis maßgebend gewesen ist. Im einzelnen werden in diesem Teile besprochen: das altägyptische Maß- und Gewichtssystem, das babylonisch-assyrische System, das phönikische, altsyrische und karthagische System, das hebräische System, das persische System, und sodann endlich die Übertragung der vorderasiatischen Maße und Gewichte nach Griechenland. Der fünfte Teil (S. 529—653) bringt die partikularen Maße Griechenlands und des Ostens (das griechische Festland, griechische Inseln, Makedonien, Kleinasien, Syrien und phönikisches Küstenland, Palästina, Ptolemäisches und ägyptisch-römisches System der Längen- und Hohlmaße, Ptolemäische und ägyptisch-römische Gewichte und Münzen, Cyrenaica), und der sechste Teil endlich (S. 654—695) gibt die partikularen Maße Italiens und des Westens (Sizilien, Italien, Hispanien, Gallien, Germanien).

Daß auch die Tabellen am Schlusse des Buches (es sind ihrer jetzt 22 statt 19) und das Register (28 Seiten statt 9) zeitgemäß umgearbeitet worden sind, braucht wohl kaum besonders hervorgehoben zu werden. Indessen darf doch gesagt werden, daß das Register in der neuen Gestalt zu einem außerordentlich nützlichen Hilfsmittel für die verschiedensten metrologischen Fragen geworden ist, wie denn überhaupt derartige

Verzeichnisse nicht leicht einer gewissenhafteren und sorgfältigeren Hand anvertraut werden konnten als der von HULTSCH.

Seitdem ist nun freilich wieder ein Vierteljahrhundert verflossen, und die Metrologie, eine verhältnismäßig junge Wissenschaft, ist nicht stehen geblieben. Die Ausgrabungen und die neuen Funde auf klassischem Boden haben manches zutage gefördert, was die Resultate, zu denen HULTSCH in seinem Handbuche gelangt war, modifiziert oder gar widerlegt hat. „Aber für jede Weiterarbeit auf metrologischem Gebiete", sagt LIPSIUS, „bildet das Werk ein unentbehrliches Hilfsmittel, das durch kein anderes ersetzt ist, und niemand hat an dieser Fortarbeit eifriger sich beteiligt als HULTSCH selber."

Es ist hier nicht möglich, neben den bereits besprochenen metrologischen Arbeiten auch noch die vielen anderen Einzeluntersuchungen zu durchgehen, die HULTSCH teils vor dem Erscheinen der zweiten Auflage seines Handbuches durchgeführt und dann in diesem verwertet hat, teils später hat folgen lassen. Ein Teil dieser Untersuchungen ist rein metrologischer Natur, wie z. B. die Abhandlung aus dem Jahre 1863 *Zur Lösung der Frage über den Philetärischen Fuß*, jenen nach PHILETÄROS (283—263) benannten Fuß, der schon in der ersten der acht HERONschen Tafeln als ποὺς βασιλικὸς καὶ Φιλεταίρειος eingeführt ist, und der als Zweidrittelmaß aus der großen oder königlichen Elle abgeleitet worden war. Diese ägyptische Elle, die mit der babylonischen identisch ist, maß 525—530 mm, so daß auf den Philetärischen Fuß 350—353 mm fallen, also nahezu $1^1/_5$ römischer Fuß, der 295,6 mm faßte. Dieser Gruppe von Untersuchungen gehören unter anderen auch die Abhandlungen *Drei Hohlmaße der römischen Provinz Ägypten* und *Ein Flüssigkeitsmaß der Provinz Hispanien und die Fassungsräume einiger antiken Dolien* an, die HULTSCH 1895 und 1897 veröffentlicht hat.

Eine zweite Gruppe der metrologischen Arbeiten von HULTSCH ist mehr der Kunstarchäologie, besonders den antiken Tempelbauten gewidmet. Ich nenne die drei in der Archäologischen Zeitung in den Jahren 1880—1881 veröffentlichten Abhandlungen *Das Grundmaß der griechischen Tempelbauten*, *Die Bestimmung des attischen Fußes nach dem Parthenon und Theseion*, *Die Maße des Heraion zu Samos und einiger anderen Tempel* und sodann namentlich, den schönen, inhaltreichen Vortrag *Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Ioniens*, den HULTSCH 1881 in einem dem Andenken an JULIUS KLEE gewidmeten Vortragszyklus gehalten hat. Das Heraion war der Heratempel, den HERODOT unter den drei von den Samiern ausgeführten Wunderwerken der Baukunst nennt, und das Artemision jener herrliche Artemistempel zu Ephesus, den der wahnwitzige HEROSTRATUS in der Nacht, in der ALEXANDER der Große ge-

boren wurde, in Brand gesteckt hatte. Bei seinen archäologischen Untersuchungen ging nun Hultsch darauf aus, für die griechischen Tempelbauten, von denen noch Überreste vorhanden sind, zunächst den zugrunde liegenden Maßstab festzustellen. So rechnete er z. B. für das Artemision die einzelnen Dimensionen nach den geringen Überbleibseln und nach den Angaben des Plinius aus und fand, daß die Breite des Tempels, an der Unterstufe gemessen, zusammen mit der Länge gerade ein babylonisches Stadion, nämlich 240 Schritt oder 360 Ellen betrage, mithin der ganze Umfang zwei Stadien. Nach diesem Maß für den Umfang der Baufläche werden nun die Hauptdimensionen nach genauem Maßstab, und zwar in ältester Zeit nur nach der Elle (der ägyptischen Königselle) bestimmt. Die kleineren Dimensionen werden zumeist durch den Fuß und seine Teile geregelt.

„Nach diesen Gesichtspunkten ist es möglich, die ursprünglichen Maße und Verhältnisse eines Tempels wieder aufzufinden, selbst wenn nur geringe Überreste von ihm erhalten sind. Wir ermitteln zunächst die Norm der zugrunde liegenden Elle, dann des beigeordneten Fußes, suchen ferner die Hauptdimensionen und ihre gegenseitigen Verhältnisse auf und schreiten weiter, immer in sicherer Schlußfolgerung ein Glied an das andere reihend, zu dem Wiederaufbau des Tempels, dessen Bild endlich in voller ursprünglicher Schönheit und Harmonie vor das geistige Auge tritt."

Es scheint nun freilich, daß sich Hultsch bei diesen Rekonstruktionen doch allzusehr von seiner rechnerischen Phantasie hat leiten lassen. Denn die Ergebnisse, zu denen er für die verschiedenen Tempelbauten gelangte, stießen bei den Kundigen auf ernsten Widerspruch, und zwar war es kein Geringerer als Wilhelm Dörpfeld, der in seiner Abhandlung *Die Proportionen und Fußmaße griechischer Tempel* (Archäologische Zeitung **39**, 261—270), auf Grund seiner eigenen, an Ort und Stelle ausgeführten Messungen die Resultate von Hultsch als unrichtig zurückwies. „Der Tempel des Heraion hatte ganz andere Dimensionen als die von Hultsch berechneten," lautete sein Urteil, „und möglicherweise hatte der von Hultsch auf 0,3087 m bestimmte attische Fuß einen ganz anderen Wert." Bei der Unsicherheit, die einigen antiken Grundmaßen noch anhaftet, warnt Dörpfeld überhaupt vor metrologischen Spekulationen und er schließt seinen Aufsatz mit den bemerkenswerten Worten: „Hat die vorstehende Untersuchung ergeben, daß selbst ein so bekannter Maßstab wie der attische Fuß von ca. 0,308 m noch nicht als vollkommen sicher erwiesen betrachtet werden darf, so wird man den Wunsch nicht für unberechtigt halten, daß sich die metrologische Forschung noch nicht mit den geringen Schwankungen einzelner Fußmaße oder mit hypothetischen Maßstäben (z. B. einem *modulus restitutus* des attischen Fußes, einem Korrelate des samischen Fußes, einem ephesischen Fuße, einer attischen Bauelle usw.) beschäftigen, sondern daß sie sich vorläufig darauf beschränken

möge, sichere Fundamente zu legen, um später auf diese das ganze Gebäude der antiken Metrologie aufbauen zu können. Dies kann aber nur dadurch erreicht werden, daß zunächst die hauptsächlichsten Dimensionen der antiken Tempel in Metermaß genau bestimmt und dann diese Werte sämtlich miteinander verglichen werden. Keinesfalls dürfen aber zu metrologischen Untersuchungen Bauwerke benutzt werden, von denen fast nichts erhalten ist, oder deren Überreste keine genauen Messungen gestatten." — Wenn man das chronologische Verzeichnis der Arbeiten von Hultsch überblickt, so kann man sich des Eindruckes nicht erwehren, daß Hultsch den Ausführungen von Dörpfeld wohl innerlich zugestimmt habe (Poland bestreitet dies freilich). Denn während gerade in den Jahren 1880—1882 kunstarchäologische Untersuchungen bei ihm im Vordergrund standen, hören derartige Publikationen nun plötzlich auf.

Einen sehr breiten Raum in der gesamten wissenschaftlichen Arbeit von Hultsch nimmt sodann eine dritte Gruppe metrologischer Untersuchungen ein, nämlich die, die sich auf die antiken Gewichte und die antiken Münzen bezieht. Da diese Untersuchungen indessen verhältnismäßig weit abliegen von den eigentlichen mathematischen Arbeiten von Hultsch — denen wir uns doch schließlich einmal werden zuwenden wollen —, so muß ich mich hier ganz kurz fassen. Als erste numismatische Abhandlung ist die Programmschrift vom Jahre 1862 *De Damareteo argenteo Syracusanorum nummo* hervorzuheben, mit der sich Hultsch in die Kreuzschule einführte. Sodann erinnere ich an die bereits früher genannten ausführlichen Besprechungen, die Hultsch 1862 und 1867 den Werken von Mommsen und von Brandis in Fleckeisens Jahrbüchern hat zuteil werden lassen, und die viel Selbständiges enthalten, ich nenne ferner die ebenfalls in Fleckeisens Jahrbüchern befindlichen Aufsätze *Der Denar Diokletians* (1880) und *Zu dem Komiker Krates* (1894) und hebe endlich unter Verweisung auf das am Schlusse dieser Biographie befindliche Verzeichnis der Publikationen von Hultsch noch die beiden umfangreichen Abhandlungen *Die Gewichte des Altertums nach ihrem Zusammenhange dargestellt* und *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte* hervor, die Hultsch 1898 und 1903 in den Abhandlungen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften hat erscheinen lassen. In der ersten dieser beiden Abhandlungen leitet Hultsch die Entwickelung der Gewichte des Altertums nicht mehr, wie in seiner *Metrologie*, aus dem babylonischen, sondern aus dem ägyptischen Gewichtssysteme ab, indem er die ägyptische Kite als Maß für alle anderen Gewichte des Altertums bezeichnet, für die ägyptischen, die babylonischen, die kleinasiatischen, die griechischen, die römischen und die karthagischen. Von der zweiten Abhandlung ist soeben (Mai 1908)

eine erweiterte Bearbeitung für SVORONOS' Werk über die Münzen der Ptolemäer unter dem Titel *Die Gewichte und Werte der Ptolemäischen Münzen* erschienen, deren von POLAND besorgte Korrektur gerade mit dem Tode von HULTSCH zum Abschluß kam. SVORONOS sagt darüber in der Vorrede:

„Schon als der greise Gelehrte die Neubearbeitung begann, und auch während des ganzen Jahres, in dem er dieser Beschäftigung oblag, war er leider ernstlich krank, und während der Drucklegung verschlimmerte sich sein Zustand dermaßen, daß er die Korrektur der Druckbogen und die Zusammenstellung der Tabellen seinem hervorragenden Freunde Herrn Prof. FRANZ POLAND übertragen mußte, der mir mit der Beendigung der Arbeit zu meinem großen Bedauern auch das Hinscheiden des verehrten Gelehrten meldete; ich habe somit die schmerzliche Freude, hier sein letztes Werk der Öffentlichkeit zu übergeben."

Der ägyptischen Metrologie waren überhaupt die letzten größeren Arbeiten von HULTSCH gewidmet. Es sei nur noch an seine *Beiträge zur ägyptischen Metrologie*, 1903—1906, erinnert. Und wie sich bei ihm auch sonst metrologische und mathematische Untersuchungen in eins verschmolzen, so auch hier. Denn in die ägyptische Metrologie greifen z. B. auch die Abhandlungen *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmim* (1894) und *Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung* (1895) über, die der ägyptischen Rechenkunst angehören und die uns daher noch später beschäftigen werden.

Obwohl es durchaus nicht meine Absicht sein kann, die so vielgestaltige Tätigkeit von HULTSCH auf dem weiten Gebiete der Metrologie auch nur einigermaßen erschöpfend zu schildern — ich bin zufrieden, wenn es mir gelungen ist, dem Leser eine ungefähre Vorstellung von der Arbeit zu geben, die HULTSCH hier bewältigt hat —, so wäre meine Darstellung doch allzu unvollständig, wollte ich nicht noch, wenn auch nur ganz kurz, der zahlreichen metrologischen Beiträge gedenken, die HULTSCH der *Realencyklopädie* von PAULY-WISSOWA zugewendet hat. Nur als Beispiele seien von diesen die Artikel *Artabe*, *Βῆμα*, *Χοῖνιξ*, *Damarete* und *Damareteion*, *Dareikos*, *Decussis*, *Δεκανουμμίον*, *Denarius*, *Didrachmon*, *Drachme*, *Dupondius* genannt, von denen einige freilich, wie besonders die umfang- und inhaltreichen Artikel *Denarius* (13 Spalten) und *Drachme* (21 Spalten), selbständigen größeren Abhandlungen gleichkommen.

Doch nun dürfte es endlich an der Zeit sein, daß wir uns den eigentlichen mathematisch-historischen Arbeiten von HULTSCH zuwenden. Aber auch dazu müssen wir erst noch einmal zur Metrologie zurückkehren, denn aus ihr zunächst sind diese Arbeiten hervorgegangen, so wie die metrologischen ursprünglich aus den rein philologischen. Schon in der ersten Auflage seiner *Metrologie* (1862) sagt HULTSCH bei der Besprechung der Quellen für die Metrologie, insbesondere der aus dem Altertume erhaltenen metrologischen Schriften:

„Die nachweislich älteste Erwähnung von metrologischen Schriftstellern findet sich bei Galen, von dem οἱ περὶ τῶν σταθμῶν καὶ μέτρων γράψαντες mehrfach angeführt werden. Eine Schrift des Dardanos περὶ σταθμῶν wird von Lydos erwähnt, darin befand sich auch die Nachricht über das vorsolonische attische Talent. Ein anderer Schriftsteller auf diesem Gebiete, Diodoros, wird von Suidas zitiert. Er hat ebenfalls eine Schrift περὶ σταθμῶν verfaßt und darin die Bestimmung des Talentes und seiner Teile gegeben. Näheres kennen wir nicht über ihn.

Was wir sonst von metrologischen Schriften wissen, verdanken wir den verschiedenen Fragmenten über Maße und Gewichte, die uns noch erhalten sind. Das der Zeit der Abfassung nach älteste ist vermutlich das kleine in den Analekten der Benediktiner[1]) veröffentlichte Stück περὶ μέτρων καὶ σταθμῶν καὶ τῶν δηλούντων αὐτὰ σημάτων, denn hier erscheint noch die Bestimmung des Denars zu $\frac{1}{84}$ Pfund, es muß also vor Nero abgefaßt sein. Wir zitieren den anonymen Verfasser mit Böckh als den Metrologen der Benediktiner. Weit umfänglicher sind die unter Herons Namen überlieferten Fragmente. Die Untersuchung über den Verfasser und besonders über die Zeit der Abfassung ist mit großem Eifer von verschiedenen Gelehrten geführt worden, kann aber trotzdem noch nicht als abgeschlossen betrachtet werden. Denn trotz der umfänglichen Werke Letronnes und Martins, die in neuester Zeit diese Frage behandelt, und trotz der Beiträge, welche von deutschen Gelehrten besonders Böckh dazu geliefert hat, ist ein sicheres Resultat noch nicht erzielt ... Nun besitzen wir unter Herons Namen verschiedene Bruchstücke, welche sämtlich auf ein größeres, verloren gegangenes Werk über Geodäsie zurückgehen. Dieses Werk, welches vielleicht γεωμετρούμενα betitelt war, enthielt eine vollständige Auseinandersetzung über die praktische Geometrie oder die Kunst des Feldmessens. Auch befand sich darin eine Erklärung und Übersicht über die Maße, nach welchen die Steuern erhoben wurden; dies müssen die von Eutokios zitierten μετρικά des Heron sein, und ebendaher rühren die drei so wichtigen metrologischen Fragmente, welche Herons Namen tragen. Das erste enthält die zur Zeit des Kompilators gültigen Längenmaße, das zweite die älteren damals nicht mehr gebräuchlichen. Wir haben in dieser zweiten Tabelle die vollständige Darstellung des ägyptischen Maßsystems, wie es unter Einfluß der griechischen Maße von den Ptolemäern gebildet und später unter römischer Herrschaft noch um einige römische Maße bereichert war. Die dritte Tabelle steht der ersten parallel, enthält aber viele abweichende Bestimmungen. Die beiden ersten Fragmente sind zuerst in den Analekten der Benediktiner veröffentlicht und neuerdings von Letronne aus den Manuskripten der Pariser Bibliothek nebst dem dritten Fragmente herausgegeben worden."

Ich habe diese Worte von Hultsch aus dem Jahre 1862 hier absichtlich wiedergegeben, um die damalige Situation kurz zu kennzeichnen. Was Hultsch in bezug auf Heron vorfand, waren im wesentlichen die Arbeiten von J. A. Letronne (1851 von A. I. H. Vincent herausgegeben) und H. Martin (1854). Als er sich daher bei der Bearbeitung des ersten Bändchens der *Metrologici scriptores* eingehender mit den metrologischen Fragmenten Herons, sowohl den planimetrischen als den stereometrischen, zu beschäftigen hatte, da stellte sich für ihn die unabweisbare Notwendigkeit heraus, die Beziehungen dieser Stücke zueinander und zum

1) *Analecta Graeca ... eruerunt monachi Benedictini.* Paris 1688.

Ganzen so gut als möglich ins klare zu bringen. Das mußte aber zu der Aufgabe führen, die geometrischen und stereometrischen Werke Herons, soweit sie in den damals bekannten Handschriften vorlagen, im Urtexte herauszugeben. Dieser keineswegs leichten Aufgabe unterzog sich Hultsch mit solcher Energie, daß er noch in demselben Jahre 1864, in dem der erste Band der *Metrologici scriptores* erschien, auch *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae* herausgeben konnte.[1])

Über die der Ausgabe zugrunde liegenden Handschriften berichtet Hultsch in der Vorrede (V—XXIV): es sind neun Pariser und eine Münchner. Mit Ausnahme des Parisinus A (Paris. gr. 1670), der dem 13. Jahrhundert angehört, reichen sie aber alle nicht über das 16. Jahrhundert zurück. Überdies ist keine einzige vollständig, einzelne enthalten sogar nur geringe Fragmente. So mußte Hultsch für die einzelnen Abschnitte seiner Ausgabe bald die eine, bald die andere Handschrift auswählen, oder er mußte den Text durch passende Kombination feststellen. Über alle diese Verhältnisse, die wir hier nicht eingehender verfolgen können, gibt die Vorrede ausführliche Auskunft. Dort finden sich auch die weiteren Mitteilungen über Inhalt und Anordnung der ganzen Ausgabe. Sie zerfällt in zehn Abschnitte. Der erste (S. 1—40) enthält *Heronis definitiones nominum geometriae*, der zweite (S. 41—140) *Heronis geometria*. Am Schlusse dieses zweiten Abschnittes (S. 138) findet sich, offenbar nachträglich beigefügt, die Maßtafel, die ehemals als die zweite gezählt wurde, jetzt aber als die älteste gilt und daher auch in den *Metrologici scriptores* (I, 180) als Tabula Heroniana I die Reihe eröffnet.[2]) Diese Tafel, die bereits römische Maße (ὁ Ἰταλικὸς πούς) aufweist, wird von Hultsch dem 1. oder 2. Jahrhundert n. Chr. zugewiesen. Sie galt ihm nicht als Herons Original, sondern vielmehr als „die Überarbeitung einer aus der Ptolemäerzeit stammenden ältesten Tafel". Diese Auffassung steht natürlich im engsten Zusammenhang mit der Heron-Frage, d. h. mit der Frage, wann eigentlich Heron gelebt hat. Hultsch (*Metrol. script.* I, 9) hatte ihn als Schüler des Ktesibius in die zweite

---

1) Siehe hierzu die Besprechungen von C. Wex und R. Hoche in Fleckeisens Jahrbüchern 1865, 41—44 und 461—466. Diese Besprechungen umfassen zugleich auch die Abhandlung über den Heronischen Dreiecksatz, von der gleich nachher die Rede sein wird.

2) Ebenfalls im zweiten Abschnitt (S. 47) befindet sich die bereits früher erwähnte, mit den Worten *τὰ δὲ μέτρα ἐξηύρηνται ἐξ ἀνθρωπίνων μελῶν* beginnende Maßtafel, die Hultsch in den *Metrologici scriptores* (I, 187) als Tabula Heroniana V bezeichnet, und die er dem 3. Jahrhundert n. Chr. zuweist (s. *Metrologie* 2. Aufl., S. 9, Anm. 2 und 3). Den Schluß des ersten Abschnittes (S. 39) bildet die Tabula Heroniana VII (*Metrol. script.* I, 193). Diese drei Tafeln I, V, VII sind die wichtigsten. Sie waren auch schon von Letronne, die Tafeln I und V vorher bereits von Montfaucon herausgegeben worden.

Hälfte des 2. Jahrhunderts v. Chr. gesetzt und an dieser Auffassung auch später noch festgehalten. Indessen kann es unmöglich meine Absicht sein, hier auf diese Streitfrage, in der das letzte Wort noch nicht gesprochen ist, näher einzutreten, und ich begnüge mich daher, auf die Argumente hinzuweisen, die Wilhelm Schmidt (*Heronis opera* I, p. XI u. flg.) gegen Hultsch geltend gemacht hat, und kehre nun nach dieser Abschweifung zur Heron-Ausgabe von 1864 zurück.

Der dritte Abschnitt (S. 141—152) enthält *Heronis geodaesia*, der vierte (S. 153—171) *Heronis introductiones stereometricorum*, der fünfte (S. 172—187) *Heronis stereometricorum collectio altera*, der sechste (S. 188 bis 207) *Heronis mensurae* (*μετρήσεις*), der siebente (S. 208—234) *Heronis liber geeponicus*. Besonders bemerkenswert ist der achte Abschnitt (S. 235—237) *Heronis mensura trianguli* (excerpta e libro *περὶ διόπτρας*), in dem die Aufgabe gelöst wird, den Inhalt eines Dreiecks zu finden, von dem die drei Seiten gegeben sind. „Infinitum paene laborem attulit mihi Heronis gravissimum illud theorema, quo areae triangularis mensura ex tribus lateribus efficitur", sagt Hultsch von diesem Abschnitt in der Vorrede. Wir halten uns indessen an dieser Stelle nicht weiter dabei auf, da Hultsch diesem „Heronischen Lehrsatz" eine besondere Abhandlung gewidmet hat, die fast gleichzeitig mit seiner Heron-Ausgabe erschienen ist, und von der noch ausführlicher zu sprechen sein wird.

Die beiden letzten Abschnitte der Ausgabe enthalten Zusätze. Der neunte (S. 238—244) bringt *Didymi Alexandrini mensurae marmorum ac lignorum* (*Διδύμου Ἀλεξανδρέως μέτρα μαρμάρων καὶ παντοίων ξύλων*), die Hultsch wegen der Übereinstimmung der darin enthaltenen Maßtafeln mit denen Herons aufgenommen hat. Der zehnte und letzte Abschnitt (S. 245—280) enthält *Anonymi variae collectiones ex Herone, Euclide, Gemino, Proclo, Anatolio, in codicibus continuo adscriptae ad Heronis definitiones*.

Die Ausgabe von Hultsch ist eine reine Textausgabe ohne Übersetzung. Um so größere Sorgfalt wurde auf den Text selbst verwendet und auf den ihn Seite für Seite begleitenden kritischen Apparat, der in eingehendster Weise über die handschriftlichen Varianten Rechenschaft gibt, zugleich aber auch einen Einblick in die mühevolle Tätigkeit des Herausgebers gewährt. „Wer jemals selbst kritische Studien an den griechischen Mathematikern gemacht hat, kennt die unsäglichen Schwierigkeiten, welche eine Textfeststellung mit sich bringt. Die Handschriften rühren mit sehr wenigen Ausnahmen aus spätester Zeit — wenige liegen vor dem 15., die meisten stammen sogar erst aus dem 16. und 17. Jahrhundert —, dazu der Umstand, daß selten eine Schrift in ihrer ursprünglichen Gestalt überliefert ist, sondern meist zwei oder noch mehr Rezensionen durchgemacht hat, ferner die oscitantia librariorum, welche nirgends so entsetzlich

zutage tritt wie bei mathematischen Schriften mit ihrem meist völlig unverstandenen Inhalt, dazu die Sprache, deren Gebrauch festzustellen höchstens bei den an Eukleides sich anschließenden Geometern mit einiger Sicherheit erreicht werden kann, endlich die Flut von Abbreviaturen, welche sich häufig aller Erklärung entziehen, meist nur durch Konjektur und äußerst mühselige Vergleichung entziffert werden können, zumal diese ganz besonders der Willkür und dem Unverstande der Abschreiber preisgegeben waren — alles dieses muß man berücksichtigen, um den ganzen Wert einer Ausgabe würdigen zu können, wie die vorliegende des Heron aus Alexandreia." So äußerte sich R. Hoche in der oben erwähnten Besprechung.

Den Schluß des Werkes bilden die Indices. Der erste (S. 281—315) ist ein Index verborum, der sich aber nur auf die Abschnitte I—IX, d. h. auf Heron und Didymus, bezieht. Hultsch hatte geglaubt, diesen Index von dem zweiten Index verborum (S. 316—333), der die *Variae collectiones* im letzten Abschnitt umfaßt, vollständig abtrennen zu sollen. Dementsprechend sind denn auch bei dem dritten Index (S. 333), dem Conspectus auctorum, die beiden ersten auseinandergehalten.

Fast vierzig Jahre lang war die Ausgabe von Hultsch die Hauptquelle für das Studium der geometrischen Schriften Herons gewesen. Freilich — daß diese Schriften in der vorliegenden Form direkt auf Heron zurückzuführen seien, das glaubte Hultsch natürlich nicht. Darüber hatte er sich ja auch schon bei Besprechung der Heronschen Maßtafeln (z. B. *Metrol. script.* I, 23) geäußert, und er ist dann auch später noch bei anderen Gelegenheiten auf diese Frage zurückgekommen, so z. B. 1894 bei seiner Besprechung von Cantors *Vorlesungen* I². Dort sagt er:

„Die bis auf unsere Zeit gekommenen Heronischen Texte sind echt, insofern sie den Autornamen und in der Hauptsache auch die ursprüngliche Anlage und Gestaltung der Heronischen Werke bewahrt haben, unecht aber insofern, als sie im stetigen Dienste der Praxis zu wiederholten Malen neu aufgelegt und dabei je nach den Zeitbedürfnissen überarbeitet worden sind. Selbstverständlich hat der arabische Übersetzer der Mechanik eine solche Neubearbeitung benutzt; jene älteren Texte, die einst dem Vitruv und den Gromatikern vorgelegen haben, waren im Mittelalter ebensowenig noch vorhanden wie heutigentags."

Zu den letzteren Worten durfte nun freilich Wilhelm Schmidt (*Heronis opera* I, p. XXI) mit Recht bemerken: „Um mit dem letzten Argumente zu beginnen, so folgt daraus, daß wir heute keine älteren Texte mehr haben, noch keineswegs, daß die Araber auch keinen hatten. Zur Vorsicht in solchen Dingen mahnt jedenfalls der Umstand, daß R. Schöne vor zwei Jahren die *Μετρικά* in einer alten Handschrift entdeckt hat (Ende 1896 in der Konstantinopeler Handschrift Nr. 1 des alten Serails aus dem 11. Jahrhundert), eine Schrift Herons, von der man doch seit den Zeiten

des PAPPUS und EUTOKIOS, dem Ende des 3. und dem 6. Jahrhundert n. Chr., keine Spur wieder hatte finden können."

Mit der Veröffentlichung der *Μετρικά* (durch H. SCHÖNE im 3. Bande der neuen HERON-Ausgabe, 1903) ist die Frage nach der „Echtheit" der von HULTSCH herausgegebenen Schriften in ein neues Stadium getreten, und ihr Anrecht an die Autorschaft HERONS ist in noch höherem Maße als früher zweifelhaft geworden. Indessen sind die Akten darüber doch noch nicht geschlossen, und die uns vorliegenden Arbeiten von HULTSCH geben auch keine Veranlassung, noch länger bei dieser Frage zu verweilen.[1]) Wie aber auch schließlich die Entscheidung ausfallen möge, die Ausgabe von HULTSCH wird doch immer ihren Wert behalten als eine sehr willkommene Bereicherung unserer Kenntnis der mathematischen Wissenschaft des Altertums.

Fast gleichzeitig mit der HERON-Ausgabe hat HULTSCH, wie schon früher erwähnt wurde, eine Abhandlung veröffentlicht, die speziell dem „HERONischen Lehrsatz" gewidmet ist. In dieser inhaltreichen Abhandlung, die R. HOCHE[2]) mit Recht „ein wahres Muster einer kritischen Untersuchung" genannt hat, gibt HULTSCH zunächst eine kurze Übersicht über die Geschichte der HERONischen Frage. Diese Übersicht knüpft an die uns bekannten Vorarbeiten vor HULTSCH an, nämlich die schon mehrfach zitierten Veröffentlichungen von B. DE MONTFAUCON (1688), J. A. LETRONNE (1851 durch VINCENT) und H. MARTIN (1854), um dann speziell bei dem Werke von G. VENTURI, *Commentari sopra la storia e le teorie dell'ottica*, tomo I, Bologna 1814, zu verweilen. In diesem Werke hatte nämlich VENTURI gezeigt, „daß das Problem, die Fläche des Dreieckes aus den drei Seiten zu bestimmen, dasselbe, das man anfangs Gelehrten des 15. Jahrhunderts, dann den Arabern, zuletzt den Indern zuschrieb, bereits von HERON gefunden, und die vollständige Beweisführung in der HERONischen Schrift *περὶ διόπτρας* enthalten sei". Die *διοπτρικὴ τέχνη* der Alten hatte mit der Wissenschaft der Optik nichts zu tun, sondern war „ein Teil der praktischen Geometrie, insofern dieselbe zur Raummessung sich des Instrumentes bediente, welches den Namen *διόπτρα* führt. Die HERONische Schrift *περὶ διόπτρας* enthält zunächst eine Beschreibung dieses Instrumentes, und danach zahlreiche Aufgaben, in denen dasselbe seine Anwendung findet, außerdem aber auch einige Probleme der praktischen Geometrie und der Mechanik, die nichts mit dem Diopter zu tun haben. Diese haben sicher nicht ursprünglich zu dem Werke gehört, sie sind von einem späteren Bearbeiter aus anderen HERONischen Schriften eingeschoben worden.

1) Die umfangreiche Literatur zu dieser Frage, wie zu der HERON-Frage überhaupt, findet sich in dem wertvollen Berichte *Mathematik, Mechanik und Astronomie 1902—1905*, den K. TITTEL in BURSIANS Jahresbericht 1906 erstattet hat (s. dort S. 157—168). 2) Siehe S. 347 Anm. 1.

Wir sind hier einmal in dem Falle, einem unberufenen Interpolator Dank zu wissen, denn nur durch ihn ist uns der Satz über das Dreieck erhalten". Diese letzteren Ausführungen von Hultsch haben nun freilich heute keine Gültigkeit mehr. Denn einerseits befindet sich der Heronische Dreiecksatz mit fast denselben Worten auch in den *Μετρικά* (*Heronis opera* III, p. 20, 6), und sodann hat H. Schöne in der Vorrede (p. XIX) zu diesem dritten Bande nachgewiesen, daß das von Hultsch als interpoliert bezeichnete Kapitel XXX tatsächlich in die Dioptra gehört.

Hultsch gibt nun zunächst eine wortgetreue Übertragung von Venturis Übersetzung, wobei er der neu zu zeichnenden Figur wegen einige zweckmäßige Modifikationen einführt, um dann unmittelbar darauf den bisher noch nicht edierten Originaltext folgen zu lassen, wie er sich in dem Pariser cod. graec. 2430 befindet, demselben, den auch Venturi benutzt hatte. Um eine einfache Abschrift handelte es sich dabei freilich nicht, und man versteht die bereits früher (S. 348) zitierten Worte „infinitum paene laborem etc.", wenn man liest, was Hultsch darüber schreibt: „Die Handschrift ist, wie die meisten, in welchen die griechischen Mathematiker uns überliefert sind, sehr jung; sie gehört dem 16. Jahrhundert an. Eine große Schwierigkeit machten die ungewöhnlichen Abkürzungen, mit denen sie geschrieben ist. Ich entnahm daher eine in jedem Zug getreue Kopie und probierte dann die verschiedenen fast hieroglyphischen Zeichen so lange durch, bis alles untereinander stimmte." Hultsch berichtet nun über die mühsame Entzifferung der verschiedenen rätselhaften Zeichen noch genauer, bevor er seinen so bereinigten griechischen Text folgen läßt. Nach einer sich daran anschließenden ausführlichen Erläuterung des Originaltextes und einer Begründung der darin vorgenommenen Änderungen fährt Hultsch fort:

„Dies ist der Heronische Beweis, der nun, so hoffen wir, für alle in seiner vollen, schönen Klarheit sich darstellt. Daß Newton, Euler u. a [1]) für denselben Lehrsatz andere Beweise erfunden haben, kann dem Verdienste des alten Alexandriners keinen Eintrag tun; im Gegenteil, dasselbe muß um so glänzender hervorstrahlen, da er fast zwei Jahrtausende früher mit viel beschränkteren wissenschaftlichen Mitteln dasselbe Ziel erreicht hat. Nicht weniger interessant aber als der Lehrsatz selbst ist dessen weitere Geschichte, über die wir jetzt noch einige Bemerkungen hinzufügen wollen."

Der Beweis des Satzes erscheint nirgends wieder, der Satz selbst aber, und zwar allgemein ausgesprochen, doch ohne Beweis, findet sich noch einmal in der *Geodäsie Herons* (S. 151 der Ausgabe von Hultsch), und sodann speziell für das Dreieck mit den Seiten 13, 14, 15 in der *Geometrie* (S. 71). Dieselbe Aufgabe ist zuletzt wiederholt bei dem

1) Den näheren Nachweis gibt Klügel im mathematischen Wörterbuch unter Dreieck § 36. Vgl. auch Chasles, *Geschichte der Geometrie*, S. 481, 483.

Byzantiner JOHANNES PEDIASIMUS, der im 14. Jahrhundert eine Bearbeitung der HERONischen Geometrie verfaßte. Sodann ist von römischen Gromatikern M. JUNIUS NIPSUS zu nennen, der im 2. Jahrhundert einen allerdings sehr entstellten Auszug aus HERON angefertigt hat, in dem sich das gleiche Beispiel vorfindet. Aber auch zu den Hindus hat der Satz seinen Weg gefunden, BRAHMEGUPTA und später BHASKARA haben ihn bearbeitet. Das alles wird von HULTSCH an Hand der Übersetzung COLEBROOKES ausführlich auseinandergesetzt. Den Schluß der trefflichen Abhandlung bildet der Nachweis des Weges, den der Satz von den Griechen zu den Arabern und von diesen durch LEONARDO von Pisa und PACIOLI nach dem Abendlande genommen hat. „Gerade dieser Beweis darf für ein Muster besonnener Kritik erklärt werden; ein Widerspruch ist schlechterdings nicht möglich", sagt HOCHE am Schlusse seiner mehrfach zitierten Besprechung. Diese Worte beziehen sich auf die charakteristische Reihenfolge der Buchstaben, die in dem Beweise von LEONARDO verwendet sind, nämlich *a b g t e z h k l m n*, eine Reihenfolge, der das griechische Alphabet zugrunde gelegen haben muß. HULTSCH zeigt nun — und diese Erkennungsmethode hat er zuerst angewandt —, daß gerade diese Reihenfolge für arabische Bearbeitungen griechischer Schriften charakteristisch ist, und daß daher im vorliegenden Falle die Buchstabenfolge mit Sicherheit den griechischen Ursprung des von LEONARDO überlieferten Beweises bekundet. —

Indem wir scheinbar einen Zeitraum von zwölf Jahren überspringen, wenden wir uns nun zu dem Werke, durch das HULTSCH seinen Namen mit unauslöschlichen Zügen in die Annalen der mathematisch-historischen Wissenschaft eingeschrieben hat, und das allein ausreichen würde, ihm für alle Zeiten die dankbare Anerkennung der Nachwelt zu sichern. Es ist kaum nötig hinzuzufügen, daß von der Ausgabe der mathematischen Sammlung des PAPPUS die Rede ist.

In der Tat, für den Mathematiker ist HULTSCH in erster Linie der Herausgeber des PAPPUS! Aber auch von HULTSCH selbst darf gesagt werden, daß unter allen den ausgezeichneten Arbeiten, mit denen er die Wissenschaft bereichert hat, die Ausgabe des PAPPUS unzweifelhaft in vorderster Reihe steht, und daß ihr vielleicht nur noch die POLYBIUS-Ausgabe an die Seite gestellt werden kann. Hat er doch auch der PAPPUS-Ausgabe mehr als ein Jahrzehnt seines Lebens gewidmet, und ist doch auch sie wiederum für ihn eine fast unerschöpfliche Quelle weiterer Forschungen gewesen.

Über die Entstehungsgeschichte, über Umfang und Inhalt, sowie über die Bedeutung seiner Ausgabe der *Collectio* des PAPPUS hat uns HULTSCH selbst sehr eingehend berichtet: zunächst in den Vorreden, die

jedem der drei Bände des großen Werkes vorausgehen, und sodann in den Selbstanzeigen (1879), die sich im Repertorium von Königsberger und Zeuner und im Bullettino von Boncompagni finden. Danach hatte er den Plan zu dem Werke schon sehr früh gefaßt, aber erst 1864, nachdem er die Heron-Ausgabe und anderes, was damit zusammenhing, abgeschlossen hatte, war es ihm möglich geworden, die Arbeit in Angriff zu nehmen. Dafür begann sie dann auch gleich unter den günstigsten Auspizien. Denn als sich Hultsch mit einer Anfrage an Mommsen wandte, ob sich nicht vielleicht in Italien, insbesondere in der vatikanischen Bibliothek, eine ältere Pappus-Handschrift befände, da die Pariser und die anderen damals bekannten verhältnismäßig neu seien, da konnte ihm dieser antworten, daß in der Tat eine solche von Kurt Wachsmuth eingesehen worden sei. Durch Wachsmuth und namentlich dann durch Adolf Kiessling wurde nun Hultsch mit diesem vatikanischen Codex bekannt gemacht, der sich gleich von Anfang an als allen übrigen Handschriften überlegen zeigte, und von dem Hultsch dann in der Folge nachweisen konnte, daß er überhaupt der Archetypus aller bisher bekannten sei. Das war natürlich eine Entdeckung von nicht geringer Bedeutung.

Bevor nun aber Hultsch zur Untersuchung und Verwertung dieses Vaticanus nach Rom reiste, stellte er sich zunächst auf Grund anderer Handschriften einen zusammenhängenden griechischen Text her, um mit diesem dann den Vaticanus vergleichen zu können. Diese Arbeit führte er im Sommer des Jahres 1865 aus, indem er sich aus Paris und Leiden diejenigen Codices, die zunächst zu berücksichtigen waren, schicken ließ, aus Paris den Parisinus 2440 aus dem 15. Jahrhundert und aus Leiden den Scaligeranus und den Vossianus. Mit der so angefertigten vorläufigen Urschrift ausgerüstet und daher aufs beste versehen, reiste nun Hultsch im Jahre 1866 nach Rom.

Die in der vatikanischen Bibliothek befindliche Pappus-Handschrift, die das eigentliche Reiseziel bildete, und die nun von Hultsch an das Tageslicht gezogen und zur Grundlage seiner klassischen Pappus-Ausgabe gemacht werden sollte, ist der Vaticanus Graecus 218 aus dem 12. Jahrhundert. Schon durch sein Alter ist er bemerkenswert. Daß er aber auch allen anderen vorhandenen Handschriften mittelbar oder unmittelbar als Vorlage gedient hatte, konnte Hultsch mit Sicherheit aus folgenden Merkmalen feststellen: der Vaticanus weist nämlich vielfach am unteren Rande der Blätter allerlei Schäden auf, indem durch Feuchtigkeit, Schmutz oder andere Ursachen die Schrift unleserlich geworden ist. Da nun genau an denselben Stellen alle jüngeren Handschriften Lücken aufweisen, so geht daraus klar hervor, daß sie alle von dem Vaticanus selbst und nicht etwa von einem älteren Codex abstammen. Aus dieser wichtigen Ent-

deckung ergab sich nun zunächst die Folgerung, daß gegenüber dem Vaticanus alle anderen Handschriften wertlos sind und nur noch insofern Berücksichtigung verdienen, als sie etwa brauchbare Konjekturen darbieten. In dieser Hinsicht sind nun freilich von besonderem Werte der Vossianus und namentlich der Scaligeranus, welch letzterer sehr viele, von SCALIGER herrührende Emendationen aufweist. Außer diesen Codices bespricht nun HULTSCH in der Vorrede zum ersten Bande noch eine ganze Reihe von PAPPUS-Handschriften aus Paris, Oxford, Mailand, Wolfenbüttel, Urbino, Neapel, Wien, die er zum Teil selbst eingesehen hat, und die, wie gesagt, alle deutlich verraten, daß sie von dem Vaticanus abstammen.

So hat denn HULTSCH seine PAPPUS-Ausgabe zunächst natürlich ganz auf die Autorität dieser vatikanischen Handschrift gestützt. Daneben aber hat er namentlich den Parisinus 2440 berücksichtigt und in den Anmerkungen alles sorgfältig notiert, was etwa darin von verschiedenen Gelehrten verbessert oder sonst geändert worden war. Gewissermaßen als Vertreter aller neueren Handschriften wurde der Scaligeranus ausgewählt, doch wurden, wo immer es nötig schien, auch der Vossianus, der Codex des COMMANDINO (von dem bald geredet werden wird) und die Parisini 2368 und 2369 ausdrücklich in den Anmerkungen zitiert. Wir müssen es uns leider versagen, der Entstehungsgeschichte der PAPPUS-Ausgabe, insbesondere der genaueren Besprechung des zugrunde gelegten handschriftlichen Materiales, die in der Vorrede zum ersten Bande bis zu S. XV reicht, weiter nachzugehen, so viel Interesse sie auch darbietet. Wohl aber darf aus dieser Vorrede noch nachgetragen werden, daß HULTSCH darin dankbar der Unterstützung gedenkt, die ihm bei der mühsamen Arbeit des Kollationierens AUGUST WILMANNS, HUGO HINCK, AUGUST MAU und LUDWIG MENDELSSOHN in uneigennütziger Weise hatten zuteil werden lassen.

Der erste Band von *PAPPI Alexandrini collectionis quae supersunt* erschien 1876. Man wird den Zwischenraum von zehn Jahren zu würdigen wissen, wenn man einerseits das gewaltige Material, das zu verarbeiten war, berücksichtigt und anderseits sich daran erinnert, daß in diesem Zeitraum, nämlich in den Jahren 1867—1872, zugleich auch die große POLYBIUS-Ausgabe erschienen ist. Und neben diesen beiden großen Werken gingen noch mancherlei andere wissenschaftliche Arbeiten einher, vor allem aber eine ausgedehnte und anstrengende Tätigkeit im Dienste der Schule. Schon 1877 erschien der zweite Band der *Collectio*, und im folgenden Jahre, 1878, lag das große Werk vollendet vor. Die Berliner Akademie der Wissenschaften hatte in dankenswerter Weise die erforderlichen Mittel für die Herausgabe bewilligt.

Wenden wir uns nun zu einer kurzen Darlegung des Inhaltes der drei Bände der PAPPUS-Ausgabe. Es ist bereits von den Vorreden gesprochen worden, die jeden der drei Bände eröffnen, und aus der Vorrede zum ersten ist auch schon das Wesentlichste von dem mitgeteilt worden, was sich auf die Handschriften und auf die eigentliche Entstehungsgeschichte des Werkes bezieht. Es verlohnt sich aber, diese Vorreden noch weiter zu verfolgen, da sie sich weit über das gewöhnliche Niveau erheben und den Rang selbständiger, wissenschaftlicher Abhandlungen besitzen. Aus der Vorrede zum ersten Bande ist vor allem noch zu erwähnen die ausführliche und sorgfältige Zusammenstellung aller der Arbeiten, in denen bisher Fragmente des PAPPUS herausgegeben, bearbeitet oder übersetzt worden waren. Diese sehr interessanten bibliographischen Notizen erstrecken sich von S. XV bis S. XXII und behandeln (in alphabetischer Folge) die Arbeiten von P. BRETON, J. W. CAMERER, M. CHASLES, F. COMMANDINO, H. J. EISENMANN, C. I. GERHARDT, E. HALLEY, C. G. HAUMANN, S. HORSLEY, J. SCALIGER, R. SIMSON, J. TORELLI, A. J. H. VINCENT, J. WALLIS. Von diesen Arbeiten beschäftigen sich allerdings die meisten nur mittelbar mit PAPPUS und auch nur mit einzelnen Teilen der *Collectio.* HULTSCH hat aber auch diese bei seiner Ausgabe verwertet und abweichende Lesarten allenthalben notiert. Ganz besonders aber ist unter den genannten Autoren FEDERIGO COMMANDINO (1509—1575) hervorzuheben, der seinen vielen fleißigen Übersetzungen von EUKLID, ARISTARCH, ARCHIMEDES, APOLLONIUS, HERON, PTOLEMÄUS auch eine lateinische Übersetzung der *Collectio* des PAPPUS (*PAPPI Alexandrini mathematicae collectiones* heißt der Titel bei COMMANDINO, und so wird das Werk vielfach auch heute noch fälschlich zitiert) hinzugefügt hat. Die mit ausführlichem Kommentar versehene Übersetzung erschien 1588, nach dem Tode COMMANDINOS, und wurde dann (wie es scheint 1589 und) nochmals 1602 verlegt. Die Übersetzung COMMANDINOS ist um so bedeutungsvoller, als sie bis zur Ausgabe von HULTSCH, also fast drei Jahrhunderte lang, nicht nur die einzige geblieben ist, die es überhaupt gab, sondern auch zugleich den griechischen Urtext ersetzen mußte, der, von einzelnen Fragmenten abgesehen, vor HULTSCH überhaupt noch niemals gedruckt worden war. Welchen Codex COMMANDINO seiner Übersetzung zugrunde gelegt hat, läßt sich nicht mehr genau angeben. Nach HULTSCH kommt dieser Codex am nächsten an den Parisinus 2440 heran, aber doch so, daß er wahrscheinlich nicht aus diesem selbst, sondern aus einem anderen, sehr ähnlichen, abgeschrieben worden war. Für die Arbeit seines Vorgängers hat HULTSCH nur Worte höchster Anerkennung, und er sagt ausdrücklich, daß er nicht nur jede von COMMANDINO herrührende Verbesserung ganz besonders als solche hervorgehoben habe, sondern daß er auch da, wo er die Konjekturen COMMANDINOS

nicht habe annehmen können, diese trotzdem (ins Griechische zurückübersetzt) mit den Worten „voluit Co“ in die Anmerkungen zum Texte mitaufgenommen habe.

Wir werden noch Gelegenheit haben, auf die kurze Vorrede zum zweiten Bande zurückzukommen, und wenden uns daher jetzt sofort zu der des dritten. Gleich zu Anfang wird die Frage nach der Zeit aufgeworfen, zu der PAPPUS gelebt hat. Bis vor kurzem hatte man, gestützt auf SUIDAS, den bekannten Lexikographen aus dem 10. Jahrhundert, allgemein angenommen, daß PAPPUS ein Zeitgenosse des THEON von Alexandria gewesen sei, also unter der Regierung von THEODOSIUS dem Großen (379 bis 395) gelebt habe. Nun hatte aber USENER in der Notiz *Vergessenes* (Rhein. Museum f. Philol. 28, 1873, 403—404) auf die alte Leidener Handschrift Nr. 78 der *THEONischen Handtafeln* aufmerksam gemacht, die in den Jahren 913—920 angefertigt worden ist, und in der sich unter anderen Scholien, die am Rande der Regentenlisten stehen, bei der Regierungszeit des DIOKLETIAN (284—305) die Bemerkung findet: „unter diesem hat PAPPUS geschrieben“. HULTSCH schließt sich nun dieser, von USENER noch genauer motivierten Zeitbestimmung an, um so mehr, als es für ihn ausgemacht war, daß PAPPUS vor THEON gelebt haben müsse. Sodann stellt HULTSCH fest, daß der Titel des PAPPUSschen Werkes, das ursprünglich aus acht Büchern bestand, *συναγωγή* gelautet hat, wie allein schon aus der Stelle (lib. III, 30, 21) *ἐν τῷ τρίτῳ τούτῳ τῆς συναγωγῆς βιβλίῳ* deutlich hervorgeht.

Den weitaus größten Teil der Vorrede zum dritten Bande widmet aber HULTSCH einer sorgfältigen Zusammenstellung und Besprechung aller vorhandenen Hinweise auf Schriften, die PAPPUS außer der *συναγωγή* verfaßt hat. Solche Hinweise finden sich u. a. bei SUIDAS, PROKLUS, EUTOKIUS, aber auch in der *Collectio* des PAPPUS selbst. Dort (IV, 246, 1) erwähnt nämlich PAPPUS einen Kommentar, den er zu dem *Analemma* des DIODORUS[1]) geschrieben habe. Zu diesem, auf den ersten Blick etwas befremdlichen Titel gibt nun HULTSCH, gestützt auf VITRUV und PTOLEMÄUS, die genauere Erklärung (descriptio circulorum sphaerae caelestis in plano = orthographische Projektion), mit der er zugleich eine früher geäußerte Konjektur (Anm. zu IV, 246, 1) zurücknahm.[2]) Die übrigen Arbeiten des PAPPUS, die HULTSCH aufzählt, sind namentlich Kommentare zu den *Elementen* und zu den *Daten* des EUKLID und zu dem *Almagest* des PTOLEMÄUS. Diesen letzteren widmet HULTSCH eine besonders ausführliche Besprechung; ist er doch auch später noch wiederholt auf diese wichtigen Arbeiten zurück-

1) Siehe den Artikel DIODOROS, Nr. 53, von HULTSCH bei PAULY-WISSOWA.

2) Vgl. S. 359.

gekommen. Er zeigt, daß die Angabe des Suidas, Pappus habe nur zu den vier ersten Büchern des *Almagest* Kommentare geschrieben, unrichtig ist, denn es sind noch jetzt Bruchstücke seiner Kommentare zum fünften und sechsten Buche vorhanden. Wahrscheinlich aber hat Pappus zu allen 13 Büchern des *Almagest* Kommentare verfaßt, und dann könnte die Angabe des Suidas auf der irrtümlichen Lesart Δ (= 4) für $I\Gamma$ (= 13) beruhen. Pappus hat jedem dieser Kommentare den Titel *σχόλιον* gegeben, den *Almagest* selbst hat er *τὰ μαθηματικά* genannt. Die Kommentare, die Theon von Alexandria zu demselben Werke geschrieben hat, führten, jeder einzeln, den Titel *ὑπόμνημα*. Sie benutzen die Scholien des Pappus und ergänzen sie zum Teil, woraus hervorgeht, daß Theon *nach* Pappus gelebt haben muß. Hultsch war nun in der glücklichen Lage, den erwähnten Bruchstücken der *Scholien* des Pappus noch weitere Beiträge hinzuzufügen. Denn dieselbe vatikanische Handschrift (Vaticanus Graecus 184), der er die Abhandlung eines Anonymus über die isoperimetrischen Figuren[1]) entnommen hatte, lieferte ihm zugleich auch die interessanten *Prolegomena des Pappus zur Syntax des Ptolemäus*, mit denen Hultsch nun die inhaltreiche Vorrede zum dritten Bande abschloß.

Doch kehren wir jetzt zu der *Collectio* selbst zurück. Wie schon erwähnt, bestand das Werk ursprünglich aus acht Büchern. Davon ist das erste ganz und von dem zweiten etwa die Hälfte verloren gegangen. Der Umstand, daß die vatikanische Handschrift, die der Pappus-Ausgabe zugrunde liegt, unvermittelt mit dem unvollständigen Satze *γὰρ αὐτοὺς ἐλάσσονας μὲν εἶναι* beginnt, zeigt, daß auch schon in dem Archetypus, der dem Vaticanus als Vorlage gedient hat, der Anfang des Werkes verloren war.

Es kann natürlich nicht meine Absicht sein, eine ausführliche Besprechung[2]) des überreichen Inhaltes der *Collectio* zu geben, aber eine kurze Übersicht dürfen wir uns doch nicht versagen, wenn wir einen richtigen Einblick in die oft scheinbar weit auseinander liegenden Arbeitsgebiete von Hultsch gewinnen wollen. Ja, man darf sogar sagen, daß ohne die Kenntnis des Inhaltes der *Collectio* das Lebenswerk von Hultsch in seinem Zusammenhange gar nicht verstanden werden kann.

---

1) Siehe S. 365.

2) Eine solche gibt Hultsch selbst in der schon erwähnten Selbstanzeige in Boncompagnis Bullettino. Sodann aber ist namentlich auf die sehr eingehenden Besprechungen zu verweisen, die Cantor den drei Bänden der Pappus-Ausgabe gleich nach ihrem Erscheinen hat zuteil werden lassen. Sie finden sich in der Zeitschr. für Math. u. Phys. (historisch-liter. Abt.) **21**, 1876, 70—80; **22**, 1877, 173—179; **24**, 1879, 126—132, und sie liegen natürlich auch der Darstellung in Cantors *Vorlesungen* zugrunde.

Da, wie schon gesagt, der Anfang der *Collectio* verloren ist, so läßt sich auch nicht mehr mit Sicherheit feststellen, was für ein Plan dem ganzen Werke zugrunde gelegen hat. Was vom zweiten Buche übriggeblieben ist (S. 1—29 der Ausg. v. HULTSCH), betrifft die Myriadenrechnung und die Multiplikationsmethode des APOLLONIUS (s. hierzu auch den Artikel APOLLONIOS von HULTSCH bei PAULY-WISSOWA). Das dritte Buch (S. 30 bis 177) besteht aus vier Teilen, die deutlich voneinander geschieden sind. Der erste (c. 2—27) handelt von der Aufgabe, zu zwei gegebenen Längen zwei mittlere geometrische Proportionalen zu finden, und überliefert uns Methoden von ERATOSTHENES, NIKOMEDES, HERON und eine, die von PAPPUS selbst herrührt (c. 27). Die Aufgabe verdankt bekanntlich ihre Berühmtheit dem Probleme von der Würfelverdoppelung. Der zweite Teil (c. 28—57) beschäftigt sich mit den verschiedenen *Mitteln* zwischen zwei Strecken, dem arithmetischen, dem geometrischen und dem harmonischen, dargestellt in einer einzigen Figur. Daran schließen sich noch andere Medietäten an, im ganzen zehn, die schließlich in Zahlenbeispielen tabellarisch zusammengestellt werden. Im dritten Teile (c. 58—74) werden die sogenannten Paradoxa des ERYCINUS behandelt und mannigfach erweitert. Zieht man nämlich von einem Punkte im Inneren eines Dreiecks Verbindungslinien nach den Endpunkten der Basis, so ist (EUKLID I 21) ihre Summe kleiner als die Summe der beiden sie umschließenden Dreiecksseiten. Wählt man aber statt der Endpunkte der Basis Zwischenpunkte, so kann die Summe dieser Verbindungslinien ebenso groß oder auch größer werden als die Summe der beiden Dreiecksseiten. Der vierte Teil endlich (c. 75—104) ist der Aufgabe gewidmet, einer Kugel die fünf regulären Polyeder einzuschreiben. Dieser Aufgabe schickt PAPPUS einige Lemmata voraus, die sich auf die *Sphärik* des THEODOSIUS stützen. Mit dieser *Sphärik* hat sich HULTSCH, wie wir sehen werden, später noch wiederholt in eingehender Weise beschäftigt.

Auch das vierte Buch (S. 176—303), dessen Anfang verstümmelt ist (es fehlen Titel und Vorrede), umfaßt mehrere ganz getrennte Untersuchungen, die äußerlich allerdings nicht so deutlich geschieden sind, wie im dritten Buche. An der Spitze (c. 1) steht eine Theorie der Kreistransversalen, und dann kommt nach einigen Lemmata als Hauptaufgabe die, um drei sich berührende Kreise einen Kreis zu beschreiben (c. 15). Nach einer ganzen Reihe von weiteren Berührungsaufgaben über Kreise und Halbkreise, unter denen namentlich das auf ARCHIMEDES zurückgehende Problem vom Arbelos (c. 26) hervorzuheben ist, wendet sich PAPPUS sodann zur Spirale des ARCHIMEDES (c. 30—38) und zur Konchoide des NIKOMEDES (c. 39—44), die von diesem zur Würfelverdoppelung eingeführt worden war. Hier (c. 40) spricht auch PAPPUS von dem Kommentar, den er zu

dem *Analemma* des Diodorus geschrieben habe. Hultsch hatte anfänglich den Titel *ἀνάλημμα* für verdächtig gehalten und geglaubt, er sei aus *α'* oder *κα' λῆμμα* korrumpiert. Er hat dann aber, wie wir gesehen haben[1]), in der Vorrede zum dritten Bande diese irrtümliche Konjektur zurückgenommen. Und nun folgt (c. 45—50) die sachlich und historisch so überaus wichtige Abhandlung über die Quadratrix, die „von Dinostratus, Nikomedes und einigen Jüngeren zur Quadratur des Kreises verwendet worden ist". Den eigentlichen Erfinder, Hippias von Elis, nennt Pappus auffallenderweise nicht, und auch Hultsch, der in seinen reichhaltigen und trefflichen Anmerkungen sonst so sehr auf Vollständigkeit hält, hat den Namen Hippias nicht hinzugefügt. Den Schluß (c. 51—80) des vierten Buches bilden weitere Untersuchungen, die meist mit der Quadratrix zusammenhängen: Beziehungen der Quadratrix zur Spirale, Spirale auf der Kugelfläche, Dreiteilung des Winkels, Konstruktion regulärer Polygone von beliebiger Seitenzahl, Konstruktion eines Kreisbogens zu einer gegebenen Sehne, die zu jenem ein gegebenes Verhältnis hat, Konstruktion inkommensurabler Winkel.

Mit dem fünften Buche (S. 303—471) schließt der erste Band der Pappus-Ausgabe ab. Von diesem fünften Buche (und ebenso von den drei letzten) ist auch noch der Titel erhalten, und in diesem findet sich das Wort *συναγωγή* als Titel des ganzen Werkes. Das fünfte Buch zerfällt in drei Teile. Im ersten (c. 1—32) gibt Pappus im wesentlichen die ungemein interessante Abhandlung des Zenodorus über die isoperimetrischen Figuren wieder, und zwar allenthalben verbessert. Wir werden auf diese wichtige Abhandlung, in der u. a. bewiesen wird, daß unter allen isoperimetrischen Figuren der Kreis den größten Flächeninhalt habe, noch wiederholt zurückkommen, da sich gerade an sie verschiedene Untersuchungen und Entdeckungen von Hultsch anschließen. Von diesen wird aber eine vielleicht passend gleich hier besprochen werden, wenn auch dadurch die Übersicht über den Inhalt der *Collectio* eine kurze Unterbrechung erleidet.

Nach der stimmungsvollen Einleitung zum fünften Buche, auf die Hultsch noch in einer besonderen, weiter unten zu besprechenden Abhandlung zurückgekommen ist, folgt bei Pappus der Beweis des Satzes,

1) S. 356. Die dort (in der Vorrede zum dritten Bande) gegebene, sachlich ganz richtige Übersetzung durch „orthographische Projektion" hatte Hultsch von Richard Baltzer übernommen. Wir haben übrigens im Deutschen dafür einen durchaus passenden terminus technicus, der den Vorteil hat, eine ganz wörtliche Übersetzung von *ἀνάλημμα* zu sein, nämlich „Aufnahme". So ist auch *ἀνάλημμα* in dem gleichnamigen Artikel von G. Kaufmann bei Pauly-Wissowa übersetzt. Und auch schon bei Polybius (VIII, 37, 2) wird *ἀναλαμβάνειν τι* in der Bedeutung von: die Höhe eines Gegenstandes „aufnehmen" gebraucht. Siehe hierzu noch den Artikel Diodoros, Nr. 53, von Hultsch bei Pauly-Wissowa.

daß von zwei isoperimetrischen regulären Polygonen stets das mehreckige (τὸ πολυγωνότερον) den größeren Inhalt habe, und bei diesem Beweise wird mit den Worten (Pappus I, S. 310, 5) „τοῦτο γὰρ ἐν τοῖς εἰς τὰ σφαιρικὰ λήμμασιν δέδεικται“ auf eine Sammlung von Hilfssätzen hingewiesen, die gänzlich verloren zu sein schien. Nun konnte zwar Hultsch im dritten Bande seiner Pappus-Ausgabe (Appendix, S. 1234) gleich drei Stellen nachweisen[1]), an denen das bezeichnete Lemma bewiesen wird (es lautet: beschreibt man über einer gemeinschaftlichen Kathete zwei rechtwinklige Dreiecke, so ist das Verhältnis der größeren Kathete zur kleineren größer als das Verhältnis des größeren gegenüberliegenden Winkels zum kleineren), und diese Stellen weisen auch deutlich auf eine gemeinsame Quelle hin, nämlich auf Theon von Alexandria, der, wie es danach scheint, nicht nur zum *Almagest*[2]), sondern auch zu dem später (beim sechsten Buche von Pappus) zu besprechenden μικρὸς ἀστρονομούμενος einen Kommentar geschrieben hat, aber da der Hinweis auf jene λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά in der viel älteren Abhandlung des Zenodorus vorkommt, so war für Hultsch die Aufgabe gestellt, nach den noch älteren Quellen zu suchen, aus denen Zenodorus geschöpft hatte. Dieser Untersuchung ist die in Fleckeisens Jahrbüchern (1883) veröffentlichte Abhandlung *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά, Reste einer verloren geglaubten Handschrift*, gewidmet. Hultsch hatte nämlich das eine Lemma, und zwar gerade das, worauf sich Pappus hier bezieht, in einer Münchener Handschrift (Codex Monacensis gr. CCCI) aufgefunden, und merkwürdigerweise unter dem Namen des Autolykus, der bekanntlich noch vor Euklid gelebt hat. Nach diesem Codex Monacensis teilt nun Hultsch in der genannten Abhandlung den Text der mit der Überschrift Αὐτολύκου, περὶ κινουμένης σφαίρας versehenen Untersuchung mit und fügt einige vergleichende Betrachtungen hinzu. In dem jetzt vorliegenden Beweise schließt sich das Lemma, auch in den geometrischen Buchstaben, eng an den 11. Satz des dritten Buches der *Sphärik* des Theodosius an, die dem 1. Jahrhundert v. Chr. angehört. Und zwischen Autolykus und Theodosius finden wir das Lemma bei Archimedes im ψαμμίτης (Arch. ed. Heiberg II, 260). So hatte denn Hultsch die Quelle gefunden, aus der auch Zenodorus geschöpft hatte, und auf die jene drei im Appendix namhaft gemachten Stellen zurückzuführen sind.

Doch kehren wir jetzt zum fünften Buche des Pappus zurück. Der zweite Teil (c. 33—71) handelt von den sogenannten Archimedischen Körpern. Es wird gezeigt, daß bei gleicher Oberfläche Kegel und Zylinder kleineres Volumen haben als die Kugel. Im dritten Teile (c. 72—105) endlich

1) Vgl. S. 365 2) Siehe hierzu S. 357.

wird bewiesen, daß von den fünf regulären Polyedern, den sogenannten PLATONischen Körpern, bei gleicher Oberfläche immer das den größeren Inhalt habe, das die größere Zahl von Ecken besitzt.

Das sechste Buch (S. 474—633), das den zweiten Band eröffnet, ist der Astronomie gewidmet. Schon die Überschrift besagt, daß es die in dem *μικρὸς ἀστρονομούμενος* (zu ergänzen ist *τόπος*) befindlichen Schwierigkeiten beseitigen wolle. Dieser *τόπος* war eine Sammlung von Schriften, die *nach* den *Elementen* des EUKLID, aber *vor* dem *Almagest* (dem *μέγας ἀστρονόμος*) gelesen werden sollten, und die bei den Arabern den Titel „mittlere Bücher" führten.[1]) Von diesen Schriften kommentiert nun PAPPUS die folgenden: die *Sphärik* des THEODOSIUS (c. 2—32), die Abhandlung des AUTOLYKUS *über die sich bewegende Kugel* (c. 33—47), die Abhandlung des THEODOSIUS *über Tag und Nacht* (c. 48—68), die Abhandlung des ARISTARCH *über Größe und Entfernung von Sonne und Mond* (c. 69—79), die *Optik* des EUKLID (c. 80—103), die *Phaenomena* des EUKLID (c. 104—130). Wir werden auf mehrere dieser Schriften noch zurückkommen, da sie Gegenstand besonderer Veröffentlichungen von HULTSCH geworden sind, und ich bemerke hier nur noch, daß wohl niemand berufener hätte sein können, gerade dieses sechste Buch des PAPPUS herauszugeben, als HULTSCH, da es ihm gelungen war, während eines dreimonatigen Aufenthaltes in Italien im Jahre 1876, weitere, bisher unbekannt gebliebene Handschriften zu THEODOSIUS und AUTOLYKUS zu entdecken und für seine PAPPUS-Ausgabe zu verwerten. HULTSCH berichtet darüber ausführlicher in der Vorrede zum zweiten Bande; wir werden das Erforderliche an geeigneter Stelle noch nachtragen.

Wie das sechste Buch dem *μικρὸς ἀστρονομούμενος* gewidmet ist, so bezieht sich das umfangreiche siebente Buch (S. 634—1020) auf ein anderes berühmtes Sammelwerk, den *τόπος*[2]) *ἀναλυόμενος*. Dieser *τόπος* umfaßt Schriften des EUKLID[3]), APOLLONIUS und ARISTÄUS des Älteren, und zwar nach der Aufzählung des PAPPUS die *Daten* des EUKLID, den *Ver-*

---

1) Siehe die Abh. von STEINSCHNEIDER in der Zeitschr für Math. u. Phys. **10**, 1865, 456.

2) HULTSCH übersetzt hier *τόπος* ganz korrekt mit *locus* (was seiner Übersetzung von *τόπος ἀστρονομούμενος* mit astronomiae disciplina durchaus entspricht). Daß er dabei *locus* in dem wissenschaftlichen Sinne nimmt, den auch GOW (*A short history of greek mathematics*, 211, Anm.) fordert, sagt er deutlich im Index graecitatis, wo es unter *τόπος* heißt: „locus, i. e. quidquid aliqua mathematicorum parte comprehenditur". Den locus resolutus freilich hat GOW mit gutem Recht beanstandet, aber den hat auch HULTSCH in dem Index durch locus de resolutione, id est doctrina analytica, ersetzt. Im Deutschen gebrauchen wir übrigens am besten die Übersetzung „Gebiet".

3) In bezug auf diese Schriften sind besonders die *Literargeschichtlichen Studien über EUKLID* von J. L. HEIBERG, Leipzig 1882, nachzusehen.

hältnisschnitt, den *Raumschnitt*, den *bestimmten Schnitt* und die *Berührungen* des APOLLONIUS, die *Porismen* des EUKLID, die *Neigungen*, die *ebenen Örter* und die *Kegelschnitte* des APOLLONIUS, die *körperlichen Örter* des ARISTÄUS, die *Örter auf der Oberfläche* des EUKLID und endlich die *Mittelgrößen* des ERATOSTHENES, im ganzen 33 Bücher. An diese Aufzählung, der erst noch eine Erklärung der Begriffe Analyse und Synthese vorausgeschickt ist, schließen sich zunächst kurze Inhaltsangaben an, und dann fügt PAPPUS zahlreiche und ungemein wertvolle Lemmata zu den genannten Schriften hinzu.

Das achte und letzte Buch (S. 1022—1135) eröffnet den dritten Band der PAPPUS-Ausgabe. Es enthält, wie die Überschrift sagt, allerlei anmutige (ἀνθηρά) mechanische Probleme. Als solche werden Schwerpunktsaufgaben und die Theorie der schiefen Ebene behandelt, sodann die Aufgabe, gegebene Lasten durch gegebene Gewichte mit Hilfe von Zahnrädern zu bewegen. Ferner führt die Aufgabe, einen zu bewegenden Körper unter Beibehaltung seiner Gestalt in einem gegebenen Verhältnis zu vergrößern, wieder zur Einschiebung zweier geometrischer Mittel und damit wieder zum Problem der Würfelverdoppelung. Weiter behandelt PAPPUS die Aufgabe, den Durchmesser eines Kreiszylinders zu finden, dessen beide Grundflächen derart verstümmelt sind, daß keine direkte Messung vorgenommen werden kann. Daran schließen sich nun wieder allerlei anmutige geometrische Aufgaben, wie z. B. einem Kreise sieben reguläre Sechsecke mit einem in der Mitte einzuschreiben, eine Aufgabe, die mit der Theorie der Zahnräder in Zusammenhang steht. Den Schluß des achten Buches bilden Exzerpte aus der *Mechanik* HERONS. Nun stützt sich zwar das achte Buch im großen und ganzen überhaupt auf die mechanischen Schriften HERONS, dessen βαρουλκός z. B. zweimal ausdrücklich zitiert wird, trotzdem aber glaubt HULTSCH, daß diese Exzerpte nicht auf PAPPUS selbst zurückzuführen seien, sondern daß sie wahrscheinlich von demselben Schreiber hinzugefügt worden sind, der auch am Anfang des Buches die ursprüngliche Darstellung vielfach verändert und durch Ergänzungen erweitert hat.

Diese Verhältnisse hatte HULTSCH schon vor dem Erscheinen des dritten Bandes zum Gegenstand einer besonderen Untersuchung gemacht, nämlich in der Abhandlung *De HERONIS mechanicorum reliquiis in PAPPI collectione servatis*, die sich in den *Commentationes philologae in honorem THEODORI MOMMSENI* (Berlin 1877) befindet, einem Sammelbande, der MOMMSEN zu seinem 60. Geburtstage von 78 Freunden gewidmet worden war. In dieser Abhandlung beschäftigt sich HULTSCH zunächst eingehend mit der Sprache, dem Stil des PAPPUS. Er weist dort z. B. speziell auf die Einleitung zum fünften Buche hin, in der PAPPUS in sinniger Weise,

als Vorbereitung auf die Isoperimetrie, den Bau der Wachszellen bespricht, die die Bienen mit geradezu geometrischem Instinkte bereiten. Bei der Schilderung der wunderbaren Tätigkeit dieser kleinen Wesen erhebt sich, sagt Hultsch, die Sprache des Pappus zu einer solchen Schönheit, daß man an das Beste gemahnt wird, was in griechischer Sprache geschrieben worden ist. Aus Vergleichen dieser Art glaubte daher Hultsch mit Sicherheit feststellen zu dürfen, daß die Vorrede zum achten Buche nicht in der von Pappus herrührenden Form auf uns gekommen sei. Und ähnlich verhalte es sich auch mit dem Schluß und mit den Exzerpten aus Heron. Hultsch verfolgt nun die Spuren Herons durch das ganze achte Buch hindurch und stellt alles zusammen, was sich darin an Hinweisen auf die im Originale verloren gegangene *Mechanik* Herons vorfindet, um auf diese Weise, soweit möglich, wenigstens eine ungefähre Übersicht über den Inhalt der drei Bücher dieses merkwürdigen Werkes zu gewinnen. Bekanntlich ist es im Jahre 1893 Carra de Vaux gelungen, in einer Leidener Handschrift eine arabische Übersetzung der *Mechanik* zu entdecken, und nun bildet diese, mit der *Katoptrik* zusammen, den zweiten, von L. Nix und W. Schmidt besorgten Band der neuen Heron-Ausgabe. Ihr Inhalt zeigt, daß Hultsch bei seinem Rekonstruktionsversuche im wesentlichen das Richtige getroffen hatte, soweit das billigerweise erwartet werden durfte Umgekehrt aber bildete der Text der im achten Buche des Pappus enthaltenen Heron-Fragmente einen nicht zu unterschätzenden Beleg für die Echtheit der wiedergefundenen *Mechanik*. Nix sagt darüber in der Vorrede zu Heron II (S. XXII): „Daß das uns vorliegende, von Kosta ben Luka [ums Jahr 865] aus dem Griechischen ins Arabische übersetzte und unter Herons Namen überlieferte Buch echt sei, erhellt aus den unten angeführten und im Anhang im griechischen Text von dem Herausgeber des ersten Bandes [W. Schmidt] beigegebenen Fragmenten, die sich an verschiedenen Stellen bei Pappus finden und daselbst ausdrücklich als aus Heron herübergenommen bezeichnet werden. Alle Stellen Herons, auf die Pappus anspielt, oder die er wörtlich anführt, finden sich in unserem arabischen Texte.“ Es folgt sodann (S. XXVI–XXVIII) eine Übersicht über die Exzerpte des Pappus aus der Mechanik des Heron und eine Vergleichung mit den entsprechenden Stellen der neuen Ausgabe.

Es ist hier nicht wohl möglich, noch ausführlicher auf die hohe Bedeutung des klassischen Werkes des Pappus einzutreten. Daß die *Collectio* ein Quellenwerk allerersten Ranges ist, daß sie uns die wertvollsten Aufschlüsse gibt über eine ganze Reihe von hervorragenden Arbeiten, die leider verloren gegangen sind, zeigt schon zur Genüge die flüchtige Inhaltsangabe, die wir nicht einmal des Werkes selbst wegen, sondern nur

zum besseren Verständnis der wissenschaftlichen Arbeit des Herausgebers der *Collectio* vorgenommen haben. Und wenn auch nichts weiteres vorläge als nur der griechische Text, so wie ihn jetzt HULTSCH zum ersten Male gedruckt hat erscheinen lassen, so hätte die Wissenschaft schon alle Ursache, dem gelehrten Herausgeber dankbare Anerkennung zu zollen. Wir haben freilich gesehen, mit wieviel Verständnis, mit wieviel Umsicht, Gewissenhaftigkeit und Sorgfalt der Text hergestellt worden ist, und wie HULTSCH keine Mühe gescheut hat, alles handschriftliche und gedruckte Material, das nur irgendwie herangezogen werden konnte, für seine Ausgabe zu verwerten.

Aber HULTSCH hat sich nicht damit begnügt, nur einen möglichst zuverlässigen und brauchbaren Text zu liefern. Wir haben schon bei der Entstehungsgeschichte der Ausgabe wiederholt von dem kritischen Apparat zu sprechen gehabt, der den griechischen Text Seite für Seite und oft in ganz beträchtlicher Ausdehnung begleitet. Wieviel Selbständigkeit aber HULTSCH den vorhandenen Vorlagen gegenüber bekundet hat, und wie oft er in die Lage kam, auch von sich aus den Text festzustellen, das zeigen die zahllosen, fast auf jeder Seite auftretenden Noten HU, durch die er seine eigenen Verbesserungen oder Konjekturen gekennzeichnet hat.

Sodann hat HULTSCH dem Texte eine lateinische Übersetzung gegenübergestellt. Daß er damit vorbildlich gewirkt hat, hat HEIBERG in der Vorrede zu seiner ARCHIMEDES-Ausgabe ausdrücklich ausgesprochen. Ich glaube zwar, daß den Mathematikern wenigstens die PAPPUS-Ausgabe zugänglicher geworden wäre, wenn sich HULTSCH (wie z. B. später MANITIUS und WILHELM SCHMIDT bei den Ausgaben des GEMINUS und des HERON) bei der Übersetzung der deutschen Sprache bedient hätte, indessen — wir haben doch allen Grund, für das Gebotene dankbar zu sein, um so mehr, als sich HULTSCH nicht mit einer einfachen wörtlichen Übersetzung begnügt hat. Denn er hat allenthalben, wo immer nur der Text zu knapp oder gar lückenhaft war, oder wo die Ausdrucksweise nicht deutlich genug erschien, erklärende Zusätze, und zwar einzelne Wörter oder auch ganze Sätze, mit in die Übersetzung aufgenommen, oder er hat durch Verweisungen auf andere Stellen das Verständnis zu erleichtern gesucht. Selbstredend sind alle derartigen Zutaten durch besondere Schrift kenntlich gemacht. Bei Formeln hat er sich, soweit es anging, der modernen Formelsprache bedient. Sodann aber hat er auch noch, und zwar fast auf jeder Seite, kleinere oder größere Fußnoten hinzugefügt, sei es zur Erklärung des Textes oder der Übersetzung, sei es, um auf andere Schriften antiker oder auch moderner Autoren hinzuweisen. Diese Anmerkungen bilden eine wahre Fundgrube für die mathematisch-historische Forschung. Aber damit noch nicht zufrieden, hat HULTSCH noch eine

ganze Reihe von Anmerkungen sachlicher und historischer Natur, die zu umfangreich waren, um unter den Text gesetzt zu werden, zu einem besonderen Appendix zusammengefaßt und den Supplementen hinzugefügt. Dieser Appendix umfaßt nicht weniger als 65 Seiten. Die darin enthaltenen Anmerkungen, falls man die wissenschaftlichen Nachträge mit diesem bescheidenen Namen bezeichnen will, erstrecken sich über alle die vorhandenen Bücher der *Collectio*. Ganz besonders darf dabei aufmerksam gemacht werden auf die Beiträge, die Hultsch den Anregungen und Mitteilungen von A. Amthor, R. Baltzer, M. Cantor, A. Eberhard und R. Heger zu verdanken hatte. Hervorzuheben ist ferner die Untersuchung S. 1236—1240, die Hultsch der Vergleichung von Pappus und Zenodorus widmet. Und S. 1234—1235 finden wir auch jene drei Stellen bezeichnet, auf die Hultsch in der früher besprochenen Abhandlung *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* hingewiesen hatte (s. S. 360). Von diesen drei Stellen ist die erste dem Kommentare Theons zum *Almagest* entnommen, die zweite der in den Supplementen zur Pappus-Ausgabe befindlichen Abhandlung des Anonymus über die isoperimetrischen Figuren und die dritte den Scholien, die in den Supplementen auf diese Abhandlung folgen.

Die Supplemente, die Hultsch noch in seine Pappus-Ausgabe aufgenommen hat, und die, zusammen mit dem achten Buche der *Collectio*, den ersten Teil des dritten Bandes füllen, werden eröffnet von der schon früher (S. 357) und soeben wieder erwähnten Abhandlung eines Anonymus über die isoperimetrischen Figuren (Pappus III, S. 1138—1165). Auch dieser Abhandlung hat Hultsch eine lateinische Übersetzung gegenübergestellt und zugleich zahlreiche Anmerkungen hinzugefügt, aus denen die Abhängigkeit der Abhandlung von Zenodorus hervorgeht.

An diese Arbeit schließt sich (S. 1166—1188) eine Zusammenstellung von Scholien an, die am Rande des Vaticanus Graecus 218 angemerkt sind. Daß Hultsch es nicht verschmäht hat, sie in seine Ausgabe aufzunehmen, ist ein beredtes Zeugnis für die große Pietät, die er allen auf Pappus bezüglichen Überlieferungen entgegengebracht hat. Die Scholien sind übrigens auch nicht ohne Interesse. Von ungleich größerer Wichtigkeit freilich ist die nun folgende Abhandlung (S. 1189—1211) des Zenodorus über die isometrischen[1]) Figuren, die Hultsch dem Kommentare

1) Hultsch macht ausdrücklich darauf aufmerksam, daß in dem Kommentare Theons, sowohl in der Baseler Ausgabe von 1538 als in der von Halma, der Titel *περὶ ἰσομέτρων σχημάτων* lautet und nicht *ἰσοπεριμέτρων*, wie Nokk in der Programmabhandlung *Zenodorus Abhandlung über die isoperimetrischen Figuren, nach den Auszügen, welche uns die Alexandriner Theon und Pappus aus denselben überliefert haben*, (Freiburg, 1860) konjiziert hatte. Zenodorus hatte eben nicht nur über die *ebenen* isoperimetrischen Figuren geschrieben, sondern auch bewiesen, daß von allen Körpern mit gleicher Oberfläche die Kugel den größten Inhalt habe.

Theons zum ersten Buche des *Almagest* (ed. Halma, 33—49) entnommen hat, und die er nun in lateinischer Übersetzung mitteilt. Daß es sich dabei wirklich um eine Abhandlung des Zenodorus handelt, das sagt Theon gleich zu Anfang (p. 33) ausdrücklich selbst. Die genaue Vergleichung, die nun Hultsch Seite für Seite zwischen dieser Abhandlung und der im fünften Buche der *Collectio* befindlichen anstellt, läßt eine vollständige, vielfach sogar wörtliche[1]) Übereinstimmung erkennen und beweist daher, daß auch diese Abhandlung ganz auf Zenodorus beruht, obwohl Pappus den Namen nirgends nennt. Auf dieselbe Weise konnte Hultsch feststellen, daß sich auch die von ihm mitgeteilte Abhandlung jenes Anonymus auf Zenodorus stützt. So besitzen wir also von den ausgezeichneten Untersuchungen dieses Mathematikers nunmehr drei gesicherte, gut miteinander übereinstimmende Überlieferungen.

Im Anschluß an Nokk[2]) und Cantor[3]) bespricht Hultsch in der Einleitung zu der Abhandlung des Zenodorus auch die Frage, in welche Zeit dieser Mathematiker, von dem sonst so wenig bekannt ist, zu versetzen sei, und er kommt zu dem Resultate, daß Zenodorus selbstverständlich nach Archimedes, den er ja zitiert, gelebt habe, aber wahrscheinlich nicht viel später, also etwa um die Wende des 3. Jahrhunderts v. Chr.

Als viertes Supplement folgt (S. 1212—1276) der Appendix, von dem wir schon (S. 365) gesprochen haben. Daran schließt sich, als fünftes Supplement (S. 1277—1286), eine Zusammenstellung verschiedener aus dem vatikanischen Codex notierter Schreibarten. Da dieser Codex die einzige Quelle auch für die altertümliche Schreibweise ist, so hat es Hultsch nicht für überflüssig erachtet, auffallende Abweichungen, nament-

1) Daß die Darstellungen bei Theon und Pappus dem *Inhalte* nach übereinstimmen, war natürlich auch schon vor Hultsch bekannt. Darauf hatte z. B. auch Nokk seine deutsche Bearbeitung gegründet. Aber Nokk besaß für Pappus nur die lateinische Übersetzung des Commandino, den griechischen Text kannte er nicht.

2) Siehe S. 365, Anm. 1.

3) In der zweiten der S. 357, Anm. 2 genannten Besprechungen der Pappus-Ausgabe versetzt Cantor den Zenodorus in die Zeit zwischen Archimedes und Quintilian, der etwa in den Jahren 35—95 n. Chr. gelebt hat. Dabei macht Cantor auf die interessante Stelle bei Polybius (IX, 21, S. 686 der Ausg. v. Hultsch) aufmerksam, wo u. a. gesagt wird, es erscheine vielen unglaublich, daß ein Lager im Umfange von 40 Stadien doppelt so groß sein könne als ein solches von 100 Stadien. Ich verweise auch noch auf die Abhandlung *Zur Geschichte der Isoperimetrie im Altertume* (Biblioth. Mathem 2_3, 1901, 5—8) von W. Schmidt, der sich darin den Ausführungen von W. Crönert anschließt, wonach Zenodorus in der ersten Hälfte des 2. Jahrhunderts v. Chr. gelebt haben müsse. Dadurch würden also die Schlußfolgerungen, die Hultsch aus der Darstellungsweise des Zenodorus glaubte ziehen zu sollen, durchaus bestätigt.

lich Unregelmäßigkeiten im Akzent (es wird z. B. beständig *διχά* statt *δίχα* geschrieben), im Spiritus u. dgl. besonders herauszuschreiben und der Reihe nach mitzuteilen. Als letztes Supplement folgen schließlich noch Corrigenda (S. 1287—1288).

Den zweiten Teil des dritten Bandes füllen die Indices, unter denen der Index graecitatis (S. 1—125), auch dem Umfange nach, der weitaus bedeutendste ist. Wenn Hultsch in der mehrfach erwähnten Selbstanzeige in Boncompagnis Bullettino sagt: „gli indices relativi a Pappo possono per ora tener luogo di un lexicon totius dictionis mathematicae graecae", so ist das nur eine bescheidene Charakterisierung dieser ausgezeichneten Arbeit. Denn in Wahrheit gibt der Index viel mehr. Zunächst ist jedes Wort, das in der *Collectio*, und jedes nur irgendwie erwähnenswerte Wort, das in den Supplementen vorkommt, mit Stellenangabe und der Übersetzung notiert, die der betreffenden Stelle entspricht. Gewöhnlich ist die ganze Wortfolge herausgeschrieben, so daß auch die Konstruktion und die spezielle Wortform zum Ausdruck kommen. Das gilt besonders von den Verben, von denen stets alle vorkommenden Verbalformen, nach Genus, Tempus und Modus geordnet, ausdrücklich aufgeführt sind. Auch die Regeln der Grammatik sind herangezogen, und überall finden sich sprachliche und sachliche Erklärungen, Verweisungen und Orientierungen jeder Art. Einzelne der Artikel (s. z. B. *γίνεσθαι*, *διδόναι*, *εἶναι*, *θέσις*, *λαμβάνειν*) haben auf diese Weise einen nicht unbeträchtlichen Umfang angenommen, andere, wie z. B. *Ἀπολλώνιος*, *Ἀρχιμήδης*, *Εὐκλείδης*, *Πάππος*, enthalten ganze Bibliographien, wieder andere, wie z. B. die von Hultsch mehrfach selbst hervorgehobenen *ἀναλύειν*, *ἀνάλυσις*, *λῆμμα*, *λόγος*, *στοιχεῖον*, *τόπος*, geben sonst bemerkenswerte Aufschlüsse. Wer die Sorgfalt, mit der der Index zusammengestellt ist, im einzelnen verfolgt, der wird es verstehen, wenn Hultsch sagt, er habe auf diese Arbeit ein ganzes Jahr verwendet. Eine derartige Erschließung, eine derartige systematische Verarbeitung der mathematischen Sprache der Griechen war vor Hultsch überhaupt noch nie geleistet worden. Und da bei Pappus fast alle Gebiete der Mathematik, der reinen und der angewandten, berührt werden, und überdies Mathematiker aus den verschiedensten Jahrhunderten zum Wort kommen, so ist dieses Wörterbuch von ganz besonderem Werte.

Daß eine derartige Arbeit zugleich eine gesicherte Grundlage abgibt für die Textkritik überhaupt, das konnte Hultsch gleich selbst in der Notiz *Zur Terminologie der griechischen Mathematiker* (1879) dartun. In seiner Ausgabe der *Astronomie* Theons von Smyrna hatte H. Martin an einer bestimmten Stelle geglaubt, das handschriftliche *ἀπολάβωμεν* in *ὑπολάβωμεν* — „wenn wir annehmen" — verwandeln zu müssen. Hultsch stellte aber die Lesart *ἀπολάβωμεν* — „wenn wir (gleiche Kreisbogen)

abschneiden" — wieder her, da dieser Gebrauch von *ἀπολαμβάνειν* im Index zu Pappus durch viele Beispiele gesichert sei.

An den Index graecitatis schließt sich (S. 126—132) eine Zusammenstellung der verschiedenen Wortabkürzungen und tachygraphischen Zeichen an, die im Vaticanus, besonders in den am Rande befindlichen Scholien, benutzt worden sind. In der soeben erwähnten Notiz *Zur Terminologie der griechischen Mathematiker* hebt Hultsch hervor, daß die neueren paläographischen Werke keinen Anlaß gehabt hätten, diese Abkürzungen und Zeichen der mathematischen Texte zu berücksichtigen. Man wird aber kaum fehlgehen, wenn man annimmt, daß Hultsch diese sehr dankenswerte Zusammenstellung unternommen hat in der Erinnerung an die Mühe, die er wiederholt selbst auf die Entzifferung der oft ganz rätselhaften Abkürzungen hatte verwenden müssen, und über die er z. B. in seiner Abhandlung über den Heronischen Lehrsatz ausführlich berichtet hat. Auf Grund des von ihm gesammelten Materials war er nun auch in der Lage, in jener terminologischen Notiz ein tachygraphisches Zeichen, das Martin in dem Fragmente des Serenus (S. 340 der vorhin genannten Theon-Ausgabe) als *ἐπιφανείας* gelesen hatte, als das für *ὅτι* festgestellte Zeichen anzusprechen, das offenbar vom Rande einer älteren Handschrift hinweg an falsche Stelle mitten in den Text geraten war. Und so konnte Hultsch die Stelle bei Martin berichtigen.

Erwähnen wir jetzt noch ein mathematisches Sachregister (S. 133 bis 142), in dem sich allenthalben auch wieder Verweisungen auf den Index graecitatis finden, und zum Schlusse noch ein Verzeichnis der (älteren und neueren) Autoren (S. 143—144), so haben wir nun endlich den Inhalt der Pappus-Ausgabe erschöpft.

Das Urteil, in das einst Cantor seine Besprechung zusammengefaßt hat, darf auch hier wiederholt werden: Hultsch hat uns mit einer klassischen Ausgabe eines klassischen Schriftstellers beschenkt. Und so glaube ich auch, keinem Vorwurfe zu begegnen, wenn ich mich so lange von diesem Meisterwerke habe festhalten lassen. Ja, es ist selbst jetzt noch nicht möglich, sogleich zu einem anderen Thema überzugehen, da wir durchaus auch noch die Selbstanzeige kennen lernen müssen, die Hultsch im Repertorium von Königsberger und Zeuner (1879) hat erscheinen lassen.[1])

„Die hohe Bedeutung," so beginnt Hultsch, „welche die mathematische Sammlung des Pappus von Alexandria als Quellenwerk auch für die neuere mathematische Forschung hat, ist zu keiner Zeit seit dem Wiedererwachen der Wissenschaften verkannt worden. Nachdem Commandino im Jahre 1588 seine lateinische Übersetzung

1) Die in Boncompagnis Bullettino (1879) ist im wesentlichen eine Inhaltsangabe und darf daher als erledigt betrachtet werden.

nebst ausführlichen Kommentaren veröffentlicht hatte, verbreitete sich eine gewisse, freilich nur lückenhafte Kenntnis von dem Inhalte des Werkes bei den Forschern auf historisch-mathematischem Gebiete. Mehr als hundert Jahre waren seit dem Erscheinen der Commandinoschen Bearbeitung vergangen, als die Erinnerung an Pappus von neuem wachgerufen und das Studium des Originaltextes zum erstenmal versucht wurde von Wallis und Halley."

Und nun folgt eine kurze Übersicht über alle die verschiedenen Bearbeitungen bis herab zu Chasles, die in der Vorrede zum ersten Bande ausführlich besprochen worden sind. Allerdings wurde durch diese Veröffentlichungen

„das Bedürfnis nach einer Gesamtausgabe des Originaltextes eher beiseite geschoben als befördert. Man schien ein stillschweigendes Übereinkommen dahin getroffen zu haben, daß alles, was in dem Sammelwerke des Pappus für die Gegenwart von Wichtigkeit ist, nunmehr behandelt sei und als Gesamtausgabe die Bearbeitung Commandinos genüge. Allein anderseits erhoben sich doch manche Stimmen für die vollständige Veröffentlichung des griechischen Textes, da nur auf diese Weise eine zuverlässige Beurteilung der bisher veröffentlichten Fragmente möglich sei. Denn wie konnte man mit Sicherheit über die Methode urteilen, nach welcher die Lemmen des Pappus zur Wiederherstellung einer verloren gegangenen Schrift zu benutzen seien, wenn man nicht alle übrigen Teile des Sammelwerkes zur Vergleichung herbeizog? Wie konnte man über so viele schwierige, dunkle und mehrdeutige Ausdrücke klar werden, wenn man nicht einen gut beglaubigten Text vor sich hatte und mit Hilfe eines genauen lexikalischen Nachweises für jeden einzelnen Fall alle ähnlichen Stellen zugleich in Betracht zu ziehen imstande war? Die Beantwortung dieser Fragen wird für niemanden zweifelhaft sein, nachdem die vollständige Ausgabe vorliegt".

Hultsch hebt nun zunächst das literarhistorische Interesse hervor, das der Pappus-Ausgabe innewohnt. Einige bisher unbekannte Namen alexandrinischer Mathematiker sind jetzt ans Licht gezogen worden:

„In dem *Index Scriptorum in Pappi mathematica collectione laudatorum,* welchen Fabricius *Bibliotheca Graeca* lib. 5 cap. 22 gibt, fehlen die Namen der gelehrten Freunde des Pappus, Pandrosion und Megethion, welchen zwei Bücher der Sammlung gewidmet sind, ferner die auch anderweitig bekannten alexandrinischen Mathematiker Diodorus und Menelaus. Ein zu Pappus Zeit namhafter alexandrinischer Gelehrter hieß Hierius, nicht Hieronymus (wie bei Commandino und Fabricius). Ferner der Verfasser der Paradoxa, welche im dritten Buche, Propos. 28—42, behandelt werden, Erycinus, nicht Erycemus."

Sodann sind mehrere fast verschollene Werke wieder zu unserer Kenntnis gelangt,

„eine Menge einzelner Fragen werden fortan durch Eindringen in den Originaltext (oft ist es ja nur eine Zeile, oft nur ein Wort, worin die Entscheidung liegt) klarer sich darstellen lassen. Auch das ist gewiß nicht gering anzuschlagen, daß wir aus Pappus Sammlung einen überraschenden Gesamtüberblick über die Blüte der mathematischen Studien in dem Zeitalter des Schriftstellers erhalten; ja dieser Überblick erstreckt sich selbst noch auf die Zeit nach Pappus bis zum Ersterben der antiken Kultur in Ägypten, wenn anders unsere Vermutung richtig ist, daß auch nach Pappus Tode seine Schule noch eine Zeitlang fortblühte, und daß die Sammlung,

wie sie jetzt vorliegt, einige und zwar sachlich wertvolle Zusätze eines oder mehrerer späteren Bearbeiter enthält".

Sodann bietet für die Geschichte der Entwickelung der griechischen Mathematik kaum irgend ein anderes Quellenwerk so reichliches und mannigfaltiges Material als die Sammlung des PAPPUS.

„Wenn von den *Elementen* der alten Mathematik gesprochen wird, so denkt man mit Recht vorerst an EUKLID, der ja schon im Altertume ὁ στοιχειωτής schlechthin genannt zu werden pflegte. Doch erkannte man nicht minder bereits im Altertume, daß EUKLIDS Bücher durchaus nicht sämtliche Elemente der Mathematik umfassen. Es kann in dieser Beziehung vergleichsweise auf die von SIMSON und Späteren erweiterten Ausgaben des EUKLID verwiesen werden, welche in England noch heutigentags dem mathematischen Unterrichte zugrunde gelegt werden. Ganz ähnlich ließe sich ein griechischer erweiterter EUKLID in der Weise herstellen, daß an den geeigneten Stellen diejenigen ergänzenden Elementarsätze eingefügt würden, von denen sich nachweisen läßt, daß sie von alten Mathematikern bereits angewendet worden sind. Und gerade bei PAPPUS findet sich eine große Zahl solcher Sätze ausdrücklich mitgeteilt, während andere von COMMANDINO, SIMSON und dem Herausgeber durch Vervollständigung der bei PAPPUS oft auf das äußerste abgekürzten Beweise restituiert worden sind. Aber selbst ein derartig erweiterter EUKLID würde durchaus nicht alles enthalten, was die fortgeschrittene Mathematik des Altertums unter dem Namen der Elemente zusammenfaßte. Denn als στοιχεῖα im weiteren Sinne wurde eine Reihe grundlegender Werke, wie die *Conica* des ARISTÄUS und vielleicht auch die des APOLLONIUS, die *Phaenomena* EUKLIDS, die Schrift des APOLLONIUS über die ebenen Örter und andere bezeichnet, im Gegensatze zu welchen dann die *Elemente* EUKLIDS τὰ πρῶτα στοιχεῖα genannt wurden (der nähere Nachweis hierüber ist aus den im Index graecitatis unter στοιχεῖον angeführten Stellen zu entnehmen).

Ferner sind für die Entwickelungsgeschichte der griechischen Mathematik von besonderem Interesse solche Partien bei PAPPUS, wo eine Einzelfrage der elementaren Geometrie nach allen Seiten hin erweitert und möglichst abschließend behandelt wird. Offenbar wurde also schon im Altertum ein Anlauf genommen, von der Behandlung des einzelnen Falles, bei welchem allein die älteste Schule stehen geblieben war, überzugehen zur allgemeinen Betrachtung aller möglichen Fälle, und somit der neueren Methode sich zu nähern."

Als Beispiele hierfür hebt HULTSCH die schönen Untersuchungen über die isoperimetrischen Figuren hervor, die sich im fünften Buche befinden, und die Anfänge kombinatorischer Betrachtungen, die im siebenten Buche in der Schrift des APOLLONIUS über die Berührungen deutlich wahrzunehmen sind.

Und nun bietet HULTSCH seinen Lesern eine Überraschung ganz eigener Art. Denn so dürfen wohl die Auszüge genannt werden, die er zum Schlusse aus einer unveröffentlichten Jugendschrift CARL GUSTAV JACOBIS mitteilt:

„Die Abhandlung umfaßt 22 Quartblätter und trägt den Titel: *PAPPI Alexandrini collectiones mathematicas descripsit explicavit C. G. JACOBI, semin. philol. sod., Berolini, Jan. mense a. 1824.* Wir haben es also mit einer Seminararbeit zu tun, welche JACOBI bald nach Erfüllung seines 19. Lebensjahres (er ist am 10. Dez. 1804

geboren) abgefaßt hat. Dem Berichterstatter ist die Schrift schon seit längerer Zeit durch die Güte des Herrn Professor Borchardt in Berlin mit der Ermächtigung überlassen worden, daraus zu veröffentlichen, was noch jetzt von Interesse scheine."

Auf eine in Form einer Dedikation gehaltene Einleitung läßt Jacobi aus der *Bibliotheca Graeca* des Fabricius Notizen über das Zeitalter und die Werke des Pappus folgen, um dann zu einer ausführlicheren Besprechung der Übersetzung Commandinos überzugehen, wobei er zwar die Brauchbarkeit dieser Arbeit anerkennt, aber auch nicht unterläßt, die Wünschbarkeit einer Herausgabe des griechischen Textes zu betonen. Die mit eigenen, oft recht beachtenswerten Bemerkungen und Konjekturen versehene Besprechung Jacobis bezieht sich besonders auf das dritte Buch des Pappus; am Schlusse wendet er sich aber auch noch zum vierten und siebenten. Indessen müssen wir uns hier doch darauf beschränken, auf die Auszüge zu verweisen, die Hultsch mitgeteilt und mit verbindendem Texte und mit Anmerkungen versehen hat. —

War Hultsch schon durch die Metrologie und sodann namentlich durch die Heron-Ausgabe veranlaßt worden, weite Gebiete der antiken Mathematik zu durchstreifen — es darf aber hinzugefügt werden, daß er dazu vielfach auch schon ganz direkt durch Polybius angeregt wurde —, so führte ihn in noch viel höherem Maße die Beschäftigung mit Pappus dazu, die Gesamtheit der mathematischen Wissenschaften des Altertums, und nicht nur der Griechen, sondern auch der Römer und ferner der Ägypter, der Babylonier und der übrigen Völker des Orients zum Gegenstand seiner Forscherarbeit zu machen. In der Tat spiegelt sich ja in der *Collectio* die ganze niedere und höhere Mathematik der Alten wider, die reine wie die angewandte. Auf allen diesen Gebieten treffen wir Arbeiten von Hultsch an, seien es selbständige Publikationen, seien es Besprechungen der Arbeiten anderer. Aber auch in diese Besprechungen, die in den verschiedensten Zeitschriften zerstreut sind, und deren Zahl außerordentlich groß ist, hat Hultsch vielfach wertvolle selbständige Untersuchungen eingeflochten. Und nicht unerwähnt dürfen ferner die Beiträge bleiben, die Hultsch „in den Büchern anderer niedergelegt hat, die ihn als den besten Kenner dieses Wissensfeldes um seine Mitarbeit ersuchten“ (Lipsius).

Alle diese zahlreichen Publikationen einzeln zu besprechen, kann natürlich nicht Aufgabe des Biographen sein, das würde ja auch schon der zur Verfügung stehende Raum nicht zulassen. Wir werden also versuchen, die mathematisch-historischen Arbeiten von Hultsch, soweit sie nicht schon im Zusammenhange mit den Ausgaben von Heron und Pappus besprochen worden sind, in Gruppen zusammenzufassen und über diese allemal eine orientierende Übersicht zu geben. Dabei wird sich

jeweilen ganz von selbst Gelegenheit bieten, bei einzelnen Arbeiten ausführlicher zu verweilen.

Eine erste Gruppe betrifft die reine Mathematik, und zwar zunächst die Arithmetik. Von diesem Gebiete, soweit es sich um Griechen und Römer handelt, hat HULTSCH selbst eine zusammenfassende Darstellung verfaßt, und zwar in dem Artikel *Arithmetica* (sc. *ars*) in PAULY-WISSOWAS Encyklopädie. Dieser Artikel umfaßt nicht weniger als 50 Spalten, und er gehört unstreitig zum Besten, was seit NESSELMANN über die Arithmetik der Alten geschrieben worden ist. Nach einer Übersicht über die vorhandene Literatur und nach einer Besprechung des Unterschiedes zwischen *λογιστική* und *ἀριθμητική* (Rechenkunst einerseits und allgemeine Arithmetik einschließlich Zahlentheorie und unbestimmte Analytik anderseits) wendet sich der Verfasser zunächst zur *Rechenkunst der Griechen.* Er behandelt das Kopfrechnen, das Fingerrechnen, das instrumentale Rechnen mit dem Abacus (das letztere unter Verweisung auf seinen Artikel *Abacus* bei PAULY-WISSOWA), um dann zu einer ausführlichen Darstellung des Rechnens vermittels der Zahlzeichen überzugehen. Wir werden durch übersichtliche, der Literatur, z. B. EUTOKIUS, entlehnte Beispiele darüber orientiert, wie die Griechen mit den als Zahlzeichen dienenden Buchstaben addierten, subtrahierten, multiplizierten und dividierten, und wie sich dabei durch die Praxis ganz von selbst eine Anordnung der Zahlzeichen herausbildete, die dem Stellenwert im dekadischen System entsprach. Es folgt sodann die Besprechung des Sexagesimalsystems und der sexagesimalen Bruchrechnung. Für die Brauchbarkeit des Systems macht HULTSCH „die praktische Bezeichnung der Ganzen sowohl als der Teile“ geltend. „Vor die Einheiten der Peripherie wurde *μοῖραι*, vor die des Diameters und der Sehnen *τμήματα* gesetzt, wobei statt *μοῖραι* auch die Abkürzung $\mathring{\mu}$ eintrat (das später übliche Zeichen des Grades ^{0} scheint hierauf zurückzuführen zu sein).“ Die gewöhnliche Bezeichnung der Brüche lehnte sich eng an die Aussprache derselben an. Bei der Besprechung dieser Bezeichnung hatte HULTSCH wiederholt Veranlassung, auf eigene Arbeiten (*Metrol. script.* I, 174; Jahrb. f. Phil. 1893, 750; *Histor. Unters. f. FÖRSTEMANN*, Leipzig 1894, 44, 54, u. a.) hinzuweisen. Ausführlich wird sodann das Wurzelausziehen behandelt. Die Darstellung stützt sich einerseits auf die bekannten Werke von NESSELMANN, FRIEDLEIN und GÜNTHER, namentlich auch auf GÜNTHERS große Abhandlung *Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethoden* vom Jahre 1882, anderseits aber auf Untersuchungen, die HULTSCH selber angestellt hat. In erster Linie ist hier seine Göttinger Abhandlung *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei ARCHIMEDES* vom Jahre 1893 zu nennen. In dieser Abhandlung bespricht HULTSCH zunächst die Näherungswerte für $\sqrt{2}$, die

auf Pythagoras, Platon und besonders auf Aristarch von Samos zurückgehen. Bei Aristarchs Berechnung spielt auch wieder jenes Lemma eine Rolle, auf das Pappus im fünften Buche der *Collectio* hinweist, und das Hultsch in der früher besprochenen Münchener Handschrift unter dem Namen des Autolykus aufgefunden hatte. Es folgt sodann eine kritische Besprechung der Näherungswerte für $\sqrt{3}$ und andere Wurzeln, die Theodorus von Kyrene dargestellt und als irrational bewiesen hat, und über die uns Platon im *Theaetet* berichtet. Und nun wendet sich Hultsch zu Archimedes und besonders zu der Ungleichheit $\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$, die dieser bekanntlich in seiner *Kreismessung* ohne weitere Begründung als fertiges Resultat mitgeteilt hat. Dem Versuche, dieses Rätsel zu lösen, mit dem sich schon so viele (siehe die genannte Abhandlung von Günther) beschäftigt hatten, ist der größte Teil der Abhandlung von Hultsch gewidmet. Hultsch unternimmt es zunächst, den ganzen Beweis des dritten Satzes der Kreismessung derart zu ergänzen, daß die von Archimedes weggelassenen Zwischenglieder seiner Schlußfolgerungen je an Ort und Stelle (in Kursivschrift) eingefügt werden. Um nun aber zu erklären, auf welchem Wege Archimedes zu den vorkommenden Annäherungen von Quadratwurzeln, insbesondere von $\sqrt{3}$, gelangt ist, schickt Hultsch einige Hilfssätze (λήμματα) voraus, die nach seiner Meinung, „wenn auch nicht der Form, so doch dem Inhalte nach mit Sätzen sich decken, die von Archimedes als erwiesen vorausgesetzt worden sind, ehe er an seine Wurzelausrechnungen heranging“. Von diesen Hilfssätzen — es sind ihrer sechs — lassen sich die drei letzten in die Ungleichheit

$$a \pm \frac{b}{2a} > \sqrt{a^2 \pm b} > a \pm \frac{b}{2a \pm 1}$$

zusammenfassen, und aus dieser leitet nun Hultsch die näherungsweise Berechnung der in der *Kreismessung* auftretenden Quadratwurzeln ab. Am Schlusse seiner Abhandlung, die in ihren zahlreichen Noten eine Fülle wertvollen historischen Materiales darbietet, wendet er sich sodann noch zu der Erörterung, wie Archimedes aus großen ganzen Zahlen die Quadratwurzel ausgezogen und wie er für die in der Rechnung auslaufenden Brüche bequeme Näherungen bestimmt hat. Und endlich untersucht er noch, wie nun Archimedes zuletzt auf die Annäherung $3\frac{1}{7} > \pi > 3\frac{10}{71}$ gekommen ist. Diese Untersuchung hat Hultsch dann 1894 fortgesetzt in der Abhandlung *Zur Kreismessung des Archimedes*. Es galt zu zeigen, wie wohl Archimedes zu jenen einfachen Grenzen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ gekommen war, nachdem ihn seine Ausrechnungen zunächst doch auf die weit komplizierteren Umgrenzungen

$$3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} > \pi > 3 + \frac{284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}}$$

geführt hatten. HULTSCH verfolgt sodann die Geschichte der Kreismessung von APOLLONIUS und PHILON (nach den Berichten des EUTOKIUS) an bis auf LUDOLPH VAN CEULEN und ADRIAAN METIUS, um zu zeigen, wie die Methode des ARCHIMEDES im Laufe der Jahrhunderte zu immer vollkommeneren Annäherungen geführt hat.

Mit der Ermittelung von Näherungswerten von Quadratwurzeln bei den Alten hat sich HULTSCH auch noch in anderen Arbeiten beschäftigt, so z. B. in der Abhandlung *Eine Näherungsrechnung der alten Poliorketiker* (1897), in der er Stellen bei POLYBIUS (z. B. IX 12 und IX 19), die sich auf die Berechnung der Länge von Sturmleitern und auf die Messung der Höhe einer Mauer aus der Ferne beziehen, von diesem Gesichtspunkte der Näherungsrechnung aus bespricht. Die Bemerkungen, die HULTSCH dabei über den streng mathematischen Sprachgebrauch und den des praktischen Lebens hinzufügt, machen die kleine Abhandlung auch für den Philologen interessant. Hier findet sich z. B. auch der Hinweis auf den Gebrauch von **ἀναλαμβάνειν** bei POLYBIUS, von dem S. 359 Anm. 1 die Rede war.

Doch kehren wir jetzt wieder zu dem Sammelartikel *Arithmetica* zurück. Auf die Logistik folgt nun die allgemeine Arithmetik und Zahlentheorie. Die Zahlenreihe ist zuerst von den Pythagoreern nach verschiedenen Richtungen hin untersucht worden. Die Unterscheidung der geraden und ungeraden Zahlen hatte sie schon früh dazu geführt, daß man durch fortgesetzte Summierung der ungeraden Zahlen der Reihe nach die Quadrate aller Zahlen erhalten kann. Dabei ergab sich die wichtige Gleichung $3^2 + 4^2 = 5^2$, die dem PYTHAGORAS vielleicht den Weg zu seinem Lehrsatz gezeigt hat. Eine besondere Stellung nahm in der pythagoreischen Philosophie die Zehnzahl ein. Sie hieß die vollkommene (*τέλειος*), weil sie alle Zahlen zu umfassen schien. Ihre Vollkommenheit hat man namentlich in ihren mannigfachen Beziehungen zu den Zahlen 1 bis 9 nachzuweisen gesucht. „Zunächst faßte man sie auf als die Summe der vier ersten Glieder der Zahlenreihe. Das war die heilige *τετρακτύς* der Pythagoreer, auf welche sie ihren Schwur leisteten, dabei des Stifters ihrer Schule, als des Erfinders dieser Geheimlehre, gedenkend." Auf der Zehnzahl hat auch PLATON die nach ihm benannte merkwürdige Zahl aufgebaut, in die er so viel hineingeheimnißt hat. Dieser Zahl und den mit ihr zusammenhängenden Untersuchungen hat HULTSCH selbst mehrere Arbeiten gewidmet, vor allem die inhaltreiche Abhandlung *Die geometrische Zahl in PLATONS VIII. Buche vom Staate* aus dem Jahre 1882. Zu dieser Arbeit war HULTSCH durch die Schrift von J. DUPUIS *Le nombre géométrique de PLATON*, Paris 1881, veranlaßt worden, nachdem er sich schon früher, 1873, in der Note *Zu PLATONS Timaeos* mit der Frage beschäftigt und sie damals als unlösbar angesehen hatte. HULTSCH verfolgt nun genau, mit

philologischer wie mit mathematischer Sorgfalt, alle die geheimnisvollen Bedingungen, die PLATON seiner Zahl auferlegt hat, und die zu so vielen Meinungsverschiedenheiten, nicht nur in bezug auf die Größe, sondern sogar auch in bezug auf die Bedeutung der Zahl, geführt haben, und er kommt zu dem Schlusse, daß diese Bedingungen am besten durch die Zahl 3600^2 erfüllt werden, während z. B. TANNERY 2700 und DUPUIS 21600 als Gesamtzahl angenommen hatten.[1]) Nach der Auffassung von HULTSCH handelt es sich dabei um 3600^2 Tage, d. h. nach runder Schätzung um 36000 Jahre, die die große, auch von PLATON so genannte Periode bilden. Für den Wert 3600^2 spricht nach HULTSCH auch die an das pythagoreische Dreieck erinnernde Zerlegung der Zahl in $3^4 \cdot 4^4 \cdot 5^4$, sowie ihre Einordnung in das Sexagesimalsystem in der Form 60^4. Sodann sucht HULTSCH, unter Berufung auf VARRO und CENSORINUS *(De die natali)*, aus der von ihm bestimmten PLATONischen Zahl, die ja auch die „hochzeitliche" heißt, da sie die Heiraten regelt, kürzere Zeitperioden herauszufinden, die, mit PLATON zu reden, für „das menschlich Erzeugte" bedeutungsvoll sind. Den Schluß der Abhandlung bilden Betrachtungen über die „vollkommene Zahl", die PLATON an derselben Stelle anführt, und zwar als „dem göttlich Erzeugten" eigentümlich.

Mit der PLATONischen Zahl hat sich HULTSCH auch noch später beschäftigt: zunächst 1886, als R. SCHOELL zum erstenmal Fragmente aus den Kommentaren des PROKLUS zu PLATONS Büchern vom Staate herausgab. Unter dem Titel *De numero PLATONIS a PROCLO enarrato disputatio* fügte damals HULTSCH auf Wunsch des Herausgebers einige Erläuterungen zu der Ausgabe hinzu. Und sodann 1901 im dritten der *Drei Exkurse,* die sich im zweiten Bande der von W. KROLL auf Grund der neu aufgefundenen Vatikanischen Handschrift besorgten Ausgabe von *PROCLI Diadochi in PLATONIS rem publicam commentarii* befinden. PROKLUS behandelt die geometrische Zahl PLATONS unter den Gesichtspunkten: ἀριθμητικῶς, γεωμετρικῶς, μουσικῶς, ἀστρονομικῶς, διαλεκτικῶς. „Im ganzen", sagt HULTSCH bei seiner Besprechung der arithmetischen Erklärung, „hat der bei PROKLOS überlieferte Versuch, die geometrische Zahl PLATONS zu erklären, zu keinem befriedigenden Ergebnisse geführt, aber nachdem so viele andere Versuche von den Neueren angestellt worden sind, werden weitere Untersuchungen jedenfalls die Aufschlüsse berücksichtigen müssen, die PROKLOS über einzelne Punkte der schwierigen Frage gegeben hat." HULTSCH betrachtet also selbst die ganze Frage über den geheimnisvollen ἀριθμὸς γεωμετρικός als noch nicht völlig abgeschlossen.

---

1) In der kürzlich erschienenen Schrift von G. ALBERT, *Die PLATONische Zahl als Präzessionszahl,* Leipzig 1907, wird $3600 \cdot 2592$ als Wert angenommen.

Wir kehren nun wieder zu dem Artikel *Arithmetica* bei PAULY-WISSOWA zurück. „Nicht zu verwechseln mit dem pythagoreischen τέλειος ἀριθμός sind die τέλειοι ἀριθμοί, welche zuerst in EUKLIDS *Elementen* (VII defin. 22, IX propos. 36), dann bei NIKOMACHOS (*Arithm.* I 16, 2), THEO von Smyrna (45 f. HILLER) und anderen erscheinen." Gemeint sind die Zahlen der Form $(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n)\, 2^n = (2^{n+1} - 1)\, 2^n$, vorausgesetzt, daß $2^{n+1} - 1$ eine Primzahl ist. Die so gebildeten Zahlen haben die Eigenschaft, gleich der Summe ihrer Teiler zu sein. Mit diesen Zahlen beschäftigt sich HULTSCH in der Göttinger Abhandlung von 1895, *Erläuterungen zu dem Berichte des JAMBLICHOS über die vollkommenen Zahlen.* NIKOMACHUS hatte in seiner ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή (I, 16, 2—7, S. 39 ff. der Ausg. v. HOCHE) die vier ersten vollkommenen Zahlen $2\,(2^2 - 1) = 6$, $2^2\,(2^3 - 1) = 28$, $2^4\,(2^5 - 1) = 496$, $2^6\,(2^7 - 1) = 8128$ ermittelt und dazu bemerkt, daß die vollkommenen Zahlen sehr selten seien, da unter den Einern, Zehnern, Hunderten, Tausenden je nur eine Zahl dieser Art sich finde. „Diesen Gedanken hat JAMBLICHOS, der Erklärer des NIKOMACHOS, aufgenommen, indem er je eine vollkommene Zahl der ersten und der zweiten Stufe der Myriaden zuteilt und zugleich die Vermutung ausspricht, daß auch jede folgende Stufe ihre vollkommene Zahl aufweisen werde." Hier setzt nun HULTSCH ein, indem er die vier nächsten[1]) vollkommenen Zahlen $2^{12}\,(2^{13} - 1)$, $2^{16}\,(2^{17} - 1)$, $2^{18}\,(2^{19} - 1)$, $2^{30}\,(2^{31} - 1)$ berechnet und den verfrühten Analogieschluß des JAMBLICHUS korrigiert. Zum Schlusse vergleicht noch HULTSCH die von JAMBLICHUS gebrauchten Ausdrücke „erste, zweite usw. Stufe der Myriaden" mit den Bezeichnungen, die ARCHIMEDES, APOLLONIUS, DIOPHANT für hohe Zahlen verwendet haben. In einem Nachtrage, der 1897 in den Göttinger Abhandlungen erschienen ist, beschäftigt sich HULTSCH auch noch mit der neunten vollkommenen Zahl, nämlich mit der von P. SEELHOFF[2]) als solche erkannten Zahl $2^{60}\,(2^{61} - 1)$. Diese Zahl hat 37 Stellen. Nach der Bezeichnungsweise des JAMBLICHUS steht sie auf der neunten Stufe der Myriaden, so daß also die 5., 6., 7. und 8. Stufe, entgegen der Meinung des JAMBLICHUS, gar keine vollkommenen Zahlen aufzuweisen haben. „Die vollkommenen Zahlen sind also in noch weit strengerem Sinne, als NIKOMACHOS an der schon früher angeführten Stelle es erwarten konnte, äußerst selten."

Aus dem Artikel *Arithmetica* sei noch besonders hervorgehoben die lichtvolle Darstellung der Lehre von den Proportionen, den arithmetischen, geometrischen und harmonischen, eine Darstellung, die allenthalben Neues bietet und Früheres (z. B. NESSELMANN) verbessert. Die Besprechung der

1) Über die fünfte vollkommene Zahl 33550336 siehe den von HULTSCH (nachträglich) erwähnten Aufsatz von M. CURTZE, Biblioth. Mathem 9_2, 1895, 39—42.

2) Zeitschr. f. Math. u. Phys. 31, 1886, 174—178.

Medietäten ($\mu\varepsilon\sigma\acute{o}\tau\eta\tau\varepsilon\varsigma$), zu denen die Proportionen in einer eigentümlichen Weise von den griechischen Mathematikern umgebildet wurden, führt vielfach wieder auf Pappus (drittes Buch) zurück. Den Schluß des Artikels, soweit er sich auf die Griechen bezieht, bildet die Darstellung der unbestimmten Analytik. Auch zu diesem Gebiete der Arithmetik hat Pythagoras den ersten Zugang eröffnet, und zwar durch die unbestimmte Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$. Eine Fundstätte für Lösungen dieser Gleichung bieten Platon und Proklus, letzterer in seinem Kommentare zu Platons Büchern vom Staate (siehe die Ausgaben von Schoell und Kroll und die von Hultsch hinzugefügten Erläuterungen). Die weitere Verfolgung der Frage führt zu Diophant, und mit der Erwähnung dieses Namens „sind wir an das Ende der Leistungen des Altertums im Gebiete der unbestimmten Analytik gekommen. Weit seine Vorgänger überragend hat er ganz neue Wege des arithmetischen Denkens eröffnet, neue Bezeichnungen geschaffen, allenthalben vom einzelnen Falle sich erhoben zur allgemeinen Anschauung, endlich auch da, wo er selbst innehielt, die Bahnen gezeigt, auf denen die Neueren weiter fortgeschritten sind. Alles das wird unter Diophantos zu behandeln sein." Ich muß mich freilich hier mit dieser allgemeinen Charakteristik des großen Alexandriners begnügen. Auf den 21 Spalten umfassenden Artikel Diophantos bei Pauly-Wissowa im einzelnen einzutreten, ist des Raumes wegen nicht möglich. Immerhin aber darf darauf hingewiesen werden, daß Hultsch in diesem Artikel (§ 7) ganz besonders die Verwandtschaft der diophantischen mit der ägyptischen Rechnungsweise hervorhebt und namentlich die Sequem- und Hau-Rechnungen der alten Ägypter und die Elemente ihrer Teilungsrechnung zur Vergleichung heranzieht. Freilich sind es nur „gewisse Grundzüge und elementare Übungen, in denen Diophantos sich als abhängig von jener älteren [der ägyptischen] Tradition zeigt; darüber hinaus aber tritt seine geniale schöpferische Tätigkeit unzweideutig hervor".

Auf die Arithmetik der Griechen folgt als letzter Abschnitt in dem Artikel *Arithmetica* die *Rechenkunst und Arithmetisches bei den Römern.* „Im Rechnen sind die Römer nie weiter gegangen, als es der alltägliche Bedarf des privaten und öffentlichen Lebens verlangte." Soweit dieses Rechnen ein Rechnen mit Geld oder mit Maßen war, verweist Hultsch selbst auf seine *Metrologie.* Außerdem sind zu diesem letzten Abschnitte zu nennen seine Abhandlungen *Die Bruchzeichen bei Vitruvius* (1876) und *Ein Beitrag zur Kenntnis des volkstümlichen Rechnens bei den Römern* (1889). In der ersten handelte es sich namentlich darum, die ganz korrumpierten Zahlen- und Bruchzeichen wiederherzustellen, die sich in Vitruvs Schrift *De architectura* bei den Maßbestimmungen gewisser Kriegsmaschinen finden.

Dem Artikel *Arithmetica* wäre nun der Artikel *Geometria*[1]) gegenüberzustellen. Dieser zwar im Satz befindliche, aber noch nicht veröffentlichte Artikel umfaßt freilich nur neun Spalten, er ist aber, wie HULTSCH selbst sagt, zu ergänzen durch die Artikel über die einzelnen Geometer. Von diesen wird gleich die Rede sein. HULTSCH referiert in dem Artikel *Geometria* zunächst über die Entwickelung der älteren Geometrie nach dem bekannten Abriß, den PROKLUS „aus der *μαθημάτων θεωρία* des GEMINOS entnommen und dieser wiederum von dem Peripatetiker EUDEMOS von Rhodos, einem Zeitgenossen des THEOPHRAST, entlehnt hatte", um dann zu einigen Materien allgemeinen Inhalts, die sich nicht streng an einzelne Autoren anschließen, überzugehen. Dazu gehört eine kurze Besprechung der Methoden der geometrischen Beweisführung, der analytischen, der trennenden (*διαιρετική*) und der apagogischen, zu denen nach PAPPUS (VII, 634—636) noch die synthetische als Gegenstück der analytischen zu fügen ist. Bei Erwähnung der *γεωμετρίας ὑποτύπωσις* des ANAXIMANDER (611—545) entscheidet sich HULTSCH gegen BRETSCHNEIDER für die Übersetzung „Abriß" der Geometrie, worin ihm übrigens schon W. SCHMIDT unter Verweisung auf des PROKLUS *ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* und des SEXTUS EMPIRICUS *Πυρρώνειοι ὑποτυπώσεις* vorangegangen war. Von den drei großen Problemen des Altertums, Kreisquadratur, Winkelteilung, Würfelverdoppelung, wird am ausführlichsten und mit besonderer Benutzung der Arbeiten von A. STURM das dritte behandelt, es nimmt fast die Hälfte des ganzen Artikels ein. Den Schluß bilden Erörterungen über die geometrischen Voraussetzungen (*ἀρχαί*), die *ὑποθέσεις*, die *αἰτήματα* und die *ἀξιώματα*. Die Stelle, an der sich PROKLUS darüber ausspricht (*PROCL. in EUCL.* 75, 27ff.) ist, „wie unzählige andere, aus GEMINOS geschöpft".

Unter den Artikeln über die einzelnen Geometer, die mit *Geometria* zusammen in der Realencyklopädie einen Überblick über die Geschichte

1) Herr Prof. WISSOWA hat die große Freundlichkeit gehabt, mir ein vollständiges Verzeichnis der sämtlichen Beiträge von HULTSCH zur Realencyklopädie zusammenzustellen. Obwohl diese erst bis zu *Eutychos* vorgeschritten ist, so hat HULTSCH doch noch darüber hinaus mehrere Artikel vorbereitet. Die aus dem Buchstaben G, darunter namentlich *Geometria*, hat mir Herr Prof. KROLL, als Nachfolger von Herrn WISSOWA, in einem Abzuge freundlichst zur Verfügung gestellt. Beiden Herren danke ich auch an dieser Stelle herzlich für ihre Hilfe. Mit Erlaubnis des Herrn WISSOWA entnehme ich seinem Schreiben überdies noch folgende charakteristische Stelle: „HULTSCH war das Ideal eines Mitarbeiters, nicht nur stets auf den Tag pünktlich und akkurat bis auf den I-Punkt seiner geradezu kalligraphisch schönen Manuskripte, sondern auch von der größten Opferwilligkeit; mehr als einmal ist er in zwölfter Stunde für behinderte oder unpünktliche Mitarbeiter eingesprungen, z. B. mit dem großen und inhaltreichen Artikel *Astronomia*, der eigentlich gar nicht in sein Ressort gehörte."

der griechischen Geometrie geben, stehen natürlich im Vordergrunde: Eudoxos (20 Spalten), Eukleides (49 Sp.), Archimedes (32 Sp.) und Apollonios (10 Sp.). Ich würde aber den zur Verfügung stehenden Raum weit überschreiten, wollte ich auf eine ausführlichere, der Bedeutung dieser Artikel angemessene Besprechung eintreten, und so muß ich mich hier darauf beschränken, einige wenige Einzelheiten herauszugreifen. Entgegen Susemihl, dem sich in der 3. Auflage auch Cantor angeschlossen hat, hält Hultsch für die Lebenszeit des Eudoxus an der früheren Bestimmung 408—355 fest. Ausführlich weiß er sodann über die Lebensverhältnisse des Eudoxus zu berichten. Von besonderem Interesse ist das Verhältnis von Eudoxus zu Euklid, von dem natürlich in beiden Artikeln gehandelt wird. „Das ganze V. Buch der *Elemente* hat Eukleides (s. d. § 7. 15) von Eudoxos übernommen, insbesondere auch die Lehre von den ὁμογενῆ μεγέϑη, seien diese nun kommensurable oder inkommensurable.“ Für wahrscheinlich hält es Hultsch, daß auch Teile des VI. Buches, insbesondere die Sätze 29 und 30, dem Eudoxus zuzusprechen seien. Etwa die Hälfte des ganzen Artikels ist den astronomischen Leistungen des Eudoxus, des „Begründers der wissenschaftlichen Astronomie“, gewidmet, insbesondere seinem Werke φαινόμενα. Darüber handelt Hultsch natürlich auch ausführlich in seinem Artikel *Astronomie* bei Pauly-Wissowa. Die astronomischen Leistungen des Eudoxus hat er überdies zum Gegenstande eines besonderen, populär-wissenschaftlichen Aufsatzes gemacht, der 1904 in der Zeitschrift Das Weltall erschienen ist.

Daß sich der Artikel Eukleides im wesentlichen auf Heiberg stützt, ist selbstverständlich. Als mittleres Jahr der Blütezeit Euklids setzt Hultsch 295 v. Chr. an „mit dem Hinzufügen, daß seine schriftstellerische Tätigkeit, nach den teils noch erhaltenen, teils verloren gegangenen Schriften zu schließen, auf eine lange Reihe von Jahren sich erstreckt haben muß“. Euklids bedeutendstes Werk sind die *Elemente*: τὰ Εὐκλείδου bedeutet bei Archimedes (übrigens auch sonst noch bis in die spätesten Zeiten, z. B. bei Simplicius) kein anderes Werk als die στοιχεῖα, und ihr Verfasser wurde schon frühzeitig schlechtweg als ὁ στοιχειωτής zitiert. Sehr ausführlich (6 Spalten) berichtet Hultsch über die Textgeschichte der *Elemente*, über die Handschriften, die Textausgaben, die Übersetzungen und Bearbeitungen (arabische, lateinische, moderne) bis zu der „auf den ältesten noch erreichbaren Überlieferungen fußenden, nach streng kritischer Methode durchgeführten Textesgestaltung“, die wir Heiberg verdanken. Die *Elemente* sind bekanntlich in 13 Bücher eingeteilt. Eine lateinische Übersetzung aber aus dem 4. Jahrhundert, die eine Einteilung in 15 Bücher aufweist, und noch andere Umstände lassen es als nicht unwahrscheinlich erscheinen, daß das umfangreiche X. Buch früher

für drei Bücher zählte, die Gesamtzahl also in der Tat 15 war. Es folgt nun eine kritische, reich mit Literatur versehene Besprechung der einzelnen Bücher, die nicht weniger als 21 Spalten umfaßt. Bei Buch II weist HULTSCH darauf hin, daß Prop. 10, „wie aus PROKLOS (*in Plat. remp.* II, 27 ff. KROLL) hervorgeht, schon vor PLATON bekannt gewesen und von den Pythagoreern zur Bildung einer Doppelreihe von ganzen Zahlen benutzt worden" ist. Mit diesen Reihen hat sich HULTSCH eingehender beschäftigt in der Abhandlung *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen* (1900), in der er den Beweis für die aus THEON (THEON ed. HILLER, 43—45; s. auch CANTOR, *Vorles.* I³, 436) bekannte Entwickelung der Seiten- und Diameterzahlen gibt, und ihnen ist auch der zweite jener drei *Exkurse* in KROLLS Ausgabe des PROKLUSschen Kommentares zu PLATON (II, 393—400) gewidmet. Es handelt sich dabei um eine Reihe von Quadraten der Art, daß die Seite jedes folgenden Quadrates gleich der Summe aus der Seite und der Diagonale des vorhergehenden ist. Nach HULTSCH hat THEON den Abschnitt über die Pythagoreische Zahlenreihe wahrscheinlich aus ADRASTUS, und zwar aus dessen Kommentar zum *Timaeus*, geschöpft, und derselben Quelle entstammt augenscheinlich auch die Darstellung bei PROKLUS.

An die Besprechung der *Elemente* schließt HULTSCH eine solche der Kommentare zu den *Elementen* an, unter denen er an erster Stelle den des HERON (s. ANARITIUS ed. CURTZE) nennt. Daran schließen sich POSEIDONIUS, GEMINUS, PORPHYRIUS, PAPPUS, PROKLUS, SIMPLICIUS usw. Eine ansehnliche Sammlung von Scholien ist von HEIBERG (EUCL. V) herausgegeben und später (1903) durch Nachträge ergänzt worden. Die Quellen der Scholien gehen zurück bis auf THEODORUS, den Lehrer PLATONS. In den Scholien zum X. Buche ist eine große Anzahl von sexagesimalen Ausrechnungen überliefert. Von diesen hat HULTSCH in der Abhandlung *Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu EUKLIDS Elementen* (1904) eine Auswahl mitgeteilt, „um einen Einblick in die Methoden zu gewähren, nach welchen die Griechen die sechs Rechnungsarten vom Summieren bis zum Wurzelausziehen ausführten".

Der Schluß des Artikels ist den übrigen Schriften des EUKLID gewidmet (11 Sp), insbesondere den *Data* und den anderen von PAPPUS im 6. und 7. Buche seiner *Collectio* kommentierten.

Auch der Artikel ARCHIMEDES ist in der Hauptsache auf die Arbeiten HEIBERGS gegründet. Außerdem benutzt HULTSCH (wie natürlich auch bei den anderen Geometern) SUSEMIHLS *Griechische Literaturgeschichte.* Auf eine kurze Übersicht über die äußeren Lebensverhältnisse des ARCHIMEDES folgt eine Besprechung der überlieferten Handschriften und der ver-

schiedenen Ausgaben und Übersetzungen bis zur Ausgabe von Heiberg. Daran schließt sich, als Hauptbestandteil des Artikels, eine Analyse der Schriften selbst. Hier darf besonders hervorgehoben werden, was Hultsch über die Anstrengungen des Archimedes, „bis weit über alle Grenzen menschlichen Erfassens fortzuzählen“ und „mit griechischen Worten die Zahlenreihe immer noch weiter zu führen“, berichtet, die dieser in seinen Oktadenrechnungen und im ψαμμίτης (erg. ἀριθμός) niedergelegt hat. Bei der Besprechung der *Kreismessung* bezieht sich Hultsch natürlich auch auf seine eigenen Arbeiten, die wir bereits kennen gelernt haben. Bei Pappus (Bd. I, 312) findet sich einmal die κύκλου μέτρησις mit den Worten ἐν τῷ περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας zitiert, woraus aber nicht mit Tannery zu folgern ist, daß jene nur ein Auszug aus einer größeren Schrift des Archimedes περὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας sei. An einer anderen Stelle weist Pappus (Bd. I, 234) die Erfindung der archimedischen Spirale dem Konon zu, eine Ansicht, der auch Heiberg und Susemihl beistimmen. Hultsch will aber lieber hier einen Irrtum des sonst zwar sehr zuverlässigen Pappus annehmen und mit Nizze und Cantor die Spirale dem Archimedes zusprechen. Im Anschluß an ein weiteres Zitat bei Pappus (Bd. III, 1034) nimmt Hultsch an, der ursprüngliche Titel der beiden Bücher vom Gleichgewichte der Ebenen habe ἰσορροπίαι[1]) (nicht ἐπιπέδων ἰσορροπίαι) geheißen. In dieser Vermutung wird er durch W. Schmidt unterstützt, der in seiner Besprechung des Artikels (in Bursians Jahresbericht 1901) eine Stelle aus Herons *Mechanik* (Heron, *op.* II, 64, 32) hierfür heranzieht. Bei der Besprechung der Schrift über die schwimmenden Körper — περὶ τῶν ὀχουμένων sei der wahrscheinliche Titel gewesen — wendet sich Hultsch gegen die Ansicht von Heiberg, wonach der überlieferte griechische Text erst im 16. Jahrhundert aus einer lateinischen Vorlage zurückübersetzt worden sei. Die Folgezeit hat nun aber freilich Hultsch nicht recht gegeben. Denn seit dem großen Funde von Heiberg besitzen wir jetzt einen fast vollständigen Text der Schrift περὶ ὀχουμένων, von der bisher nur die lateinische Übersetzung von Wilhelm von Moerbeek vorhanden war, und es bestätigt sich nun, daß das griechische Fragment Archimedes (ed. Heiberg) II, 356—358 in der Tat unecht ist.

Sehr ausführlich behandelt sodann Hultsch das Rinderproblem, das bekanntlich Lessing in einer Wolfenbütteler Handschrift aufgefunden und 1773 herausgegeben hatte. Nach einer Zusammenstellung von Zitaten, die sich auf nicht mehr vorhandene Schriften des Archimedes beziehen

1) Siehe hierzu, was Heiberg in seiner der neuen Schrift des Archimedes gewidmeten Abhandlung (Hermes **42**, 1907, 301) sagt.

(das *ἐφόδιον* gehört erfreulicherweise nun nicht mehr zu diesen), bespricht HULTSCH sodann noch die astronomischen Arbeiten des großen Mathematikers und die mannigfachen mechanischen Erfindungen, die ihm zugeschrieben werden. Einer von diesen, dem sogenannten Himmelsglobus des ARCHIMEDES, hatte HULTSCH schon 1877 eine besondere Besprechung gewidmet, die darin gipfelte, daß dieser Himmelsglobus wahrscheinlich durch ein hydraulisches Werk getrieben worden sei.

Aus dem Artikel APOLLONIOS, der natürlich zum größeren Teile den *κωνικά* gewidmet ist, sei zunächst erwähnt, daß HULTSCH die Geburt des APOLLONIUS um 262 ansetzt. Sodann hebe ich die von EUTOKIUS herrührende Notiz hervor, nach der APOLLONIUS in seiner Schrift *ὠκυτόκιον* die Kreismessung des ARCHIMEDES dadurch verbessert habe, daß er andere Zahlen angewendet und so das Verhältnis der Peripherie zum Durchmesser in engere Grenzen habe einschließen können. Wie dies APOLLONIUS wohl mit Hilfe seiner Myriadenrechnung angefangen haben mag, darüber hat HULTSCH in dem bereits früher besprochenen Aufsatze *Zur Kreismessung des Archimedes* eine besondere Hypothese aufgestellt und sie rechnerisch durchgeführt. Ferner sei aus dem Artikel hervorgehoben, was HULTSCH eben zu dieser Myriadenrechnung bemerkt. Zu dieser arithmetischen Untersuchung war APOLLONIUS durch die Sandrechnung des ARCHIMEDES angeregt worden. Während sich aber ARCHIMEDES bei seinem Bestreben, die Zahlenreihe bis ins Unendliche zu verlängern und selbst die größten Zahlen noch in Worten auszusprechen, immerhin genötigt sah, neue, vom gewöhnlichen Sprachgebrauche abweichende Ausdrücke zu bilden, verzichtete APOLLONIUS auf das Endziel des ARCHIMEDES, daß man jede ausgesprochene, auch noch so hohe Zahl durch eine andere noch höhere überbieten könne; dafür aber wies er nach, daß bis zu einer Zahlenhöhe, die schon weit über menschliches Vorstellungsvermögen hinausreicht, die Zahlen durch solche griechische Wörter, die der gewöhnlichen Sprache entlehnt sind, ausgedrückt werden können. Auch bot seine Theorie den Vorteil, daß die Zahlen nicht, wie bei ARCHIMEDES, künstlich in Oktaden zusammengepfercht, sondern ungezwungen nach Potenzen von Myriaden gruppiert wurden. Über alles das hat uns PAPPUS im 2. (im Anfange freilich verstümmelten) Buche seiner *Collectio* so eingehend orientiert, daß wir uns eine Vorstellung von der verlorenen Originalschrift, von der wir auch den Titel nicht kennen, sehr gut bilden können.

Den hier besprochenen Artikeln wäre nun noch eine stattliche Reihe anderer hinzuzufügen, die HULTSCH in der Realencyklopädie über griechische Geometer verfaßt hat, und manche von diesen würden auch eine besondere Besprechung rechtfertigen. Allein — der Raum gestattet es nicht, und so muß ich mich damit begnügen, auf die am Schlusse des Schriften-

verzeichnisses namhaft gemachten Beiträge zu verweisen, die Hultsch dem Pauly-Wissowaschen Werke zugewendet hat.

Wir haben schon früher gesehen, wie Hultsch bei der Neubearbeitung seiner *Metrologie* sich veranlaßt sah, auch die Metrologie der Ägypter und Babylonier in den Bereich seiner Forschungen aufzunehmen, und wie er dadurch auch dazu geführt wurde, der ägyptischen Rechenkunst, insbesondere der sogenannten Teilungsrechnung, seine Aufmerksamkeit zu widmen. Und von der anderen Seite führten ihn dazu die mannigfachen Beziehungen zwischen der ägyptischen und der griechischen Arithmetik, die Hultsch selbst bei den verschiedensten Gelegenheiten auseinandergesetzt hat. Eine direkte Veranlassung, sich noch eingehender mit der Rechenkunst der Ägypter zu beschäftigen, war für ihn die Auffindung des mathematischen Papyrus von Akhmim, der 1892 von J. Baillet veröffentlicht worden war (s. die Anzeige von Hultsch in der Berl. phil. Wochenschr. 1894). Die aus dem 7. oder 8. Jahrhundert n. Chr. stammende griechische Schrift ist zwar um mehr als zwei Jahrtausende jünger als das Rechenbuch des Ahmes, trotzdem aber „zeigt die jüngere Urkunde sich als eine aus derselben arithmetischen Schulung hervorgegangene Nachbildung der weit älteren Schrift“. In der Abhandlung[1]) *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmim* (1894) behandelt Hultsch eine Aufgabe, die der Verwaltungsgeschichte der Provinz Ägypten entnommen ist: „Einer hatte 7, ein anderer 8, noch ein anderer 9 Aruren mit Aussaat bestellt, und der Bewässerungsbeamte nahm im ganzen den Ertrag von $3\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ Aruren als Steuer in Anspruch. Wieviel wurde abgezogen dem, der 7, und dem, der 8, und dem, der 9 Aruren bestellt hatte?“ Zunächst handelte es sich hier freilich um die nicht ganz einfache Entzifferung und Deutung des Originaltextes und der darin vorkommenden oft schwer verständlichen Zeichen, eine Arbeit, die Zeile für Zeile vorgenommen werden mußte, bevor Hultsch zur eigentlichen Besprechung der Aufgabe und der zur Lösung gehörenden ägyptischen Rechnungsweisen übergehen konnte.

Im Jahre 1895 veröffentlichte sodann Hultsch die große Abhandlung *Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung*, der er 1901 *Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung* folgen ließ. Diese Rechnung beruht auf der Eigentümlichkeit der alten Ägypter, daß sie (mit Ausnahme des Bruches $\frac{2}{3}$) nur Stammbrüche verwendet haben. Daraus entsprang dann vor allem die Aufgabe, einen beliebigen Bruch als Summe von Stamm-

1) Sie ist in der Festschrift für Förstemann enthalten, die von der Historischen Gesellschaft zu Dresden herausgegeben worden ist. Den Schluß dieser Festschrift bildet ein Jahrbuch, das die Zeit 1870—1894 umfaßt, und das von etwa einem Dutzend Vorträgen berichtet, die Hultsch (Mitglied seit 1873) in diesem Zeitraume namentlich über metrologische Themata in der Gesellschaft gehalten hat.

brüchen darzustellen (in der obigen Aufgabe des Papyrus von Akhmim z. B. ist $\frac{15}{4} = 3\frac{3}{4} = 3\frac{1}{2}\frac{1}{4}$), wodurch die ursprünglichen Bruchrechnungen sich in „Teilungsrechnungen" verwandelten. Diese Rechnungen und die dabei zur Anwendung kommenden Bezeichnungen und Methoden verfolgt nun HULTSCH in der ersten der beiden genannten Abhandlungen in eingehendster Weise auf Grund des von EISENLOHR herausgegebenen mathematischen Handbuches der alten Ägypter (des Rechenbuches des AHMES), während er in der zweiten Abhandlung diese Untersuchungen ergänzt unter Benutzung eines dem 'Egypt Exploration Fund' angehörenden demotischen Papyrus, der nach Zeit und Inhalt eine Mittelstufe zwischen dem mathematischen Handbuche des AHMES und dem mathematischen Papyrus von Akhmim einnimmt.

Und noch eine weitere Quelle für Beispiele zur ägyptischen Teilungsrechnung konnte HULTSCH namhaft machen und verwerten, und zudem eine, die zu ganz unerwarteten Aufschlüssen führte. In dem dritten der wiederholt genannten *Exkurse*, die sich in KROLLS Ausgabe des PROKLUSschen Kommentares zu PLATON finden, verweist nämlich HULTSCH (S. 409) auf den Bericht, den PROKLUS 40, 24—42, 10 über die Rechnung eines gewissen PATERIUS gibt. Dieser hat an die dort besprochenen Figuren des NESTORIUS „eine schülerhafte Ausrechnung angeknüpft, die jedoch von großem historischem Interesse ist, weil sie eine um drei bis vier Jahrhunderte vor der Niederschrift des mathematischen Papyrus von Akhmim zurückliegende Sammlung von Beispielen zur ägyptischen Teilungsrechnung bietet." HULTSCH bespricht und ergänzt nun die Rechnungen, die PATERIUS nach ägyptischer Rechnungsweise unter Benutzung von Stammbrüchen vorgenommen hatte und die, obwohl an sich unbedeutend, jetzt für uns den Charakter eines wichtigen historischen Dokumentes besitzen. —

Mit dem bisher Besprochenen ist noch immer nicht alles erschöpft, was HULTSCH auf dem Gebiete der Geschichte der antiken Mathematik geleistet hat. Denn wir haben bis jetzt im wesentlichen nur von der reinen Mathematik gehandelt, HULTSCH hat aber auch der Geschichte der angewandten Mathematik eine nicht unbedeutende Zahl ausgezeichneter Arbeiten gewidmet. Die Richtung, in der sich diese Arbeiten bewegen, ist natürlich durch die Namen HERON und PAPPUS bestimmt, und so haben wir es im wesentlichen mit der praktischen Geometrie, d. h. der Feldmeßkunst, einerseits und mit der Astronomie anderseits zu tun.

Die der praktischen Geometrie zugewandten Arbeiten von HULTSCH berühren sich natürlich vielfach mit seinen bereits früher besprochenen metrologischen Untersuchungen. Eine scharfe Trennung ist da kaum

möglich. Das gilt in besonderem Maße von dem Artikel *Gromatici*, der 1872 in der Encyklopädie von Ersch und Gruber erschienen ist. Hultsch setzt darin zunächst auseinander, wie die Anfänge der Feldmeßkunst von den Römern selbst auf die Etrusker zurückgeführt wurden. Es handelte sich bei diesen, wie dann später auch bei den Römern, im wesentlichen um die Absteckung der Linien von Ost nach West und von Süd nach Nord. Das kunstlose Instrument, das hierzu diente, hieß groma (unteritalisch γνώμα, verwandt mit γνώμων), wovon die römischen Feldmesser den Namen gromatici erhielten. Die ersten Anfänge einer gromatischen Literatur fallen in die Zeit des Augustus: Frontinus, Hyginus, Balbus sind die ersten Namen, die uns darin begegnen. Von ihren Schriften sind leider nur Bruchstücke auf uns gekommen (s. Hultsch, *Metrol. script.* II). Obwohl die Römer einem tieferen Studium der Geometrie abhold waren, so drang doch bei den Einsichtigeren die Erkenntnis durch, daß wenigstens eine summarische Darstellung der Elemente der Geometrie auch für die Zwecke der Praxis dringend vonnöten sei. Das ergibt sich aus der Schrift des Columella über den Landbau. Die Vorlage aber, die dieser dabei benutzt, ist nicht römischen, sondern griechischen Ursprungs, sie geht auf Heron zurück. Die Beziehungen zwischen Columella und Heron werden nun von Hultsch ausführlich besprochen. Von Heron abhängig ist auch die *Expositio et ratio omnium formarum* von Balbus. Das zeigt sich bereits deutlich, wenn man die Übersicht über die gebräuchlichen Maße, mit der auch Balbus beginnt, mit der zweiten Heronischen Maßtafel *(Metrol. script.* I, 184*)* vergleicht. Die Abhängigkeit der römischen Agrimensoren von Heron bildet dann überhaupt den wesentlichsten Bestandteil der weiteren Ausführungen von Hultsch. Insbesondere zeigt er noch, daß die römischen Gromatiker die Schrift Herons über die Dioptra benutzt haben. Frontinus, Hyginus und auch Nipsus haben aus dieser Quelle geschöpft, wahrscheinlich aber nicht aus dem Originale, sondern aus einer wohl von Balbus herrührenden Bearbeitung.

Die Erwähnung der Dioptra gibt Veranlassung, den gleichnamigen Artikel von Hultsch bei Pauly-Wissowa kurz zu besprechen. Er leitet zugleich zur Astronomie über. Nach einigen allgemeinen, sachlichen und historischen Bemerkungen, die sich auf die Verwendung der Dioptra beziehen — schon zu Polybius Zeit wurde die Höhe der Mauer einer belagerten Stadt mit Hilfe einer Dioptra gemessen —, gibt Hultsch eine Beschreibung des Instrumentes, wie sie durch Heron überliefert ist. Während aber der Herausgeber von Heron III, H. Schöne, der Ansicht ist, die Dioptra habe, zum Visieren und zum Nivellieren, zwei auswechselbare Aufsätze gehabt, glaubte Hultsch, es sei „nach dem Stande der Überlieferung" wahrscheinlicher, daß nur ein Aufsatz vorhanden war. Dem-

gegenüber verweist SCHÖNE[1]), wie mir scheint mit Recht, einerseits auf die Stelle HERON III, 214, 21 *κατεσκευάσθω ἡ διόπτρα ἡ δυναμένη ἐκλπεδα πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλοις διοπτεύειν*, aus der doch wohl hervorgeht, daß das Instrument zu dem angegebenen Zwecke vor dem Gebrauche erst besonders hergerichtet wurde, und anderseits auf den Umstand, daß in der Beschreibung des Instrumentes 196, 2 durch Blattausfall eine (auch von HULTSCH anerkannte) Lücke anzusetzen sei, und daß man gar nicht einsehen könne, was denn schließlich auf den vier Blättern der Handschrift, die verloren sind, noch gestanden haben sollte, da sich doch die Beschreibung nach der Lücke im HERON-Texte fortsetzt.

In der Darstellung bei HULTSCH folgen nun auf die Beschreibung der Dioptra die verschiedenen Verwendungen des Instrumentes, einerseits für die Zwecke der Feldmeßkunst und der Ingenieurwissenschaft (zu der oben erwähnten Stelle HERON III 214 gibt übrigens HULTSCH doch immerhin zu, daß der Apparat durch ein zweites Richtscheit vervollständigt wurde) und anderseits für die Zwecke der Astronomie. Die Aufgabe, *τὰ μεταξὺ τῶν ἀστέρων διαστήματα* zu messen, war auch schon von HERON (190, 6) ausdrücklich hervorgehoben worden. Sein Verfahren, den Abstand zweier Sterne zu bestimmen (Kap. 32, p. 286), wird nun von HULTSCH kurz beschrieben.

In den Auszügen aus GEMINUS bei PROKLUS wird angedeutet, daß durch die Dioptra auch *αἱ ἀποχαὶ ἡλίου καὶ σελήνης καὶ τῶν ἄλλων ἄστρων* gemessen werden könnten. Gemeint sind damit die Entfernungen dieser Himmelskörper von der Erde, und um diese zu finden, müssen die scheinbaren Durchmesser von Sonne und Mond gemessen werden. Die Darstellung, die HULTSCH in dem Artikel *Dioptra* von dieser Untersuchung gibt, stützt sich auf die inhaltreiche Abhandlung *Winkelmessungen durch die HIPPARCHische Dioptra*, die er 1899 in der Festschrift für CANTOR veröffentlicht hat. HULTSCH berichtet darin zunächst von den ältesten Versuchen, das Verhältnis des Sonnendurchmessers zu dem von der Sonne in einem Tageslauf durchmessenen Himmelskreis durch gleichmäßig ablaufendes Wasser zu ermitteln. Dieses Verfahren ist von HERON vervollkommnet und in seinem Werke *Über Wasseruhren* beschrieben worden. Von dem kurzen, durch PROKLUS in seiner *ὑποτύπωσις τῶν ἀστρονομικῶν ὑποθέσεων* uns überlieferten Fragmente dieser Schrift gibt HULTSCH eine Übersetzung.[2])

1) Briefliche Mitteilung. SCHÖNE beanstandet bei dieser Gelegenheit auch den Schlußabsatz im Artikel *Dioptra*, worin HULTSCH sagt, die römischen Feldmesser hätten von der komplizierten Einrichtung der HERONischen Dioptra nur das in horizontaler Ebene drehbare Winkelkreuz beibehalten. In der Tat haben Groma und Dioptra gar nichts miteinander zu tun, was auch schon aus HERON III, 288, 20 ff. hervorgeht.

2) Das Fragment ist, mit Übersetzung, auch von W. SCHMIDT im ersten Bande der HERON-Ausgabe mitgeteilt.

Das Verdienst, den Winkel, unter dem der Sonnendurchmesser gesehen wird, zuerst direkt mit dem Auge gemessen zu haben, gebührt dem Archimedes. Die Beobachtungen, die er mit Hilfe eines *μακρὸς κανών*, dem jedoch noch eine Vorrichtung zum Visieren mangelte, angestellt hat, sind im *ψαμμίτης* beschrieben. Vervollkommnet wurde dieses Instrument durch Hipparch, der ihm die später von Heron und Ptolemäus beibehaltene Länge von vier Ellen gab. Hipparch war es sodann auch, der die schwerfällige Rechnung nach den Seiten eingeschriebener Vielecke beseitigte und sie durch die Sehnentafeln ersetzte, die dann später von Ptolemäus übernommen und vervollkommnet wurden. Eine ausführliche Beschreibung der einst von Hipparch angewendeten und von Ptolemäus wiederhergestellten Dioptra hat Pappus im Kommentare Theons zum V. Buche des Ptolemäus gegeben. Diesen Bericht des Pappus teilt Hultsch in freier Übersetzung mit, um sodann die Resultate der Messungen Hipparchs, namentlich der Messungen des Monddurchmessers, eingehend zu besprechen. Hipparch war zu dem beachtenswerten Ergebnis gekommen, daß der mittlere Monddurchmesser 0° 33′ 14″ betrage. Hultsch verteidigt sodann noch die Messungen Hipparchs gegen die Ausstellungen, die Ptolemäus, der doch ganz auf Hipparch aufgebaut habe, dagegen erhoben hat. Den Schluß der Abhandlung bildet eine Mitteilung über die Hipparchische Dioptra aus der *Hypotyposis* des Proklus. Hultsch wird dadurch zu einer Betrachtung über die Einführung des Sinus in die Trigonometrie geführt, und er erachtet es für wahrscheinlich, daß diese aus griechischer Quelle stamme.

Von den weiteren Arbeiten, die Hultsch der Geschichte der Astronomie gewidmet hat, sind namentlich zwei hervorzuheben, die mit der eben besprochenen mancherlei Berührungspunkte darbieten. Es sind die Abhandlungen *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne* (1897) und *Hipparchos über die Größe und Entfernung der Sonne* (1900). Der zugemessene Raum verbietet mir leider ausführlicheres Eintreten. Über die erste Abhandlung hat Manitius in der Berliner phil. Wochenschr. (1897, 1281—1288) eingehend referiert, und so begnüge ich mich hier damit, hervorzuheben, daß der stoische Philosoph Poseidonius, der Zeitgenosse Ciceros „über die Größe der Sonne eine besondere Schrift abgefaßt und darin die weit über Hipparchs Ansätze hinausgehende Hypothese aufgestellt hat, daß der Durchmesser der Sonne auf 3 Millionen Stadien und ihre Entfernung von der Erde auf 500 Millionen Stadien zu beziffern sei“. Was wir von dieser Hypothese wissen, verdanken wir den Berichten, die uns Kleomedes in seiner *κυκλικὴ θεωρία* und Plinius in seiner *Historia naturalis* hinterlassen haben. Diese Berichte werden von Hultsch mitgeteilt, auf ihre Quellen untersucht und aufs eingehendste erklärt, ergänzt und kritisiert.

Die Abhandlung *HIPPARCHOS über die Größe und Entfernung der Sonne* stützt sich auf den Kommentar, den PAPPUS zum fünften Buche der *Syntax* des PTOLEMÄUS geschrieben, und in den er Auszüge aus HIPPARCHS Werk *Über die Größen und Entfernungen der Sonne und des Mondes* aufgenommen hat. Diese Auszüge waren zugleich mit dem übrigen Texte des PAPPUS von THEON seinem großen Kommentare zur *Syntax* einverleibt worden. HULTSCH war aber in der Lage gewesen, auf Grund neuer Handschriften und mit Benutzung der THEON-Ausgabe von CAMERARIUS den echten PAPPUS-Text wiederherzustellen, und er veröffentlicht nun in der genannten Abhandlung den Kommentar des PAPPUS zum 11. Kapitel des fünften Buches der *Syntax*, und zwar sowohl in der ursprünglichen Form als auch in der nur wenig abweichenden Überarbeitung durch THEON. Durch diese Autoren allein ist uns ein kurzer Bericht über HIPPARCHS Messung der Entfernung der Sonne erhalten. Den Bericht des PAPPUS teilt nun HULTSCH auch noch in deutscher Übersetzung mit, um dann zu einer Würdigung der großen Leistungen des HIPPARCH selbst überzugehen. Er hebt als entscheidende Tatsache hervor, „daß HIPPARCH an die wirkliche Entfernung der Sonne weit näher als sein Vorgänger ARISTARCH herangekommen ist und damit dem POSEIDONIOS den Weg zu seiner der Wirklichkeit noch mehr sich nähernden Hypothese geebnet hat, während PTOLEMAIOS diese großartigen Fortschritte unbeachtet ließ und bei seiner Abschätzung des Sonnenabstandes noch nicht einmal die Hälfte der HIPPARCHischen Zahl erreichte“. Der Schluß der Abhandlung beschäftigt sich sodann noch mit dem Zeitpunkt der von HIPPARCH erwähnten Sonnenfinsternis. HULTSCH entscheidet sich auf Grund der Angaben HIPPARCHS für das Jahr 129 und gewinnt dadurch zugleich Bestimmungen für die Zeit der Veröffentlichung der verschiedenen Schriften des großen Astronomen.

Ich muß es mir versagen, auf die Untersuchungen näher einzutreten, die HULTSCH in dem ersten der drei *Exkurse* zu PROKLUS (ed. KROLL) an die Bestimmung des großen Jahres des Astronomen SOSIGENES angeknüpft hat, Untersuchungen, die mit den bis ins Unendliche aufsteigenden Zahlenreihen des ARCHIMEDES und des APOLLONIUS zusammenhängen — mehr als $^1/_3$ Trillion Jahre müssen nach SOSIGENES verfließen, bis die gleichzeitige Rückkehr der Sonne, des Mondes und der fünf Planeten zu den Anfangspunkten ihrer Bewegungen stattfinden —, ich kann auch nur kurz hinweisen auf die populär-wissenschaftlichen Aufsätze *Die Messungen der Größe und Entfernung der Sonne im Altertum* (1901) und *Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen* (1901), die sich natürlich besonders mit HIPPARCH beschäftigen: denn noch wäre ja der umfangreiche Artikel *Astronomie* (33 Spalten) bei PAULY-WISSOWA zu besprechen, der an Be-

deutung kaum hinter dem Artikel *Arithmetica* zurücksteht, — und die Zeit drängt. Es sei aber wenigstens gesagt, daß dieser Artikel eine vollständige, bis zur neuesten Literatur reichende Übersicht gibt über alles, was von der griechischen und römischen Astronomie von Thales bis Ptolemäus bekannt ist. Was Hultsch in diesem Artikel bietet, ist so konzentriert, daß kaum irgend etwas Nennenswertes übergangen wird, während doch die hervorragenderen Erscheinungen, die Leistungen eines Thales, eines Pythagoras und seiner Schule, eines Parmenides, eines Önopides, eines Platon, eines Herakleides — dem System dieses Astronomen hat Hultsch 1896 eine besondere Abhandlung gewidmet —, vor allem aber die des Eudoxus, des Aristarch, des Hipparch, des Poseidonius und des Ptolemäus eine sehr eingehende Würdigung erfahren. An die Übersicht über die Entwickelung der griechischen Astronomie schließt Hultsch noch einen Bericht über die verschiedenen Darstellungen der Himmelserscheinungen an, mögen diese nun durch Wort und Schrift, oder durch Abbilder des gestirnten Himmels gegeben worden sein. Hier begegnen uns die Namen Autolykus und Euklid, ferner Thales, Anaximander, Eudoxus, Archimedes, als Verfertiger von Himmelsgloben oder verwandter Mechanismen, und sodann wieder Ptolemäus. Der Schluß des trefflichen Artikels ist den Römern gewidmet. Diese haben zwar aus eigener Erfindung nichts zu den astronomischen Kenntnissen des Altertums beigetragen, aber da sie seit der Zeit, wo sie mit griechischer Wissenschaft sich befreundeten, ein reges Interesse für die Himmelskunde gezeigt haben, so ist in den Schriften des Cicero, Vitruvius, Plinius, Censorinus, und später noch in denen des Macrobius, Martianus Capella u. a., vieles erhalten, was für die Geschichte der Astronomie von Wichtigkeit ist.

Wie die anderen großen Sammelartikel von Hultsch bei Pauly-Wissowa, so ist auch der über die Astronomie durch die Artikel über die einzelnen Astronomen zu ergänzen. Unter diesen hebe ich (neben dem früher besprochenen Eudoxos) noch besonders die Artikel Aristarchos von Samos und Autolykos hervor.

Der Name Autolykus führt uns wieder zu Pappus zurück und damit zugleich zu den Arbeiten von Hultsch, die nun zum Schlusse noch kurz besprochen werden müssen. Das sechste Buch der *Collectio* des Pappus war, wie wir uns erinnern, dem *μικρὸς ἀστρονομούμενος τόπος* gewidmet. Unter den darin genannten und von Pappus kommentierten Schriften interessieren uns hier noch besonders die des Theodosius und des Autolykus. Mit der *Sphärik* des Theodosius hat sich Hultsch sehr viel beschäftigt. Schon in der Abhandlung *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* (1883) war er zu der Überzeugung gekommen, „daß die uns erhaltene, wahrscheinlich dem 1. Jahrhundert v. Chr. angehörige *Sphärik* des Theodosios von Tripolis

auf einem älteren, wenig abweichenden Werke beruht, das bereits dem AUTOLYKOS vorgelegen hat". Diese Untersuchung hat HULTSCH dann weiter verfolgt in den Arbeiten *Zu der Sphärik des THEODOSIOS* (1884) und *Über die Sphärik des THEODOSIOS und einige unedierte mathematische Texte* (1885). Der bereits früher ausgesprochene Satz wird nun nach genauerer Begründung als gesichertes Ergebnis hingestellt. Danach ist also THEODOSIUS nur der Herausgeber, höchstens der Überarbeiter und Erweiterer eines um vieles älteren Lehrbuches der Sphärik gewesen, das schon um die Mitte des 4. Jahrhunderts v. Chr. im wesentlichen den Inhalt der drei unter THEODOSIUS Namen überlieferten Bücher der Sphärik besessen hat. Mit HEIBERG und TANNERY hält HULTSCH es für sehr wahrscheinlich, daß EUDOXUS der ursprüngliche Verfasser gewesen sei.

Am Schlusse der Abhandlung konnte HULTSCH auf eine Scholiensammlung hinweisen, die er in Paris im Manuscrit grec 2342 aufzufinden das Glück gehabt hatte, so reichhaltig, wie sie ihm noch zu keinem anderen alten Mathematiker vor Augen gekommen war. Zu AUTOLYKUS lagen 200 Scholien vor, die einen fast fortlaufenden Kommentar zum Text bilden, und noch reichhaltiger waren die Scholien zu THEODOSIUS. Diese letzteren hat HULTSCH in der Abhandlung *Eine Sammlung von Scholien zur Sphärik des THEODOSIOS* (1886) genauer beschrieben und sie dann — es sind ihrer 359 — als *Scholien zur Sphärik des THEODOSIOS* (1887) in den Abhandlungen der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften mit dem ganzen dazu gehörigen kritischen Apparate herausgegeben. Der Ausgabe liegt aber nicht nur die Pariser Handschrift 2342, die nur bis zum 14. Jahrhundert zurückreicht, zugrunde, sondern HULTSCH war auch in der Lage, außerdem noch den von AUGUST MAU kollationierten Vaticanus graecus 204, der im wesentlichen dieselbe Sammlung enthält, aber um vier Jahrhunderte älter ist, verwerten zu können. Von besonderem Interesse ist dabei das Scholion 337, das, auch dem Wortlaute nach, sich jenem von PAPPUS zitierten λῆμμα anschließt, dessen Beweis HULTSCH in der Abhandlung *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά* nach der Münchener Handschrift CCCI hatte wiedergeben können, und das für ihn überhaupt den ersten Anstoß zu allen diesen Nachforschungen gebildet hatte.

Schon in der Vorrede zum zweiten Bande von PAPPUS war HULTSCH in der Lage gewesen, über neue Handschriften zu THEODOSIUS und AUTOLYKUS zu berichten, die er 1876 in der Vatikanischen Bibliothek aufgefunden hatte. Es war der Vaticanus graecus 191, der ihm eine unerwartet reiche Ausbeute dargeboten hatte. Außer der von PAPPUS zitierten Schrift des AUTOLYKUS *περὶ κινουμένης σφαίρας* und dem Buche des THEODOSIUS *περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν* enthält nämlich dieser Sammel-

kodex von Autolykus noch zwei Bücher *περὶ ἐπιτολῶν καὶ δύσεων*, ferner von Theodosius, außer dem einen von Pappus zitierten Buche *περὶ ἡμερῶν καὶ νυκτῶν*, ein zweites unter demselben Titel, endlich von demselben eine kleine Schrift *περὶ οἰκήσεων*, d. i. eine Darstellung, wie für jeden Bewohner der Erde, vom Äquator bis zum Pole, der gestirnte Himmel im Laufe eines Jahres sich darstellt.

Von diesen Schriften sind nun die des Autolykus von Hultsch noch vollständig herausgegeben worden. Die Herausgabe der Schriften des Theodosius war geplant, hat aber nicht mehr ausgeführt werden können.[1]) Die Ausgabe des Autolykus[2]) erschien 1885 in der Bibliotheca Teubneriana unter dem Titel *Autolyci De sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri duo, una cum scholiis antiquis e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Friedericus Hultsch.* In der Vorrede (p. V—XXIII) beschäftigt sich Hultsch zunächst mit der Frage, wann Autolykus gelebt hat. Dieser Untersuchung und namentlich der Aufgabe, „diejenigen Sätze der älteren Sphärik [im Gegensatze zu der jüngeren Sphärik des Theodosius] im einzelnen nachzuweisen, welche Autolykos, sei es unmittelbar, sei es mittelbar, benutzt hat", hat Hultsch eine besondere Abhandlung *Autolykos und Euklid* (1886) gewidmet, in der er im Anschluß an Nokk und Heiberg zu dem Resultate kam, daß die von Autolykus benutzte Sphärik älter gewesen ist als alle Werke Euklids. Autolykus war zwar noch ein Zeitgenosse von Euklid, seine ganze schriftstellerische Tätigkeit ist aber der des Euklid vorausgegangen, denn dieser fußt in seinen *Phaenomena* auf den Schriften des Autolykus über die rotierende Kugel und über Auf- und Untergänge der Fixsterne (Diels, Rhein. Mus. **31**, 1876, 46 f.).

In der Vorrede zur Autolykus-Ausgabe berichtet Hultsch sodann weiter über frühere Bearbeitungen und Veröffentlichungen von Schriften des Autolykus, wie sie G. Valla 1501, Maurolycus 1558, Konrad Rauchfuss (Dasypodius) 1572, Joseph Auria 1587 und in neuerer Zeit R. Hoche 1877 unternommen hatten. Daran schließt sich eine Besprechung der Handschriften, die der neuen Ausgabe zugrunde liegen, und dann folgt (p. XXIV—LXIV) eine Zusammenstellung der verschiedenen, darin vorkommenden Lesarten. Dem griechischen Texte (S. 1—159) ist eine lateinische Übersetzung gegenübergestellt; darunter stehen die Scholien und die Anmerkungen des Herausgebers. Nach einem kurzen Appendix zum Buche *De sphaera quae movetur* folgen sodann die Scholien von Auria (S. 164—185),

1) Kollationen von Handschriften des Theodosius hat Hultsch hinterlassen — so schreibt mir Herr Prof. Poland.

2) Siehe die Besprechung von H. Menge in Fleckeisens Jahrbüchern 1886, 179—184, und von Cantor in Zeitschr. f. Math. u. Phys. **31**, 1886; hist.-lit. Abt. 152—154.

und dann kommt der bei HULTSCH niemals fehlende und stets mit liebevoller Sorgfalt bearbeitete Index (S. 186—231). „Es ist wohl der Mühe wert,“ sagt er in der ausführlich besprochenen Leipziger Abhandlung von 1885, „den Nachlaß unseres ältesten Mathematikers auch in dieser Hinsicht sorgsam auszustatten und ein möglichst vollständiges Bild seines Wortvorrates und seines Sprachgebrauches zu geben.“ —

Ich bin zu Ende — oder vielmehr: ich muß schließen. Denn wieviele Arbeiten von HULTSCH, philologische, metrologische, mathematisch-historische, die unsere Kenntnis von der Vergangenheit und unsere Einsicht in die Entwickelung der Wissenschaft mächtig gefördert haben, müßten noch ausführlicher behandelt werden, wollten wir alles, was die wahrhaft bewundernswerte Arbeitsenergie dieses Mannes geschaffen hat, in vollem Umfange würdigen! Unwillkürlich stellen sich mir die Worte ein: „Er hat sein Pfund nicht vergraben, sondern damit gewuchert. Er hat gearbeitet wie wenige, und Arbeit verdient immer Hochachtung. Gewirkt aber hat er wie noch wenigere, und da er auch für uns gewirkt hat, verdient er vor vielen unseren Dank.“

Verzeichnis der Publikationen von Friedrich Hultsch in chronologischer Folge.

Die eigenen Arbeiten von HULTSCH sind, wie ich hoffe, vollständig verzeichnet. Dagegen wäre es schon des Raumes wegen nicht möglich gewesen, auch alle die zahlreichen Besprechungen aufzunehmen. Die hier genannten dürften aber wohl die wichtigeren sein und überdies die, die HULTSCH selbst wiederholt zitiert. Für Vervollständigung und Korrektur des Verzeichnisses bin ich Herrn Prof. POLAND zu großem Danke verpflichtet.

1857.

1. *Emendationen zu POLYBIOS.* Jahrb. f. Phil. (= Jahrbücher für klassische Philologie, herausgeg. v. A. FLECKEISEN) 1857, 832—834.

1858.

2. *Emendationen zu POLYBIOS.* Jahrb. f. Phil. 1858, 813—819.

1859.

3. *Quaestiones Polybianae.* Jahresbericht des Gymnasiums zu Zwickau 1858/59, 1—25.

1862.

4. *Griechische und römische Metrologie.* Berlin 1862. [XII u. 328 S.]

5. *De Damareteo argenteo Syracusanorum nummo.* Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden 1861/62, 1—36.

6. [Besprechung von *TH. MOMMSEN, Geschichte des römischen Münzwesens.* Berlin 1860.] Jahrb. f. Phil. 1862, 556—568.

7. *Über das babylonische und euboische Talent des HERODOTOS.* Jahrb. f. Phil. 1862, 387—394.

1863.

8. *Zur Lösung der Frage über den Philetärischen Fuß.* Jahrb. f. Phil. 1863, 162—170.

9. *Die staatsmännische Wirksamkeit des Demosthenes.* Jahrb. f. Phil. 1863 II, 149—163.

10. [Besprechung von *G. Friedlein, Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern.* Erlangen 1861.] Jahrb. f. Phil. 1863, 422—425.

1864.

11. *Heronis Alexandrini geometricorum et stereometricorum reliquiae. Accedunt Didymi Alexandrini mensurae marmorum et Anonymi variae collectiones ex Herone, Euclide, Gemino, Proclo, Anatolio, aliisque. E libris manu scriptis edidit Fridericus Hultsch.* Berlin 1864 [XXIV u. 334 S.]

12. *Der Heronische Lehrsatz über die Fläche des Dreieckes als Funktion der drei Seiten.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. 9, 1864, 225—249.

13. *Metrologicorum scriptorum reliquiae. Collegit recensuit partim nunc primum edidit Fridericus Hultsch. Vol. I quo scriptores graeci continentur.* Leipzig 1864. [XXIV u. 356 S.]

14. [Besprechung von *G. Curtius, Griechische Schulgrammatik.* 6. Aufl. Prag 1864.] Jahrb. f. Phil. 1864, 433—448.

15. *Zu Proklos.* Rheinisches Museum f. Philologie 19, 1864, 450—455.

16. [*Programme aus dem Königreich Sachsen 1863.*] Jahrb. f. Phil. 1864 II, 572—580.

1865.

17. *Zur Sentenzenliteratur.* Jahrb. f. Phil. 1865, 431—432

1866.

18. *Metrologicorum scriptorum reliquiae. Collegit recensuit partim nunc primum edidit Fridericus Hultsch. Vol. II quo scriptores romani et indices continentur.* Leipzig 1866. [XXXII u. 264 S.]

19. [Besprechung von *G. Curtius, Griechische Schulgrammatik.* 7. Aufl. Prag 1866.] Jahrb. f. Phil. 1866, 127—130.

1867.

20. *Censorini de die natali liber. Recensuit Fridericus Hultsch.* Leipzig 1867. [XIV u. 98 S.]

21. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. I: Lib. I—III. Berlin 1867. [318 S.]

22. [Besprechung von *Polybii historia ed. L. Dindorf.*] Jahrb. f. Phil. 1867, 289—317.

23. [Dasselbe.] Liter. Centralblatt 1867, 329—330

24. [Besprechung von *J. Brandis, Das Münz-, Maß- und Gewichtswesen in Vorderasien bis auf Alexander den Großen.* Berlin 1866.] Jahrb. f. Phil. 1867, 513—538.

25. [Dasselbe.] Liter. Centralblatt 1867, 497—499.

26. *Zu Suidas.* Jahrb. f. Phil. 1867, 335—336.

27. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1867, 564—566, 624, 676.

28. [Erwiderung auf den Vortrag von Th. Bergk über den Dreifuß des Gelon und die Münzen der Damarete, gehalten an der Philologen-Versammlung zu Halle 1867.] Verhandl. d. 25. Versamml. deutscher Philol. u. Schulmänner in Halle 1867, 37—41.

1868.

29. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1868, 392.

30. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. II: Lib. IV, V. Reliquiae lib. VI—VIII. Berlin 1868. [IV S. u. S. 319—664.]

31. [Besprechung von *G Friedlein, Die Geometrie des Pediasimus.* Ansbach 1866.] Jahrb. f. Phil. 1868, 55—58.

32. [Besprechung von *Nicomachi introductio arithmetica ed. R. Hoche.* Leipzig 1866.] Jahrb. f. Phil. 1868, 762—770.

1869.

33. *Quaestiones Polybianae, pars II.* Programm des Gymnasiums zum heiligen Kreuz in Dresden 1868/69, 1—21.

34. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1869, 456.

1870.

35. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. III: Reliquiae lib. IX—XIX. Berlin 1870. [IV S. u. S. 665—1024.]

36. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1870, 728, 735—736.

37. *Zu Galenos.* Jahrb. f. Phil. 1870, 744.

1871.

38. *Zu Galenos.* Jahrb. f. Phil. 1871, 35—36.

39. *Zu Hesychios.* Jahrb. f. Phil. 1871, 36.

1872.

40. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. IV: Reliquiae lib. XX—XXXIV. Indices. Berlin 1872. [S. 1025—1402 u. 86 S.]

41. *Über das System der ägyptischen Hohlmaße.* Zeitschrift für ägyptische Sprache und Altertumskunde **10**, 1872, 122—124.

42. Artikel *Gromatici* in der Allgem. Encyklopädie von Ersch und Gruber **92**, 1872, 97—105.

1873.

43. *Zur griechischen Lexikographie.* Jahrb. f. Phil. 1873, 223—224.

44. *Zu Platons Timaeos.* Jahrb. f. Phil. 1873, 493—501.

1874.

45. [Besprechung von *G. Curtius, Griechische Schulgrammatik.* 10. Aufl. Prag 1873.] Jahrb. f. Phil. 1874, 7—18.

1875.

46. [Besprechung von *F. de Saulcy, Numismatique de la Terre Sainte.*] Jahrb. f. Phil. 1875, 841—844.

47. *Zu Sophokles Antigone.* Jahrb. f. Phil. 1875, 476.

48. *Bericht über das fünfundzwanzigjährige Jubiläum des Prof. Dr. Georg Curtius in Leipzig.* Jahrb. f. Phil. 1875 II, 257—269.

1876.

49. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. I. Insunt lib. II, III, IV, V reliquiae.* Berlin 1876 [XXIV S. u. S. 1—472]

50. [Besprechung von *M. Cantor, Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmeßkunst* Leipzig 1875.] Jahrb. f Phil. 1876, 759—768

51. *Die Bruchzeichen bei Vitruvius.* Jahrb. f. Phil. 1876, 251—261.

1877.

52. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. II. Insunt lib. VI et VII reliquiae.* Berlin 1877. [VIII S. u. S. 473—1020.]

53. *De Heronis mechanicorum reliquiis in Pappi collectione servatis.* Commentationes philologae in honorem Theodori Mommseni. Berlin 1877. S. 114—123.

54. *Über den Himmelsglobus des Archimedes.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **22**, 1877; hist.-lit. Abt. 106—107.

55. *Zu Kleomedes.* Jahrb. f. Phil. **1877**, 840.

1878.

56. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Vol. III tom. I. Insunt libri VIII reliquiae. Supplementa in Pappi collectionem.* Berlin 1878. [XXII S. u. S. 1021—1288.] *Vol. III tom. II. Insunt Index graecitatis. Scripturae compendiorum conspectus. Index rerum ad mathematicam disciplinam spectantium. Conspectus auctorum.* Berlin 1878. [IV S. u. S. 1—144.]

1879.

57. *Zur Terminologie der griechischen Mathematiker.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **24**, 1879; hist.-lit. Abt. 41—42.

58. *Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Vol. I—III, Berlin 1876—1878. [Selbstanzeige des Verfassers.] Repertorium von L. Königsberger und G. Zeuner **2**, 1879, 320—335.

59. *Pappi Alexandrini* . . . 1878. [Dasselbe. Selbstanzeige des Verfassers.] Traduzione dal tedesco del Dr. A. Sparagna. Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche pubblicato da B. Boncompagni **12**, 1879, 333—344.

60. [Besprechung von *Opusculum de multiplicatione et divisione sexagesimalibus Diophanto vel Pappo attribuendum primum edidit et notis illustravit C. Henry.* Halle 1879.] Zeitschr. f. Math. u. Phys. **24**, 1879; hist.-lit. Abt. 199—203.

61. [Besprechung von *J. L. Heiberg, Quaestiones Archimedeae.* Hauniae 1879.] Liter. Centralblatt 1879, 1122—1124.

1880.

62. *Das Grundmaß der griechischen Tempelbauten.* Archäol. Zeitung **38**, 1880, 91—98.

63. *Der Denar Diokletians.* Jahrb. f. Phil. 1880, 27—31.

64. *Zu Varro de re rustica.* Jahrb. f Phil 1880, 263—264.

65. *Zu dem Fragmentum Censorino adscriptum.* Jahrb. f. Phil. 1880, 288.

1881.

66. *Bestimmung des attischen Fußes nach dem Parthenon und Theseion.* Archäol. Zeitung **38**, 1881, 172—176.

67. *Heraion und Artemision, zwei Tempelbauten Ioniens.* Ein Vortrag. Berlin 1881. [52 S.]

68. *Die Maße des Heraion zu Samos und einiger anderen Tempel.* Archäol. Zeitung **39**, 1881, 97—128.

69. [Besprechung von *M. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik I.* Leipzig 1880.] Jahrb. f. Phil. 1881, 569—592.

1882.

70. *Griechische und römische Metrologie.* Zweite Bearbeitung. Berlin 1882. [XIV u. 746 S.]

71. *Die geometrische Zahl in Platons VIII. Buche vom Staate.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **27**, 1882; hist.-lit. Abt. 41—60.

1883.

72. *Λήμματα εἰς τὰ σφαιρικά. Reste einer verloren geglaubten Schrift.* Jahrb. f. Phil. 1883, 415—420.

73. *Zu Horatius.* Jahrb. f. Phil. 1883, 612—614.

1884.

74. *Zur Erinnerung an Dr. Christian Ernst August Gröbel, Rektor der Kreuzschule.* Gedächtnisrede in der Aula der Kreuzschule gehalten am 28. Januar 1884. Dresden 1884. [31 S.]

75. *Ein antiker Maßstab.* Archäol. Zeitung **42**, 1884, 191—198.

76. *Zu der Sphärik des Theodosios.* Jahrb. f. Phil. 1884, 366—368.

77. *Adverbialer Gebrauch von ἀνά.* Jahrb. f. Phil. 1884, 741—742.

78. *Der absolute Genitiv des Infinitivs.* Jahrb. f. Phil. 1884, 742—744.

79. [Besprechung von *Archimedis περὶ ὀχουμένων liber I graece restituit J. L. Heiberg.* Paris 1884.] Liter. Centralblatt 1884, 856—857.

80. Besprechung von *Th. H. Martin,* 1) *Mémoire sur l'histoire des hypothèses astronomiques chez les Grecs et les Romains;* 2) *Mémoire sur les hypothèses astronomiques d'Eudoxe, de Callipe et d'Aristote et de leur école.* Paris 1881.] Jahresbericht über die Fortschr. d. klass. Altertumswissensch., begründet von C. Bursian, **40**, 1884, 50a—50h.

1885.

81. *Autolyci de sphaera quae movetur liber, de ortibus et occasibus libri duo, una cum scholiis antiquis e libris manuscriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch.* Leipzig 1885. [LXIV u. 232 S.]

82. *Über die Sphärik des Theodosios und einige unedierte mathematische Texte.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **37**, 1885, 167—174.

83. [Besprechung von *J. Gow, A short history of greek mathematics.* Cambridge 1884.] Berliner phil. Wochenschr. 1885, 568—570.

84. [Besprechung von *Euclidis elementa. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg.* Vol. IV. Leipzig 1885.] Berliner phil. Wochenschr. 1885, 1452—1455.

1886.

85. *Über eine Sammlung von Scholien zur Sphärik des Theodosios.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **38**, 1886, 119—128.

86. *Autolykos und Euklid.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **38**, 1886, 128—155.

87. *De numero Platonis a Proclo enarrato disputatio.* In: *Procli commentariorum in rempublicam Platonis partes ineditae ed. R. Schoell,* Berlin 1886, S. 140—148.

1887.

88. *Scholien zur Sphärik des Theodosios.* Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **10**, 1887, 381—446.

89. *Zu Laertios Diogenes.* Jahrb. f. Phil. 1887, 223—225.

90. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1887, 763—766.

91. [Besprechung von *G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid.* Hermathena VI, Dublin 1886.] Berliner phil. Wochenschr. 1887, 246—247.

1888.

92. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. I: Lib. I—III. 2. Aufl. Berlin 1888. [LXXIII u. 339 S.]

93. [Besprechung von *W. Ridgeway, Metrological notes.* London 1888.] Liter. Centralblatt 1888, 1554—1555.

1889.

94. *Ein Beitrag zur Kenntnis des volkstümlichen Rechnens bei den Römern.* Jahrb. f. Phil. 1889, 335—343.

95. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1889, 741—744.

96 [Besprechung von *G. J. Allman, Greek geometry from Thales to Euclid.* Dublin 1889.] Biblioth. Mathem. 3_2, 1889, 85—92.

97. [Besprechung von *Censorini de die natali liber rec. J. Cholodniak.* Petersburg 1889.] Berliner phil. Wochenschr. 1890, 1651—1656.

1890.

98. *Coniectanea in Polybium.* Commentationes Fleckeisenianae, Leipzig 1890, S. 81—92.

1891.

99. *Das Pheidonische Maßsystem nach Aristoteles.* Jahrb. f. Phil. 1891, 262—264.

100. *Zu Polybios.* Jahrb. f. Phil. 1891, 419—420.

101. [Besprechung von *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg.* Vol. I. Leipzig 1891.] Berliner phil. Wochenschr. 1891, 774—778.

102. [Besprechung von *G. Wertheim, Die Arithmetik und die Schrift über Polygonalzahlen des Diophantus von Alexandria.* Übersetzt und mit Anmerkungen begleitet. Leipzig 1890.] Berliner phil. Wochenschr. 1891, 587—590.

1892.

103. *Polybii historiae. Edidit Fridericus Hultsch.* Vol. II: Lib. IV, V. Reliquiae lib. VI—VIII. 2 Aufl. Berlin 1892. [XVI u. 368 S.]

104. [Besprechung von *J. Adam, The nuptial number of Plato: its solution and significance.* London 1891.] Berliner phil. Wochenschr. 1892, 1256—1258.

105. *Metrologischer Exkurs zu einer thebanischen Inschrift.* Jahrb. f. Phil. 1892, 23—28.

1893.

106. *Die erzählenden Zeitformen bei Polybios. Ein Beitrag zur Syntax der gemeingriechischen Sprache.* I. 1891; II 1892. Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **13**, 1893, 1—210, 347—468.

107. *Die Näherungswerte irrationaler Quadratwurzeln bei Archimedes.* Nachrichten v. d. Gesellsch. d. Wissensch. u. d. Georg-Augusts-Universität zu Göttingen 1893, 367—428.

108. *Zur Syntaxis des Ptolemaios.* Jahrb. f. Phil 1893, 748—752.

1894.

109. [Besprechung von *PHILONIS mechanicae syntaxis libri IV et V. Rec. R. SCHOENE.* Berlin 1893.] Liter. Centralblatt 1894, 214—216.

110. [Besprechung von *TH. MOMMSEN, Der Maximaltarif des DIOKLETIAN. Erläutert von H. BLÜMNER.* Berlin 1893.] Liter. Centralblatt 1894, 220—222.

111. *Zu dem Komiker KRATES.* Jahrb. f. Phil. 1894, 165—178.

112. *Zur Kreismessung des ARCHIMEDES.* Zeitschr. f. Math. u. Phys. **39**, 1894; hist.-lit. Abt. 121—137, 161—172.

113. *Die erzählenden Zeitformen bei POLYBIOS. Ein Beitrag zur Syntax der gemeingriechischen Sprache.* III. 1893. Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **14**, 1894, 1—100.

114. [Besprechung von *M. CANTOR, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* I. 2. Aufl. Leipzig 1894.] Liter. Centralblatt 1894, 553—555.

115. *Das elfte Problem des mathematischen Papyrus von Akhmim.* Historische Untersuchungen. ERNST FÖRSTEMANN zum fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet von der Historischen Gesellschaft zu Dresden, Leipzig 1894, S. 39—56.

116. [Besprechung von *J. BAILLET, Le papyrus mathématique d'Akhmim.* Paris 1892.] Berliner phil. Wochenschr. 1894, 1327—1331.

117. [Besprechung von *DIOPHANTI Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY.* Vol. I. Leipzig 1893.] Berliner phil. Wochenschr. 1894, 801—807.

1895.

118. *Drei Hohlmaße der römischen Provinz Ägypten.* Jahrb. f. Phil. 1895, 81—92.

119. *Die Elemente der ägyptischen Teilungsrechnung.* Erste Abhandlung. Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **17**, 1895, 1—192.

120. *Erläuterungen zu dem Berichte des JAMBLICHUS über die vollkommenen Zahlen.* Nachrichten d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen; Phil.-hist. Cl. 1895, Heft 3. [10 S. Nachtrag s. 1897.]

121. [Besprechung von *JAMBLICHI in NICOMACHI arithmeticam introductionem liber. Ed. H. PISTELLI.* Leipzig 1894.] Berliner phil. Wochenschr. 1895, 774—776.

122. [Besprechung von *E. PERNICE, Griechische Gewichte, gesammelt, beschrieben und erläutert.* Berlin 1894.] Liter. Centralblatt 1895, 261—264.

1896.

123. *Das astronomische System des HERAKLEIDES von Pontos.* Jahrb. f. Phil. 1896, 305—316.

124. [Besprechung von *DIOPHANTI Alexandrini opera omnia cum graecis commentariis. Edidit et latine interpretatus est P. TANNERY.* Vol. II. Leipzig 1895.] Berliner phil. Wochenschr. 1896, 613—617.

125 [Besprechung von Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Siebentes Heft (HEIBERG, CURTZE, RUDIO, HURWITZ, ENGEL). Leipzig 1895.] Berliner phil. Wochenschr. 1896, 718—721.

126. [Besprechung von *A. STURM, Das delische Problem.* Linz 1895.] Berliner phil. Wochenschr. 1896, 758—760.

1897.

127. *Ein Flüssigkeitsmaß der Provinz Hispanien und die Fassungsräume einiger antiken Dolien.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. **49**, 1897, 199—208.

128. *Zu Diophantos von Alexandreia.* Jahrb. f. Phil. 1897, 48.

129. *Eine Näherungsrechnung der alten Poliorketiker.* Jahrb. f. Phil. 1897, 49—54.

130. *Τετράμνων.* Jahrb. f. Phil. 1897, 174.

131. *Emendationen zu Domninos.* Jahrb. f. Phil. 1897, 507—511.

132. *Poseidonios über die Größe und Entfernung der Sonne.* Abhandl. d. Gesellsch. d. Wissensch. zu Göttingen; Phil.-hist. Cl. N. F. Bd. 1 Nr. 5. 1897. [48 S. Die beiden letzten Seiten sind dem Nachtrag über die neunte vollkommene Zahl gewidmet, s. *Erläuterungen etc.* 1895.]

133. [Besprechung von *Ch. Justice, Le „codex Schottanus" des extraits „de legationibus".* Gent 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 37—40.

134. [Besprechung von *Euclidis opera omnia. Ed. J. L. Heiberg et H. Menge. Vol. VI. Euclidis Data cum commentario Marini et scholiis antiquis ed. H. Menge.* Leipzig 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 673—681.

135. [Besprechung von *A. Sturm, Das delische Problem.* Fortsetzung. Linz 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 769—773.

136. [Besprechung von *F. Villicus, Die Geschichte der Rechenkunst vom Altertume bis zum XVIII. Jahrhundert.* 3. Aufl. Wien 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1897, 820—821.

1898.

137. *Die Gewichte des Altertums, nach ihrem Zusammenhange dargestellt.* Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. **18**, 1898. [XIV u. 205 S.]

138. [Besprechung von *A. Sturm, Das delische Problem.* Schluß. Linz 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 43.

139. [Anmerkung zu dem Artikel von *E. Hübner, Additamenta nova ad corporis vol. II.* Ephemeris epigraphica vol. VIII.] Ephemeris epigraphica vol. VIII, 1898, 481—484.

140. [Besprechung von *V. Mortet, La mesure des colonnes à la fin de l'époque romaine d'après un très-ancien formulaire.* Paris 1896.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 165—169.

141. [Besprechung von *Euklids Elementer I—II.* Oversat af Thyra Eibe. Med en Inledning af H. G. Zeuthen. Kopenhagen 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 833—836.

142. [Besprechung von *Damianos Schrift über Optik.* Mit Auszügen aus Geminos griechisch und deutsch herausg. v. R. Schöne. Berlin 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 1413—1417.

143. [Besprechung von *O. Birke, De particularum μή et οὐ usu Polybiano, Dionysiaco, Diodoreo, Straboniano.* Diss. inaug. Leipzig 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 1537—1541.

144. [Besprechung von *Le traité du quadrant de Maître Robert Anglès. Texte latin et ancienne traduction grecque publiés par P. Tannery.* Paris 1897.] Berliner phil. Wochenschr. 1898, 1619—1620.

145. [Besprechung von *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia.* Vol. I. *Syntaxis mathematica* ed. J. L. Heiberg. Pars 1 libros I—VI continens. Leipzig 1898.] Liter. Centralblatt 1898, 1899—1900.

1899.

146. *Winkelmessungen durch die Hipparchische Dioptra.* Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. 9, 1899, 191—209.

147. [Besprechung von Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik. Achtes Heft (Curtze, Rosenberger, Simon, Fr. Schmidt, Wertheim, W. Schmidt). Leipzig 1898.] Berliner phil. Wochenschr. 1899, 45—48.

148. [Besprechung von *Euclidis opera omnia.* Ed. J. L. Heiberg et H. Menge. Supplementum: *Anaritii in decem libros priores elementorum Euclidis commentarii* ed. M. Curtze. Leipzig 1899.] Berliner phil. Wochenschr. 1899, 1281—1286.

149. *Griechische und römische Gewichtsnormen.* Neue Jahrb. f. d. klass. Altertum, Geschichte u. deutsche Literatur 3, 1899, 186—194.

1900.

150. *Die Pythagoreischen Reihen der Seiten und Diagonalen von Quadraten und ihre Umbildung zu einer Doppelreihe ganzer Zahlen.* Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, 8—12.

151. *Hipparchos über die Größe und Entfernung der Sonne.* Berichte über d. Verhandl. d. sächs Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig; Phil.-hist. Cl. 52, 1900, 169—200.

152. [Besprechung von *A. Bouché-Leclercq, L'astrologie grecque.* Paris 1899.] Berliner phil. Wochenschr. 1900, 628—632.

1901.

153. *Die Messungen der Größe und Entfernung der Sonne im Altertum.* Das Weltall 1, 1900/1, 201—203, 218—221. Abdruck aus dem Dresdner Anzeiger, Montagsbeilage Nr. 26 vom 1. Juli 1901

154. *Neue Beiträge zur ägyptischen Teilungsrechnung.* Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, 177—184.

155. *Drei Exkurse.* In: *Procli Diadochi in Platonis rem publicam commentarii* ed. Guilelmus Kroll. Vol. II, Leipzig 1901, S. 384—413. I.: *Über das große Jahr des Sosigenes,* 384—392; II.: *Die geometrische Darstellung einer pythagoreischen Zahlenreihe,* 393—400; III.: *Die geometrische Zahl Platons,* 400—413.

156. *Zu Agrippa aus Bithynien.* Berliner phil. Wochenschr. 1901, 1468.

1902.

157. *Die Sehnentafeln der griechischen Astronomen.* Das Weltall 2, 1901/2, 49—55.

158. *Das hebräische Talent bei Josephos.* Beiträge zur alten Geschichte herausg. v. C. F. Lehmann. II. Bd., S. 70—72

1903.

159. *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte.* Abhandl. d. phil.-hist. Cl. d. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. 22, 1903. [60 S.]

160. *Die Maße und Gewichte des Berliner Papyrus 7094.* In: *C. Kalbfleisch, Papyri Graeci Musei Brit. et Mus. Berolinensis.* Lectionskatalog Rostock, Sommersemester 1902, S. 11—14.

161. *Beiträge zur ägyptischen Metrologie I. Beitr. z. ägypt. Metr. II. Die kleine ägyptische und die Solonisch-Ptolemäische Elle. Beitr. z. ägypt. Metr. III. Artabe und Choinix. Beitr. z. ägypt. Metr. IV. Der Medimnos von 48 Choiniken. Beitr. z. ägypt. Metr. V. Zwei Kotylen und ihre Teilmaße. Der römische Librarius Einteilung der Choinix.* Archiv für Papyrusforschung u verwandte Gebiete. 2, 1903, 87—93, 273—283, 283—293, 521—523, 523—528.

162. *Die Frauen und die Mathematik.* Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. **34**, 1903, 82—85. Aus dem Dresdner Anzeiger.

1904.

163. *Eudoxos von Knidos.* Das Weltall **4**, 1903/4, 208—214.

164. *Die Sexagesimalrechnungen in den Scholien zu Euklids Elementen.* Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, 225—233.

165. *Eine neu entdeckte karthagische Gewichtsform.* Berliner phil. Wochenschr. 1904, 1341—1342.

1905.

166. [Besprechung von *Polybii historiae. Editionem a Lud. Dindorfio curatam retractavit et instrumentum criticum addidit Theod. Büttner-Wobst.* Vol. IV, V. Leipzig 1904.] Berliner phil. Wochenschr. 1905, 1—5.

167. *Ein altkorinthisches Gewicht.* Journal international d'archéologie numismatique 1905, 5—6.

1906.

168. *Beiträge zur ägyptischen Metrologie VI. Verschiedene andere Hohlmaße. Beitr. z. ägypt. Metr. VII. Flüssigkeitsmaße. Beitr. z. ägypt. Metr. VIII. Das Oxyrhynchos-Fragment über Längen- und Flächenmaße. Rückblick.* Archiv f. Papyrusforschung u. verwandte Gebiete. **3**, 1906, 425—442

1908 (posthum).

169. *Die Gewichte und Werte der Ptolemäischen Münzen.* Zweite Bearbeitung der Schrift: *Die Ptolemäischen Münz- und Rechnungswerte.* In: *Die Münzen der Ptolemäer* von J. N. Svoronos, V. Bd. Athen 1908, Sp. 1—80.

---

170. *Schulnachrichten vom Rektor* in den Programmen des Gymnasiums zum heiligen Kreuz 1869—1889.

---

132 Beiträge zu Pauly-Wissowas Realencyklopädie.
Die Artikel ohne Längenangabe umfassen weniger als eine Spalte.

Band I (1894), 15 Artikel.

Abacus, Nr. 9, Rechenbrett (5 Sp.). *Acetabulum,* Nr. 1 3, drei Gefäße. *Achane Acnua. Actus,* Nr 5, ital. Längen- und Flächenmaß. *Addix. Akaina.* Ameristos. *Amma.* Ammon, Nr. 2, Geometer. *Amphora,* Nr. 2, Hohlmaß. Anatolius, Nr. 15, aus Alexandreia. Anthemius, Nr. 4, aus Tralleis.

Band II (1896), 11 Artikel.

Apollonios, Nr. 112, von Perge (10 Sp.). Apollonios, Nr. 113, von Athen, Mechaniker. Archimedes, Nr. 3, von Syrakus (32 Sp.). Aristarchos, Nr. 25, von Samos (2 Sp.). Aristotheros. *Arithmetica* (50 Sp.). *Artabe* (1 Sp.). *Arura,* Nr. 2, Ackerfeld. *Astronomie* (33 Sp.). Athenaios, Nr. 23, Verf. von *περὶ μηχανημάτων.* Autolykos, Nr. 9, von Pitane (2 Sp.).

Band III (1899), 15 Artikel.

Βῆμα, Nr. 2, Längenmaß (1 Sp.). Billaros. Bion, Nr. 11, von Abdera (1 Sp.). *Cadus. Candetum. Carmen de ponderibus. Castrensis modius. Centumpondium.* Charias, Nr. 11, Ingenieur. *Χήμη. Χοῖνιξ* (1 Sp.). *Chomer. Chorobates* (1 Sp.). *Χοῦς. Circinus.*

Band IV (1901), 32 Artikel.

Clima. Cochlea, Nr. 1, Schraube zum Wasserheben (1 Sp.). *Cochlear*, Nr. 2, Maß. *Concha. Concula. Congius. Constratus pes. Cubitus. Δακτυλοδόχμη. Δάκτυλος*, Nr. 3, Längenmaß. Damarete, Nr. 1, Gemahlin des Gelon von Syrakus (1 Sp.). Damarete, Nr. 2, Tochter Hierons II. *Damareteion* (1 Sp.). Damianos, Nr. 3, *τοῦ Ἡλιοδώρου*, Verf. einer Optik (1 Sp.). *Danake* (1 Sp.). Dardanios. Dardanos, Nr. 14, schrieb über griechische Gewichte. *Dareikos* (2 Sp.). *Decemmodia corbula. Decunx. Decussis* (1 Sp.). Deinostratos, Nr. 2, Bruder des Menaichmos (2 Sp.). *Dekadrachmon. Δεκάλιτρον Ἰταλικόν. Δεκάλιτρος στατήρ. Δεκανουμμίον* (1 Sp.). Demetrios, Nr. 115, Verf. einer Schrift gegen die *ἀπορίαι* des Polyainos. Demetrios, Nr. 116, aus Alexandreia. Demetrios, Nr. 117, Sohn des Rathenos. Demetrios, Nr. 118, Mathematiker in d. ersten Hälfte des 3. Jahrh. n. Chr. Demetrios, Nr. 119, Arzt. Demetrios, Nr. 120, Verf. v. *περὶ τῶν κατ' Αἴγυπτον*.

Band V (1905), 44 Artikel.

Demokleitos. *Denarios* (13 Sp.). *Deunx. Dextans. Diaulos*, Nr. 3, auch *δίαυλον*, Längenmaß. *Dichalkon. Διχάς. Διχοίνικον. Didrachmon* (3 Sp.). Didymos, Nr. 12. aus Alexandreia. *Digitus. Dikeration. Δικότυλον. Dilitron. Dimidia sextula, Δίμνουν. Diobolon.* Diodoros, Nr. 53, aus Alexandreia, Zeitgenosse von Cicero, (3 Sp.). Diodoros, Nr. 54, Metrolog des 4.—5. Jahrh. Diodoros, Nr. 55, in d. zweiten Hälfte des 3. Jahrh. v. Chr. Diokles, Nr. 55, wahrscheinlich im 1. Jahrh. v. Chr. (1 Sp.). Dion, Nr. 23, von Neapolis. Dionysios, Nr. 143, Astronom in Alexandreia. Dionysios, Nr. 144, Astronom, Zeitgenosse Hipparchs. Dionysios, Nr. 145, Zeitgenosse des Eratosthenes. Dionysios, Nr. 146, in Herons *Defin.* als *λαμπρότατε* angeredet. Dionysios, Nr. 147, in Diophants *Arithmetik* als *τιμιώτατέ μοι* angeredet. Dionysodoros, Nr. 19, Mathematiker aus Amisene. Dionysodoros, Nr. 20, Geometer aus Melos. Dionysodoros, Nr. 21, aus Kaunos. Diophantos, Nr. 18, aus Alexandreia (21 Sp.). *Dioptra* (6 Sp.). Dioskurides, Nr. 13, gemeint ist Nr. 12, der Arzt. *Δίπτυον. Δοχμή. Dodekadrachmon. Dodrans. Δόλιχος*, Nr. 5, Längenmaß. Domninos, Nr. 4, aus Larisa (4 Sp.). *Δῶρον.* Dositheos, Nr. 9, aus Pelusion (1 Sp.). *Drachme* (21 Sp.). *Drusianus pes* (1 Sp.). *Dupondius* (2 Sp.).

Band VI_1 (1907), 3 Artikel (posthum).

Eudoxos, Nr. 8, von Knidos (20 Sp.). Eukleides, Nr. 7, „der Mathematiker" (49 Sp.). Eutokios.

Supplement I (1903), 7 Artikel.

Adrastos, Nr. 9, aus Kyzikos. Agesistratos, Nr. 4, Schüler des Mechanikers Apollonios, Nr. 113. Aischylos, Nr. 16, Schüler des Hippokrates von Chios. Aristotheros. *Artabe* (1 Sp.). *As* (3 Sp.). Athenaios, Nr. 23 (1 Sp. Umarbeitung des Artikels in Bd. II).

Für später erscheinende Bände hat Hultsch noch die folgenden 5, bereits im Satz befindlichen Artikel redigiert:

Exagium. Geometria (9 Sp.). *Gnomon* (2 Sp.). *Γράμμα. Γύη.*

Sul corso di storia delle matematiche fatto nella università di Napoli nel biennio 1905/06—1906/07.

Di F. Amodeo a Napoli.

Ebbi or sono quasi due anni l'onore di annunziare in questa rivista il programma di storia che io mi proponeva di svolgere nei due anni accademici 1905/06, 1906/07.[1]) Ora che i due anni sono trascorsi mi permetto di render conto qui del corso fatto.

Cominciai le mie lezioni con un discorso inaugurale[2]), col quale mi proposi di mostrare ai miei uditori, con un esempio tratto dalla storia delle sezioni coniche, che le ricerche storiche sono sempre alla portata di chiunque imprenda il lavoro con coscienza e scrupolo, e ciò feci allo scopo di incoraggiare i volenterosi a dedicarsi a questi importanti ed attraenti studi, e a far notare a tutti quelli che s'interessano alle matematiche come con lo studio delle opere classiche la mente è sempre indotta a nuove ricerche, anche quando queste opere riguardano teorie, che hanno l'apparenza di essere inadatte definitivamente ad un ulteriore sviluppo.

Misi come condizione fondamentale delle considerazioni storiche l'esistenza e l'esame dei documenti.

In tre lezioni percorsi rapidamente la storia delle matematiche presso i Cinesi, presso gli Egiziani e presso i Babilonesi e gli Assiri, e con una quarta lezione mostrai quale fosse la logistica dei Greci.

Due lezioni impiegai su Talete e la scuola Jonica; tre lezioni su Pitagora e la scuola pitagorica; due lezioni sulle altre scuole di Elea, di Atene, atomistica, sui sofisti, sulla scuola di Chio, e sui Pitagorei e Pitagoristi fino ad Archita.

Una lezione feci su Platone, sulle sue opere, sui suoi contemporanei e successori.

1) Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, p. 387—393.

2) *I trattati delle Sezioni coniche da Apollonio a Simson;* Atti del r. Istituto tecnico di Napoli 1906, p. 19—69.

Un'altra su Aristotile e sulle sue opere. Una lezione sulla scuola di Cizico e sulla invenzione delle Coniche.

E pervenni cosi in breve alla scuola di Alessandria.

Trattai a lungo di Euclide; impiegai su questo nome, e sull' esame delle sue opere cinque lezioni; tre delle quali furono necessarie per far conoscere il contenuto dei 13 libri degli Elementi, e due altre per esporre i Dati sull' edizione di Peyrard, la Divisione delle figure in base alle pubblicazioni di Woepcke e le altre opere pervenute a noi e per dare un cenno delle opere perdute e delle divinazioni fattene, e per mostrare l'influenza di esse sulla creazione della moderna Geometria.

Una lezione impiegai sui successori di Euclide fino ad Eratostene da Cirene, e sul problema di Delo e passai dopo ad Archimede.

Sei lezioni impiegai su Archimede. Nelle prime due lezioni esposi ordinatamente il primo libro dell' Equilibrio dei piani e dei loro centri di gravità e mostrai come egli dedusse la quadratura della parabola; poi esposi il secondo libro dell' Equilibrio dei piani, mostrando come ricavava il centro di gravità del segmento parabolico ad una e a due basi. Nella terza lezione esposi il trattato della sfera e del cilindro e quello della Misura del cerchio. Nella quarta esposi il trattato delle spirali, facendo notare le numerose proprietà che egli pervenne a trovare senz' altro sussidio che il potentissimo ingegno suo, e cominciai l'esposizione del trattato dei conoidi e sferoidi. Nella quinta continuai l'esame di questo trattato ed esposi l'Arenario. Nella sesta esposi il trattato dei Corpi galleggianti, i Lemmi e dissi delle altre opere non pervenuteci ed esposi il problema dei buoi del Sole.

Subito dopo entrai a parlare di Apollonio. Nella prima lezione su questo argomento parlai dell' uomo e delle vicende del suo Trattato sulle sezioni coniche, e dei commenti e delle successive edizioni fino a' tempi moderni. Nella seconda lezione esposi il 1°, 2° e 3° libro del trattato suddetto; nella terza esposi il 4° e 5° libro; nella quarta esposi il 6° e 7° libro e detti notizie delle divinazioni tentate del 5° e 6° e 7° da Maurolico e da Viviani, della scoperta fattane da Borelli e della divinazione dell' 8° libro tentata da Halley. In seguito riassunsi in breve le altre opere di Apollonio.

In poche lezioni mi sbrigai di Nicomede, Diocle, Perseo, Zenodoro Ipsicle da Alessandria, d'Ipparco, di Erone da Alessandria, di Filone da Gadara, di Gemino da Rodi, di Teodosio, di Dionisidoro da Emeso, e pervenni alla seconda scuola di Alessandria, trattando in ispecie di Menelao da Alessandria e della sua Sferica, di Nicomaco da Gerasa e della sua Aritmetica e di Teone da Smirne.

Una lezione intera impiegai su Claudio Tolomeo e sull' esposizione dell' Almagesto e delle altre sue opere. Ed in un' altra lezione mi occupai di Sesto Giulio Africano, di Sereno di Antinoupoli e dell' esame delle Sezioni del cilindro e del cono, rilevando dall' opera le ragioni che lo fanno ritenere anteriore o contemporaneo a Pappo.

Dopo passai a parlare di Pappo. Due lezioni intere impiegai ad esporre il contenuto della sua preziosa Collezione matematica. Nella prima esposi il frammento del 2° libro e i libri 3°, 4°, 5° e 6°; nella seconda esposi il contenuto del libro 7°, facendo rilevare la sua straordinaria importanza per le notizie del luogo risoluto, per i teoremi delle n rette mobili, per il problema di tre o più rette, pel problema del triangolo inscritto nel cerchio, che ha dato luogo al problema di Giordano[1]), pei lemmi sui luoghi piani e sui porismi, pel birapporto, per i teoremi del quadrangolo, dell' esagono e dei luoghi superficiali, e feci rilevare la poca originalità del contenuto del libro VIII.

Due lezioni impiegai in seguito su Diofanto e sull' esposizione dei 6 libri superstiti della sua Aritmetica, e sui numeri poligonali.

Ben più a lungo avrei voluto fermarmi su quest' opera interessante e sull' esame dei metodi impiegati per risolvere i suoi problemi sulle equazioni indeterminate di 1° e di 2° grado e sulle equazioni doppie, ma il tempo stringeva.

Rapidamente in poche lezioni passai a rassegna i Neoplatonici; i Matematici Greci della decadenza Patrizio, Teone, Ipazia, Sinesio; il risveglio della scuola di Atene; la scuola Bizantina; e dopo entrai a parlare dei Matematici Romani. Notai lo stato del calendario romano da Romolo a Giulio Cesare; passai rapidamente a rassegna Pollio, Trasillo, Seneca, Mela, Plinio, Columella; gli agrimensori Frontino, Balbo, Igino, Nipsus, Epafrodito, ecc. Parlai di Boezio e delle sue opere sull' aritmetica e la geometria, e di Cassiodoro. Dopo passai ad Isidoro da Siviglia, alle scuole cattedrali e conventuali, e in poco tempo tratteggiai Beda, Carlo Magno, Alcuino, Gerberto, Bernelino.

A questo punto credetti di tornare indietro e mostrare quali progressi avevano fatto le matematiche presso gl' Indiani e gli Arabi.

Una lezione impiegai a parlare di *Culvasûtra*, di Âryabhatta, di Brahmagupta e a tratteggiare l'entrata in iscena del popolo arabo per la conquista della scienza con le loro traduzioni. In un' altra lezione parlai dei matematici arabi di oriente Alchwarizmi, Thabit ibn Kurrah, Al Battâni, Abû'l Wafâ, Alhazen, Alkarchi, Alkaijami. Indi parlai

1) Alludo alla famosa estensione data per un poligono inscritto da Annibale Giordano da Ottajano.

dell' indiano Bhâscara. Poi parlai degli arabi di occidente Geber, Arzachel e dei matematici che pervennero ad assorbirne la coltura, Adelardo di Bath, Abramo ibn Ezra, Plato da Tivoli, Giovanni di Luna e Gherardo Cremonese; e chiusi il corso col riprendere il movimento scientifico presso i Cinesi dal regno di Lieou-pang fino al X secolo e dello sviluppo che si ebbe sotto il conquistatore tartaro Gengis-kan.

* * *

Nel secondo anno cominciai le lezioni col riepilogare in una conferenza sola tutto ciò che qui sopra ho accennato[1]), perchè gli studenti che assistevano alle nuove lezioni non erano più i medesimi del corso precedente, fatta eccezione di due soltanto, che vollero continuare a udire le lezioni anche nel nuovo corso. Poi in una lezione mostrai lo stato politico dell' Italia alla fine del XII secolo ed al principio del XIII, riepilogai l'origine dei conventi, delle scuole cattedrali e delle Università, e cominciai a parlare di Leonardo Fibonacci da Pisa. In un' altra lezione esposi il contenuto del *Liber Abbaci;* in una terza lezione m' intrattenni della *Pratica geometrica* e delle altre opere di Leonardo. Una lezione impiegai su Jordanus Nemorarius; con un' altra lezione mi sbrigai di John of Holywood, di Vincent de Beauvais e di altri professori di Parigi, di Robert Anglès, di Albertus Magnus, di Roger Baco e di Johann Peckham; e in un' altra lezione parlai di Witelo, di Giovanni Campano da Novara, di Bartolomeo da Parma e detti un cenno delle invenzioni del XIII secolo, degli astronomi e matematici arabi e cinesi ed accennai al viaggio di Marco Polo e all' enciclopedia di Brunetto Latini.

Passando a parlare del XIV secolo feci notare come in esso continua l'assimilazione araba e lo sviluppo che in questo secolo prendono le università e la coltura tedesca. In una lezione m' intrattenni dei Matematici Inglesi e delle loro contribuzioni alla trigonometria e mi fermai specialmente su Thomas di Bradwardin. In due altre lezioni mi occupai dei matematici francesi, mettendo in rilievo specialmente le opere di Nicole Oresme e i suoi concetti sulla rappresentazione delle curve e sugli esponenti frazionarii e mi sbrigai dei Matematici Tedeschi. Due lezioni impiegai sui Matematici Italiani, fermandomi specialmente sul calabrese Bernardo Barlaam, su Paolo Dagomari, su Biagio Pelicani, su Cecco d'Ascoli, su Andalo del Negro e Dante Alighieri. In un' altra lezione mi occupai degli scrittori bizantini Pediasimus, Planude, Rhabda, Argyrius, Moscopulo.

---

1) Un estratto di questa conferenza è stato pubblicato nel Giornale di matematiche (45, 1907, p. 73—81) col titolo: *Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nell' evo antico.*

Passando al secolo XV feci notare la passione che in questo secolo si ebbe per la ricerca dei manoscritti, eccitata dall'esempio datone da Francesco Petrarca e da Giovanni Boccaccio; l'influenza che ebbe sul progresso delle scienze la presa di Costantinopoli, e l'invenzione della stampa; e cominciai a parlare dei Matematici Italiani, sui quali m'intrattenni quattro lezioni. Parlai specialmente di Prosdocimo dei Beldomandi e di Domenico Maria da Novara, di Leon Battista Alberti, di Pier dei Franceschi, di Leonardo da Vinci e dei suoi manoscritti, di Luca Paciuolo e delle sue opere, e terminai col fare un cenno dello Studio di Napoli.

Mi trattenni in seguito dei Matematici Tedeschi e in una lezione parlai di Johann von Gemunden, di Nicolaus von Cusa e del movimento della Terra da lui risvegliato, e di Georg von Peurbach; in un'altra parlai di Johann Müller ed esaminai l'opera sua *De triangulis omnimodis*; e in una terza m'intrattenni di Bernhard Walther, di Johann Werner e del suo trattatino delle coniche, ed arrivai fino ad Johann Widmann. Un rapido sguardo gettai ai Matematici Spagnuoli, Arabi e Persiani, e terminai lo studio del secolo col far notare i progressi che faceva la Francia e che rimasero sepolti con l'opera di Nicole Chuquet, *Le triparty en la science des nombres*, e l'interesse che prendeva l' editore francese Lefèvre alle opere straniere.

Nel parlare del secolo XVI mostrai l'epilogo che ebbero gli studi sul calendario giuliano con la riforma gregoriana e parlai di Luca Gaurico da Giffoni, di Marco da Benevento, di Ludovico Lilio calabrese.

Indi m' intrattenni per una lezione su Albrecht Dürer e sullo esame delle sue opere per far rilevare la sua contribuzione al progresso della prospettiva e all'uso della doppia proiezione ortogonale per la rappresentazione dei corpi, che lo fa essere precursore di Monge[1]), ed esposi i contributi che alla prospettiva furon portati in Italia fino ad Ignazio Danti. Un'altra lezione occupai ad esporre il progresso che fece il concetto del moto della Terra con l'opera di Nicolaus Koppernigh e con quelle di Rhäticus, e come diversamente fosse accolto questo concetto da Reinhold, Mästlin, Giov. Antonio Magini, e da Wilhelm IV von Hessen-Cassel.

Indi passai a parlare dello sviluppo che ebbe l' algebra in questo secolo e prima parlai in una lezione dell' inglese Robert Recorde, dei tedeschi H. Schreiber, Chr. Rudolff, A. Riese e Michael Stifel del

1) Si legga F. Amodeo, *Albrecht Dürer precursore di Monge;* Atti della r. acc. delle scienze di Napoli **13**$_2$, n. 16, 1907.

quale esposi il contenuto dell' *Arithmetica integra*; poi in un'altra lezione parlai della scoverta della risoluzione dell'equazione cubica. In un' altra lezione feci la storia della risoluzione dell'equazione cubica fatta da Del Ferro e della sfida fra Tartaglia e Fiore e fra Tartaglia e Ferrari. Una lezione impiegai a mostrare il contributo che Cardano apportò alla risoluzione dell' equazione cubica con la pubblicazione dell' *Ars magna* e feci una digressione fino ad Antonio de Monforte e Giacinto de Cristofaro napoletani. Un'altra lezione impiegai ad occuparmi della risoluzione dell'equazione di 4° grado fatta da Ferrari, della *Algebra* pubblicata da Rafael Bombelli e del caso irreduttibile, facendo una digressione fino a Vito Caravelli; e dopo passai ad occuparmi di proposito delle opere di Tartaglia.

Cinque lezioni impiegai ad illustrare i meriti di queste opere. Prima mi occupai della *Scienza nuova* e dei suoi tentativi sulle leggi del moto, della traduzione di Archimede, dei *Quesiti et inventioni diverse*, e della *Travagliata invenzione.* Poi del *General trattato dei numeri et misure* pel quale impiegai quattro lezioni, fermandomi specialmente sul famoso triangolo e sull' applicazione che egli ne faceva all' estrazione di radici di qualunque indice, sulla misura delle botti, e sulla risoluzione dei problemi geometrici con una sola apertura di compasso.

Una lezione impiegai per Giov. Battista Benedetti, Pedro Nuñez, Federico Commandino e Francesco Maurolico, del quale ultimo misi in evidenza il trattatino sulle coniche e le costruzioni che egli proponeva per queste curve. Indi passai a parlare delle scuola Francese ed Olandese, impiegando due lezioni per parlare di P. de la Ramée, di François Viète e di Adriaen van Roomen. Conchiusi la trattazione del secolo mostrando come questo si chiudesse con l' avvento dei gesuiti, dell' inquisizione e col martirio di Giordano Bruno.

Eravamo alla fine di Aprile quando incominciai a parlare del secolo XVII. Cominciai con Galileo Galilei e per lui impiegai quattro lezioni facendo rilevare quanti punti di contatto vi sono fra le opere di Tartaglia e quelle di Galilei, e l'incremento dato alle scienze col metodo sperimentale e con l'applicazione che Galilei fece del cannocchiale all'astronomia, e come gli scienziati rimanessero scossi e perturbati dalla fine infelice che Galilei dove' fare per opera dell' inquisizione.

Una lezione impiegai per John Napier e per la sua invenzione dei logaritmi, e per Henry Briggs, Gunter, Gellibrand, Bürgi. Dissi in un'altra lezione brevemente di Tycho Brahe ed entrai a parlare di Johann Kepler e mi dilungai a mostrare come egli pervenne alle celebri leggi astronomiche. In un'altra lezione considerai Kepler come geometra,

esaminando specialmente l'opera *Stereometria doliorum* e il merito suo all'inizio delle ricerche sugli infinitesimi.

Dopo cominciai a parlare di Bonaventura Cavalieri, sul quale m'intrattenni due lezioni, esaminando partitamente le sue opere e fermandomi specialmente sulla *Geometria indivisibilibus promota* sulle *Exercitationes geometricae sex* e sullo *Specchio ustorio*. In un'ultima lezione parlai di Bartolomeo Souvey e di Gregorio da S. Vincenzo e non ebbi tempo d'intrattenermi su quest'ultimo quanto era necessario di fare, nè di andare piu in là, perchè eravamo giunti alla fine dell'anno scolastico, che è stato abbreviato da ripetute chiusure dell' Università per tumulti e in ultimo da una sopraggiuntami indisposizione.

* * *

Qualche considerazione di ordine didattico mi sia lecito di fare ora, dopo due anni di esperimento. La folla dei giovani che accorre alle lezioni è formata più dei giovani dei primi anni della Facoltà matematica, che di quelli degli ultimi, e alle volte più di persone estranee all' università che di studenti universitarii. Ma quelle s' interessano più ad udire la parte biografica degli uomini di cui si parla e la dipintura generale dei tempi e le impressioni degli effetti delle ricerche, che la natura delle ricerche e l'esame della loro entità. Quelli che s' interessano all' esame delle opere sono i pochi assidui laureandi in matematiche che frequentano il corso e qualcuno del primo anno che desidera acquistare un titolo con l' esame.

Ma non tutti gli alunni del 3° anno del corso per la laurea di Matematica, per i quali il corso è stato indicato dalla Facoltà, ascoltano le lezioni di Storia delle matematiche, e la ragione è palese. Questi sono preoccupati degli esami di laurea, per i quali gli esami speciali obbligatorii nel 2° biennio sono in numero di cinque da scegliersi fra gl' insegnamenti che si danno nel 2° biennio, ma non è permesso ai giovani dal regolamento che essi possano includere in uno dei cinque esami speciali obbligatorii quello della Storia delle matematiche; nè per ora nel Seminario matematico, che alla Facoltà è annesso, è fatto merito di frequentare questo corso. Perciò gli studenti, seguendo la legge del minimo sforzo per raggiungere lo scopo finale, che è la laurea, non tutti credono utile spendere il loro tempo per questo insegnamento, supponendo forse che basterà sfogliare un piccolo manuale di Storia per sapere la Storia. Fanno eccezione alcuni pochi che hanno trovato nella Storia la soddisfazione di un loro gusto speciale, o che veggono in essa la possibilità di fare una tesi più conforme alla loro tendenza.

È da augurarsi che il Ministro della pubblica Istruzione, in Italia, intenda che lo studio della Storia delle Matematiche non fornisce soltanto

un lustro di conoscenze di date e di biografie, ma entra nello spirito stesso della Scienza, e analizza il perchè dell' evolversi delle invenzioni in un senso o nell' altro e rimette a luce idee feconde, che la lotta per la vita, o la non curanza degli uomini, ha impedito che si sviluppassero quando furono enunciate; e che porta sopratutto i cultori della scienza alla conoscenza della vera strada percorsa dallo spirito matematico dell' umanità, cosa questa che non si può dire ancora assodata, nè lo sarà per molti anni ancora, se non si pon mano a un lavoro sistematico e collettivo di indagini storiche.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen".
BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3: 12, 15, 22, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61. — **1^3: 33,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 307. — **1^3: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61—64. — **1^3: 163—165,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1^3: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64—65. — **1^3: 202,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 307—309. — **1^3: 203,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 65, 309. — **1^3: 213, 225, 236, 245, 270, 287, 297, 298, 310,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 65—66. — **1^3: 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 174—176. — **1^3: 351,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 66. — **1^3: 365, 368,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 177.

1^3: 372. Die Ausführungen, die mit den Worten: „Da ist nun ein sehr geistreicher Versuch" beginnen und erst S. 374 Z. 3 enden, beziehen sich nicht auf Heron, sondern auf Archimedes. Daß sie hier untergebracht worden sind, beruht wohl zunächst darauf, daß sie aus einem Artikel mit dem Titel *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln* entnommen sind. Vielleicht gibt es noch zwei Gründe dieses Verfahrens, nämlich eine Bemerkung von Eutokios und eine Vermutung von Wertheim, aber jene ist meines Erachtens von Herrn Cantor mißverstanden worden, und diese ist sicherlich unbegründet. Die Bemerkung von Eutokios enthält, wie Herr Cantor S. 318 richtig angibt, daß Heron in seinen *Metrika* gezeigt habe, wie man eine angenäherte Quadratwurzel finden könne; aus dem Umstande, daß diese Bemerkung in einem Kommentar zu Archimedes' Kreisrechnung vorkommt, scheint Herr Cantor nun zu folgern (Z 17—18), daß nach Eutokios die in Archimedes' Kreisrechnung vorkommenden angenäherten Quadratwurzeln alle nach Herons Vorschrift gefunden werden sollen. Aber diese Folgerung ist sicherlich unberechtigt und Herr Cantor lenkt selbst die Aufmerksamkeit darauf, daß die angebliche Folgerung eine unrichtige Behauptung enthält. Daß die Vermutung von Wertheim, nämlich daß Heron bei der Berechnung von Kubikwurzeln die Methode des doppelten falschen Ansatzes benutzt hat, durchaus unbegründet ist, glaube ich in der Bemerkung zu **1^3**: 374 (siehe unten) nachgewiesen zu haben.

Die fraglichen Ausführungen sollten also nach S. 318 versetzt werden, und dabei wäre es angebracht, den Passus: „Eine Stütze findet die Vermutung [daß Archimedes die Methode des doppelten falschen Ansatzes benutzt hat] lediglich in der Tatsache, daß nur mit ihrer Hilfe die archimedischen Näherungswerte für $\sqrt{3}$ erhalten werden" zu modifizieren, weil, was darin als Tatsache bezeichnet wird, höchstens als eine persönliche Ansicht des Herrn Cantor betrachtet werden kann. Die betreffenden Näherungswerte sind schon vor Wertheim von verschiedenen Verfassern (vgl. hierüber Hultsch, *Die Näherungswerte irrationaler*

---

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

Quadratwurzeln bei Archimedes; Nachr. d. Gesch. d. Wiss. zu Göttingen 1893, S. 403—404) hergeleitet worden und einige dieser Herleitungen sind meines Erachtens gar nicht schlechter als die Wertheimsche. Auffällig ist es jedenfalls, daß Herr Cantor so ausführlich über diese berichtet, während er die älteren Versuche kaum andeutet (siehe S. 317). G. Eneström.

1^3 : 374. Der Absatz, der mit den Worten: „Nun wird aber eine ähnliche Benutzung zweier falschen Ansätze angewandt, um eine angenäherte Kubikwurzel zu finden" beginnt, gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß. Das ganze Kapitel handelt von Heron, und wenn man die zitierten Worte liest, so wird man wohl zuerst versucht sein zu vermuten, daß die fragliche Benutzung von Heron herrührt. In Wirklichkeit sind indessen nach dem Worte „aber" die Worte „von G. Wertheim" einzufügen, und der Absatz ist eigentlich eine Fortsetzung des Berichtes, der S. 372 Z. 20 mit den Worten „Da ist nun" beginnt, zu betrachten. Aber auf diese Weise tritt das eigentliche historische Ergebnis, nämlich daß bei Heron die Formel $\sqrt[3]{100} = 4 + \frac{5 \cdot 36}{180 + 100}$ vorkommt, in den Hintergrund.

Noch mehr ist indessen zu bedauern, daß Herr Cantor das ihm vorliegende Material, nämlich den Artikel von Wertheim: *Herons Ausziehung der irrationalen Kubikwurzeln,* nicht gut benutzt hat. Dieser Artikel enthält: 1. einen Nachweis, daß Heron höchstwahrscheinlich die Formel $\sqrt[3]{m} = a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + a d_2}$ anwendete, wo $a = \mathrm{E}(\sqrt[3]{m})$, $d_1 = m - a^3$, $d_2 = (a+1)^3 - m$; 2. einen Versuch, diese Formel durch Benutzung zweier falscher Ansätze herzuleiten; 3. als Nachtrag eine andere Herleitung der Formel von Herrn A. Kerber. Hier ist ganz gewiß 1. das wichtigste, und von Interesse ist auch 3., während 2. eigentlich fast wertlos ist; nichtsdestoweniger erwähnt Herr Cantor zuerst 2., dann 1., aber geht stillschweigend über 3. vorbei.

Meine Behauptung, daß der Wertheimsche Versuch, die Formel $\sqrt[3]{m} = a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + a d_2}$ herzuleiten, fast wertlos sei, stütze ich teils auf den von Wertheim selbst erkannten Umstand, daß kein Beispiel einer Anwendung des doppelten falschen Ansatzes seitens der Griechen bekannt ist, teils darauf, daß Wertheims Versuch von einer durchaus willkürlichen Voraussetzung ausgeht, nämlich daß Heron $-(a+1)d_1$ und ad_2 als die Fehler, die beziehungsweise den Annahmen a und $a+1$ entsprechen, betrachtet, teils endlich darauf, daß der Wertheimsche Nachtrag eine ganz andere, sehr einfache und natürliche Herleitung der Formel bringt. Meiner Ansicht nach kann man diese Herleitung noch ein wenig verbessern und ich erlaube mir diese Verbesserung hier auseinanderzusetzen.

Sei $\sqrt[3]{m} = x$, $\delta_1 = (x-a)^3$, $\delta_2 = (a+1-x)^3$, so ist

$$\delta_1 = x^3 - 3x^2a + 3xa^2 - a^3, \quad \text{oder} \quad 3ax(x-a) = x^3 - a^3 - \delta_1 = d_1 - \delta_1,$$

$$\delta_2 = (a+1)^3 - 3(a+1)^2x + 3(a+1)x^2 - x^3,$$

$$\text{oder } 3(a+1)x(a+1-x) = (a+1)^3 - x^3 - \delta_2 = d_2 - \delta_2,$$

folglich

$$\frac{d_2 - \delta_2}{d_1 - \delta_1} = \frac{3(a+1)x(a+1-x)}{3ax(x-a)} = \frac{(a+1)(1-(x-a))}{a(x-a)} = \frac{a+1}{a(x-a)} - \frac{a+1}{a}.$$

Löst man nun diese Gleichung in bezug auf $x - a$, so erhält man

$$x - a = \frac{(a+1)(d_1 - \delta_1)}{(a+1)(d_1-\delta_1) + a(d_2 - \delta_2)}, \quad \text{d. h. } \sqrt[3]{m} = a + \frac{(a+1)(d_1-\delta_1)}{(a+1)(d_1-\delta_1)+a(d_2-\delta_2)}.$$

Aber δ_1 und δ_2 sind eigentliche Brüche und wenn man diese vernachlässigt, so wird

$$\sqrt[3]{m} \sim a + \frac{(a+1)d_1}{(a+1)d_1 + a d_2}.$$

Meine Herleitung kann ein wenig verwickelt erscheinen, aber vernachlässigt man schon von Anfang an die eigentlichen Brüche δ_1 und δ_2, so kann die Herleitung leicht geometrisch ausgeführt werden. Sie hat auch den Vorzug, daß man den Fehler sofort abschätzen kann, und sie kann oft benutzt werden, um bessere Näherungswerte zu berechnen; für diesen Zweck hat man nämlich nur statt δ_1 und δ_2 bzw. $(x_1 - a)^3$ und $(a + 1 - x_1)^3$ zu setzen, wo x_1 den soeben berechneten Näherungswert bedeutet. In dem bei Heron vorkommenden Beispiel ist $m = 100$ und Herons Näherungswert ist $4\frac{9}{14} = 4.64286$. Durch meine Formel erhält man als zweiten Näherungswert 4.64157, während der richtige Wert 4.6415888... ist, so daß die vier ersten Dezimale korrekt sind.

G. Eneström.

1³ : 376. Es wäre nicht ohne Interesse hier zu bemerken, daß in Herons *Metrika* (S. 48 der Ausgabe von H. Schöne) der Term δυναμοδύναμις für x^4 vorkommt (siehe die Bemerkung zu 1³ : 470; BM 8_3, 1907/8, S. 311).

G. Eneström.

1³ : 380, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 66—67. — **1³ : 388, 406, 409, 410,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 177—178. — **1³ : 429, 431,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1³ : 432,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1³ : 433, 452,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 179. — **1³ : 459,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 309—310. — **1³ : 464,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 179. — **1³ : 470,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 311.

1³ : 471. Als Herr Cantor in die 2. Auflage der *Vorlesungen* die Bemerkung einfügte, das Diofantische Zeichen für Minus sei „dahin gedeutet worden, es sei ein aus Λ und I gebildetes Kompendium für den Anfang des Wortes λεῖψις", und dagegen die nachweislich unrichtige Behauptung strich, Diofantos habe selbst dies Zeichen als ein verstümmeltes umgekehrtes ψ erklärt, so war diese Änderung ohne Zweifel eine Verbesserung. Es ist nur schade, daß Herr Cantor nicht in der 3. Auflage noch einen Schritt weiter auf dem eingeschlagenen Wege gegangen ist unter Bezugnahme auf den Artikel von Paul Tannery, *Sur le symbole de soustraction chez les Grecs* (Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 5—8). Hier lenkt Tannery die Aufmerksamkeit darauf, daß das Diofantische Zeichen für Minus offenbar schon in Herons *Metrika* (S. 156 der Ausgabe von H. Schöne) vorkommt, und daß es wahrscheinlich nicht λεῖψις, sondern vielmehr λείψας oder λιπών (vom Verbum λείπειν) bezeichnete.

G. Eneström.

1³ : 488, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1³ : 498,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 180. — **1³ : 500, 502,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67. — **1³ : 503—504,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 180—181. — **1³ : 509, 510, 513, 515, 528, 545, 563—564,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 67—69. — **1³ : 576,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 69—70, 181. — **1³ : 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70. — **1³ : 706,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70, 181. — **1³ : 713,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 70. — **1³ : 715—716,** siehe BM 8_3,

1907/8, S. 70—71, 181. — **1³ : 717,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1³ : 718,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 719,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 183—184. — **1³ : 720,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 730,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1³ : 734,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71. — **1³ : 736—737,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1³ : 738, 743, 748, 750,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72. — **1³ : 764, 770,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 185. — **1³ : 780, 781, 794, 800,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72—73. — **1³ : 801,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 185—186.

1³ : 802. Es ist richtig, daß in der von Herrn Cantor zitierten mittelalterlichen Übersetzung der Algebra Alkhwarizmis das Wort „articulus" vorkommt und wörtlich durch Gelenkzahl übersetzt werden kann. Aber wenn Herr Cantor weiter unten bemerkt, daß das entsprechende Wort des arabischen Originals Zehner bedeutet, so ist diese Bemerkung nur bis zu einem gewissen Grade richtig. Rosen gibt das arabische Wort nicht durch „ten", sondern durch „greater number" wieder, und in der Tat handelt es sich um das Produkt $(a \pm b)(c \pm d)$, wo a, b, c, d beliebige Zahlen sein können, vorausgesetzt, daß $a > b$ und $c > d$. Wenn also in der lateinischen Übersetzung steht: „si ergo fuerit articulus, et cum eo fuerint unitates aut fuerint unitates excepte ex eo . . .", so haben eigentlich die zwei Wörter „articulus" und „unitates" eine weitere Bedeutung als die sonst gewöhnliche, ganz wie die entsprechenden Wörter des arabischen Originals (vgl. hierüber F. Woepcke, *Extrait du Fakhri,* Paris 1853, S. 48). Aus dem Umstande, daß in der fraglichen lateinischen Übersetzung das Wort „articulus" vorkommt, folgt also nicht, daß der Übersetzer den rein arithmetischen Term Zehner durch „articulus" wiedergegeben haben würde (vgl. BM 8_3, 1907/8, S. 151). G. Eneström.

1³ : 802. Wenn Herr Cantor hier (Z. 12—14) behauptet, der Verfasser des *Liber algorismi de pratica arismetrice* habe das Wort „articulus" genau in dem gleichen Sinne, in welchem es in der gefälschten Geometrie des Boetius zur Anwendung kam, gebraucht, so ist diese Behauptung vielleicht richtig, aber ganz sicher ist es nicht. Herr Cantor verweist auf S. 583, wo die betreffende Stelle der *Geometria Boetii* wörtlich übersetzt ist, aber daraus kann man nicht ersehen, ob ein „articulus" von der Form $A \cdot 10$ (A eine beliebige ganze Zahl) oder von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ ist. Auf der anderen Seite wird in der *Geometria Boetii* „limes" als ein „numerus incompositus" bezeichnet, und daraus darf man wohl folgern, daß „limes" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ bedeutet, aber daß „articulus" mit „limes" identisch sei, wird meines Wissens nicht in der *Geometria Boetii* ausdrücklich angegeben. Bekanntlich hatte im Mittelalter „limes" eine andere Bedeutung als „articulus" (vgl. G. Eneström, *Sur les neuf „limites" mentionnés dans l'„Algorismus" de Sacrobosco;* Biblioth. Mathem. 1897, S. 97—102). Man könnte also sehr wohl annehmen, daß in der *Geometria Boetii* vier Arten von Zahlen genannt werden, nämlich: 1. „digitus", d. h. eine Zahl kleiner als 10; 2. „articulus", d. h. eine Zahl, die ein Multiplum von 10 ist; 3. „limes", d. h. eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$; 4. „numerus compositus", d. h. eine Zahl, die weder „digitus" noch „limes" ist.

Dagegen wird im *Liber algorismi de pratica arismetrice* ausdrücklich hervorgehoben (siehe die Ausgabe von Boncompagni, Rom 1857, S. 26), daß „articulus" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n$ $(a < 10)$ ist. G. Eneström.

1³:802, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73, 186—187. — **1³:805—806, 815,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73.

1³: 838. Da die hier erwähnte 34. Aufgabe der „Propositiones ad acuendos juvenes" das älteste mittelalterliche Beispiel einer unbestimmten Aufgabe ist, so gebe ich nach einer freundlichen Mitteilung des Herrn GEORG THIELE den besten Text der Aufgabe nebst deren Lösung wieder:

> Quidam paterfamilias habuit familias (!) centum, quibus praecepit dare de annona modios C, eo vero tenore, ut viri acciperent modios ternos et mulieres binos et infantes singula semodia. Dicat ergo qui valet quot viri, quot mulieres aut quot infantes fuerunt.

Solutio.

> Undecim terni fiunt XXXIII, et XV bis ducti fiunt XXX; duc vero septuagies quattuor semis, fiunt XXXVII; viri acceperunt XXXIII modios, XV mulieres acceperunt XXX et LXXIIII infantes acceperunt XXXVII, qui simul iuncti, id est XI et XV et LXXIV fiunt C, que sunt familiae (!) C. Similiter iunge XXXIII et XXX et XXXVII, fiunt C, qui sunt modii C. His ergo simul iunctis habes familias (!) C et modios C.

Die älteste bekannte Handschrift der „Propositiones" stammt aus dem 10. Jahrhundert, aber nach Herrn THIELE sind die Aufgaben spätestens in Karolingischer Zeit entstanden, und vielleicht ist deren älteste Fassung ins 4. Jahrhundert zurückzuverlegen; die Auflösung dagegen gehörte ursprünglich nicht der Aufgabe zu.

G. ENESTRÖM.

1³:855, 857, 859, 862, 863, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1³:867,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1³:869, 875—876, 877, 878,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74—76.

1³: 881. Die Angabe, daß bei BERNELINUS „das Einmaleins" vorkommt, ist so undeutlich, daß sie fast notwendigerweise mißverstanden werden muß, denn wenn man die Worte „*das* Einmaleins" sieht, so denkt man wohl in erster Linie an das gewöhnliche Einmaleins; beispielsweise hat J. TROPFKE (*Geschichte der Elementarmathematik* I, Leipzig 1902, S. 69) Herrn CANTORS Angabe auf diese Weise aufgefaßt, denn er behauptet unter Berufung auf die *Vorlesungen*, daß bei BERNELINUS „die Diagonalreihe frei gelassen ist". In Wirklichkeit kommt bei BERNELINUS (siehe *Oeuvres de GERBERT*, éd. OLLERIS, Clermont 1867, S. 361—362) gar nicht das gewöhnliche Einmaleins vor, sondern nur eine Zusammenstellung von 36 besonderen Multiplikationsregeln, die mit „Semel II II" beginnt und mit „Octies VIIII LXXII" endet. Eine noch ältere Zusammenstellung dieser Art findet sich nach CURTZE (Centralbl. für Bibliotheksw. **16**, 1899, S. 278—279) im Cod. Bernensis 250 Bl. 1ʳ.

Das gewöhnliche Einmaleins dürfte den eigentlichen Abacisten unbekannt gewesen sein. Freilich findet es sich in einer Abakusschrift (siehe BM. **8**$_3$, 1907/8, S. 79), aber diese stammt nach NARDUCCI aus der zweiten Hälfte des 12. Jahrhunderts und enthält auch andere Sachen, die sonst nicht von den Abacisten gelehrt wurden. Meines Wissens kommt das gewöhnliche Einmaleins zuerst in der von CURTZE 1898 herausgegebenen Algorismusschrift aus dem 12. Jahrhundert vor (siehe Abhandl. z. Gesch. der Mathem. **8**, S. 18), und zwar in dreieckiger Anordnung. Dagegen hat LEONARDO PISANO nicht das

gewöhnliche Einmaleins, sondern nur eine Zusammenstellung von Multiplikationsregeln etwa wie die 36 Regeln bei Bernelinus (siehe *Scritti pubblicati da B. Boncompagni*, I, Rom 1857, S. 6). G. Eneström.

1³ : 882, 889, 893, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 77—78. — **1³ : 900,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1³ : 902,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 78—79. — **1³ : 906,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 79, 188—189. — **1³ : 908, 909, 910,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 79.

1³ : 910. Es ist durchaus unrichtig, daß (Z. 1) es für den Algorithmiker in lateinischer Sprache keine anderen Wörter für Einer und Zehner als „digitus" und „articulus" gab. Man braucht sich nur die Mühe zu geben, den Anfang des Traktates *Algoritmi de numero indorum* näher einzusehen, um zu finden, daß der lateinische Übersetzer dieser Schrift *nicht* die Wörter „digiti" und „articuli" (vgl. M. Cantor, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker*, Halle 1863, S. 274 Z. 12—13), sondern „unitates", „deceni", „centeni" etc. anwendet (siehe z. B. die Ausgabe von Boncompagni, Rom 1857, S. 3: „prima est differentia unitatum . . . secunda differentia decenorum"). Auch aus Leonardo Pisanos *Liber abbaci* kann man leicht die Unrichtigkeit der Behauptung des Herrn Cantor ersehen. Die zwei soeben genannten Arbeiten waren schon vor der Herausgabe der ersten Auflage der *Vorlesungen* zugänglich; ein später veröffentlichter Beleg für die Unrichtigkeit der Behauptung ist die von Curtze 1898 zum Abdruck gebrachte Algorismusschrift.

G. Eneström.

1³ : 911, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 79—80.

Über Bemerkungen zu den Bänden **2** und **3** der „Vorlesungen" siehe S. 189—215.

Anfragen.

136. Über eine im Mittelalter übersetzte arabische Schrift algebraischen Inhalts. In der *Pratica d'arithmetica* (siehe die Ausgabe 1548, Bl. 71ᵃ) wird von Ghaligai eine Übersetzung einer arabischen Algebra erwähnt, wo die sieben Terme Geber, Elmechel, Elchal, Elchelif, Elfazial, Buram und Eltermen vorkommen. Daß die betreffende Algebra nicht die des Alkhwarizmi ist, scheint daraus hervorzugehen, daß, wie mir Herr Suter mitteilt, der von Rosen herausgegebene arabische Text jedenfalls nicht die Terme Elchelif, Buram und Eltermen enthält.

Gibt es unter den jetzt bekannten arabischen Traktaten über Algebra irgendeinen, wo die sieben Terme vorkommen? Kommen diese Terme vielleicht in der noch nicht näher untersuchten lateinischen Algebra des Pariser Ms. 7377 A vor, dessen arabisches Original nach G. Sacerdote (*Il trattato del pentagono e del decagono di Abu Kamil Shogia;* Festschrift zum achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneiders, Leipzig 1896, S. 171) von Abu Kamil Schodja ben Aslam verfaßt ist? G. Eneström.

Rezensionen.

F. Cajori. On the transformation of algebraic equations by Erland Samuel Bring [In Lund, Sweden, 1786] Translated from the Latin and annotated.

Colorado college publication, general series No. 31, November 1907, S. 65—91.

Es kommt nunmehr ziemlich oft vor, daß ältere mathematische Schriften in Übersetzungen herausgegeben werden, und den Historiker der Mathematik muß dies sehr freuen, wenn es sich um eine ältere Schrift handelt, die den derzeitigen Stand einer mathematischen Theorie repräsentiert. Rührt dagegen die Schrift von einem Verfasser her, der eigentlich ein Laie auf dem mathematischen Gebiete war, so ist der Nutzen der Übersetzung etwas zweifelhafter, denn dieselbe kann leicht bei den nicht sachkundigen Lesern eine unrichtige Vorstellung vom Stand der Mathematik an einem besonderen Zeitpunkt wecken. Meiner Ansicht nach trifft diese Bemerkung zu in betreff der von Cajori besorgten Übersetzung von E. S. Brings Abhandlung über die Transformation algebraischer Gleichungen, und um meine Ansicht zu begründen, ist es angebracht, zuerst eine kurze Übersicht der älteren Geschichte des von Bring behandelten Gegenstandes zu bieten.

In den Acta Eruditorum 1683 (S. 204—207) veröffentlichte Tschirnhaus eine Abhandlung *Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione,* worin er nachwies, daß die Gleichung $y^3 - qy - r = 0$ durch die Substitution $y^2 = by + z + a$ in die Form $z^3 + k = 0$ transformiert werden kann, wo a und b einer linearen und einer quadratischen Gleichung genügen, so daß man auf diese Weise allmählich eine allgemeine kubische Gleichung in eine reine verwandeln kann. Er fügte hinzu, daß er auf diese Weise aus einer Gleichung höheren Grades drei, vier usw. Glieder herausschaffen könnte. Die Möglichkeit, daß man dabei schon in betreff einer Gleichung vierten Grades auf eine Hilfsgleichung stoße, deren Gradzahl höher als 4 sei, zog er freilich nicht in Betracht. Tschirnhaus' Verfahren wurde bald von J. Prestet in den *Nouveaux élémens des mathématiques* (II, Paris 1689, S. 411—414) auf Grund eines Mißverständnisses bemängelt, aber M. Rolle zeigte in seinem *Traité d'algèbre* (Paris 1690, S. 222—226), daß das Verfahren wirklich für die Lösung einer allgemeinen kubischen Gleichung anwendbar sei. Etwas später erwähnte Ch. Reyneau die Transformationsmethode ausführlich in seiner *Analyse démontrée* (I, Paris 1708, S. 251—256), aber ohne Tschirnhaus zu nennen, und bemerkte zum Schluß, daß die Methode für Gleichungen höheren Grades benutzt werden könne. Auch in den sehr verbreiteten *Elementa matheseos universae* von Chr. Wolff wurde Tschirnhaus' Verfahren erwähnt (V, Halle 1741, S. 313—314), freilich mit der Bemerkung, daß dasselbe für die Lösung von höheren Gleichungen unanwendbar sei. Endlich widmete Lagrange in den *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* (Nouv. mém. de l'acad. d. sc. de Berlin, année 1770, gedruckt 1772, S. 134—215;

année 1771, gedruckt 1773, S. 138—253) der Methode von TSCHIRNHAUS eine eingehende Untersuchung. Er hob hervor (année 1770, S. 192—193), daß man offenbar auf diese Weise eine Gleichung vierten Grades lösen kann, weil es nur nötig sei, das zweite und das vierte Glied wegzuschaffen, um eine allgemeine Gleichung vierten Grades in eine quadratische zu verwandeln; ferner bemerkte er (année 1771, S. 149—150), daß TSCHIRNHAUS' Transformationsmethode für die Auflösung höherer Gleichungen kaum anwendbar sei, weil die Hilfsgleichung höher als die vorgelegte werde. Ob es möglich sei, wenigstens drei Glieder einer Gleichung fünften Grades wegzuschaffen, hatte LAGRANGE keinen Anlaß zu untersuchen, da eine Gleichung von der Form $x^5 + px + q = 0$ jedenfalls nicht algebraisch aufgelöst werden kann.

Nun setzte E. S. BRING ein, ohne auch nur eine flüchtige Kenntnis der soeben erwähnten Arbeiten zu besitzen. Freilich wußte er, daß sich TSCHIRNHAUS mit der betreffenden Frage beschäftigt hatte, aber zu welchen Resultaten dieser gelangt war, kannte er nicht und ebensowenig, daß das Verfahren in den Acta Eruditorum auseinandergesetzt worden war. In der Tat war BRINGS einzige Quelle die folgende kurze Notiz in KÄSTNERS *Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen* (Göttingen 1760, § 290):

> So läßt sich [durch eine lineare Substitution] jedes Glied der Gleichung wegschaffen, aber nur eins allein. Man kann auch leicht zeigen, daß keine Methode möglich ist, die allgemein aus jeder Gleichung alle Glieder bis auf das höchste und das letzte wegschaffte, wie der Herr VON TSCHIRNHAUSEN dergleichen erfunden zu haben glaubte.

Hieraus folgerte nun BRING, daß sich alle seine Vorgänger mit einer linearen Substitution begnügt hatten („addere oportet, nemini mathematicorum, ut nos quidem accepimus, adhuc in mentem venisse de adhibenda alia aequatione subsidiaria, ac quae simplex sit uniusque dignitatis"). Aus diesem Grunde sind die allgemeinen Ausführungen seiner Abhandlung (§ 1—5) historisch wertlos — sie waren ja 100 Jahre zu alt —, und auch der Inhalt des § 6 (die Lösung der kubischen Gleichung $z^3 + mz^2 + nz + p = 0$ durch die Substitution $z^2 + bz + a + y = 0$) konnte im Jahre 1786 als allgemein bekannt betrachtet werden. Wesentlich ohne Interesse sind ebenfalls meines Erachtens die Paragraphen 7—9. Der § 7 lehrt die Lösung einer biquadratischen Gleichung durch Zurückführung derselben auf die Form $y^4 + hy^2 + k = 0$, also dasselbe Verfahren, das LAGRANGE 1772 auseinandersetzte, und die zwei folgenden Paragraphen weisen nach, daß, wenn man die allgemeine Gleichung vierten Grades entweder direkt auf die Form $y^4 + ay^3 + b = 0$ oder auf die Form $y^4 + b = 0$ zurückführen will, die Gradzahl der Hilfsgleichung größer als 4 wird. Von wirklichem Wert sind also nur die zwei letzten Paragraphen (zusammen vier Druckseiten), wo zum erstenmal gezeigt wird, wie die Gleichung $z^5 + pz^2 + qz + r = 0$ auf die Form $y^5 + by + a = 0$ gebracht werden kann. Aber auch dieser Wert darf nicht überschätzt werden, denn BRING hatte keine Ahnung davon, daß die fragliche Transformation etwas mehr als ein ziemlich einfaches algebraisches Rechenkunststück enthielt, und in der Tat hatte sie für die Mathematik des 18. Jahrhunderts keine höhere Bedeutung, sonst wäre sicherlich die Aufgabe schon lange Zeit vor BRING gelöst gewesen. Freilich bemerkt CAJORI, daß BRING „had a deeper insight into one important matter" und motiviert seine Bemerkung dadurch, daß „he never claimed that the transformation led to the general algebraic solution of the quintic,

while Jerrard persisted in making such a claim", aber diese Tatsache scheint mir kaum als Beleg für Brings „tiefere Einsicht" anwendbar. Hätte Bring wenigstens sein trinomisches Resultat auf die Form $x^5 + x - k = 0$ gebracht, so würde man vielleicht sagen können, daß er die Auflösung der Gleichungen fünften Grades vorbereitet habe, denn dadurch wäre ja nachgewiesen worden, daß diese Auflösung nur von einem einzigen Parameter abhängt, der eine explizite algebraische Funktion der Koeffizienten ist, aber nicht einmal diesen vorbereitenden Schritt hat Bring gemacht. Überdies ist es schon längst hervorgehoben worden (siehe C. J. Hill, Öfversigt af [svenska] vetenskapsakademiens förhandlingar 1861, S. 332; vgl. F. Klein, *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade,* Leipzig 1884, S. 244), daß Brings Transformationsverfahren unnötig verwickelt ist. Nachdem er die Gleichung

$$15pbc + 20qbd + 25rb + 10qc^2 + 25rcd - 15p^2c - 3p^2d^2 - 23pqd - 2q^2 - 20rp = 0$$

hergeleitet hat, setzt er nämlich

$$b = \alpha d + \beta, \quad c = d + \gamma$$

und führt dadurch drei neue unbekannte Größen α, β, γ ein, während er viel leichter zum Ziel gelangt wäre, wenn er ganz einfach

$$15pbc + 20qbd + 25rb = 0, \text{ d. h. } 15pc + 20qd + 25r = 0$$

gesetzt hätte, denn auf diese Weise würde er sofort eine quadratische Gleichung bekommen haben, woraus d als Funktion gegebener Größen bestimmt werden kann.

Ich habe oben behauptet, daß der Inhalt der fünf ersten Paragraphen der Bringschen Abhandlung historisch wertlos sei. Indessen gibt es eine Stelle des § 4, worauf Cajori großen Wert legt, und die ich darum hier besonders besprechen will. Für diesen Zweck bringe ich zuerst die Fortsetzung des oben von mir zitierten Passus des Kästnerschen Lehrbuches zum Abdruck:

> Gäbe es eine ... Methode ..., jede cubische Gleichung in $y^3 + t = 0$ zu verwandeln, so daß sich x finden ließe, wenn man y hätte; so müßte das x der allgemeinen cubischen durch das y der reinen bestimmt werden. Aber das y der reinen hat allemahl zweene unmögliche Werthe und das x der allgemeinen kann lauter mögliche haben, woraus schon zu übersehen ist, daß sich dergleichen Methode nicht erfinden läßt.

Diese Schlußfolgerung wird nun von Bring an der angedeuteten Stelle bemängelt, indem er darauf hinweist, daß der Ausdruck „durch etwas bestimmt werden" zweideutig sei, und daß Kästners Konklusion in Fortfall komme, wenn man dem Ausdrucke die richtige Deutung gebe; in Wirklichkeit finden sich Fälle, z. B. der „Casus irreductibilis", in denen eine reelle Größe durch zwei imaginäre Größen bestimmt sei. In betreff dieser Kritik der Kästnerschen Schlußfolgerung bemerkt Cajori:

> The advanced views expressed here by Bring on the subject of imaginary numbers are the more remarkable as practically all mathematicians of his time, excepting a few men of the first rank like Euler and Lagrange looked upon imaginaries as unreal, mysterious and to be avoided ... In the clearness of his argument on imaginary numbers, Bring was in advance of the rank and file of mathematicians of his age.

Aber diese Bemerkung von Cajori ist meiner Ansicht nach unzutreffend. Daß es noch in der zweiten Hälfte des 18. Jahrhunderts Mathematiker gab, die die Bedeutung der imaginären Größen nicht verstanden, will ich nicht in Abrede stellen, aber daß eigentlich nur die Mathematiker ersten Ranges eine richtigere Auffassung dieser Größen hatten, muß ich verneinen, und der einzige Beleg hierfür, den Cajori bringt, nämlich der Hinweis auf den oben zitierten Passus von Kästner, genügt gar nicht. Gewiß war Kästner, wie Cajori hervorhebt, ein angesehener und kundiger Mathematiker, aber der fragliche Passus ist so kindisch, daß er eigentlich als ein „lapsus calami" bezeichnet werden kann, und man braucht offenbar nicht besonders scharfsinnig zu sein, um die Unrichtigkeit desselben einzusehen; in Wahrheit ist ja schon, wenn $x = y + z$, $y = a + b\sqrt{-1}$, $z = a - b\sqrt{-1}$, die *reelle* Größe $x = 2a$ durch die zwei *imaginären* Größen $a + b\sqrt{-1}$ und $a - b\sqrt{-1}$ „bestimmt"!

Die englische Übersetzung ist, soweit ich dieselbe mit dem Original verglichen habe, befriedigend. Zuweilen ist Brings Latein ein wenig dunkel, und ich bin nicht sicher, daß Cajori die dunkeln Stellen immer richtig übersetzt hat. So z. B. sagt Bring am Ende des § 10: „attamen hujus quantaecunque difficultatis removendae quaedam haud usque adeo tenuis spes ostenditur", was Cajori auf folgende Weise wiedergibt: „and yet even this difficulty can, within a reasonable degree of certainty, be removed"; ich bin eher geneigt, den Passus so zu übersetzen: „und indessen wird eine gar nicht geringfügige Hoffnung erweckt, diese ziemlich große Schwierigkeit zu beseitigen". Warum Cajori auch die Übersetzung des Widmungsschreibens des jungen Respondenten S. G. Sommelius bringt, das mit der Sache gar nichts zu tun hat, ist mir nicht recht verständlich.

Am Ende der Übersetzung hat Cajori eine biographische Notiz über Bring, eine historische Notiz über die Auflösung der Gleichungen fünften Grades, sowie einige kurze Bemerkungen und ein Schriftverzeichnis hinzugefügt. Die biographische Notiz ist aus dem schwedischen *Biographiskt lexikon öfver namnkunnige svenska män,* B. 3 (1837—1838) übersetzt (statt „Ansås" und „Strösvelstrops" ist „Ausås" und „Ströfvelstorp's" zu lesen. Welchen Grundsätzen Cajori bei der Verfertigung des Schriftverzeichnisses folgte, ist mir nicht klar (vgl. das Verzeichnis bei Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra,* Leipzig 1878, S. 999—1001), aber jedenfalls sollte die Abhandlung von K. Hunrath, *Algebraische Untersuchungen nach Tschirnhausens Methode,* III (Hadersleben 1885, 24 S. 4°) zitiert werden, da diese Abhandlung ausdrücklich auf Bring Bezug nimmt. Noch auffälliger ist, daß Cajori den Abdruck der fünf letzten Paragraphen (also des eigentlich interessanten Teiles) der Bringschen Abhandlung im Archiv der Mathematik **41** (1864), S. 105—112, gar nicht erwähnt; angebracht wäre es übrigens gewesen, ausdrücklich zu bemerken, daß diese fünf Paragraphen auch S. 348—355 der von Cajori zitierten Abhandlung von C. J. Hill (1861) wörtlich abgedruckt sind, so daß die Seltenheit der Originalabhandlung eigentlich ein recht bedeutungsloser Umstand ist.

Stockholm. G. Eneström.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1

8_3 (1907/8): 3. — [Rezension des Bandes 7_3:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 519—322. (H. Bosmans.)

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [2

16 : 1 (avril-octobre 1907).

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 307—311. (F. Rudio, G. Eneström.) [3

Sturm, A., Geschichte der Mathematik (1906). [Rezension:] Arch. d Mathem. 13_3, 1908, 57. (E. Kullrich.) [4

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Edition française, traduite par L. Freund (1906—1907). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 13. (G.) — Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 312—315. (G. Eneström.) [5

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo (1907). [Rezension:] *Porto*, Acad. polytechn., Annaes 2, 1907, 249—250. (G. T.) — La revue du mois 3, 1908, 120. (D. — L'enseignement mathém 10, 1908, 82—83. (G. Vailati.) [6

Günther, S., Geschichte der Mathematik. I. Teil. Von den ältesten Zeiten bis Cartesius. Leipzig, Göschen 1908. [7

8°, V + (1) + 427 S. — [9.60 Mk.] — Sammlung Schubert XVIII.

Fourrey, E., Curiosités géométriques (1907). [Rezension:] Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1908, 554—555. (H. Wieleitner.) [8

Teixeira, F. G., Tratado de las curvas especiales notables (1905). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 75—76. (H Wieleitner.) [9

Bonola, R., Die nichteuklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Autorisierte deutsche Ausgabe besorgt von H. Liebmann. Leipzig, Teubner 1908. [10

8°, VIII + 244 + (1) S. — [5 Mk.] — [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, *35*.

Shearman, A. T., Development of symbolic logic (1906). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 186—191. (E. B. WILSON.) [11

Vailati, G., Per la preistoria del principio dei momenti virtuali. [12
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 225—232.

Kistner, A., Geschichte der Physik (1906). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 52. (H. SAMTER.) [13

b) Geschichte des Altertums.

***Cantor, M.,** Babylonische Quadratwurzeln und Kubikwurzeln. [14
Zeitschr. für Assyriologie 1908.

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 818—821. (F. RUDIO.) — Wiadomości matem. 11, 1907, 273—275. [15

Juel, C., Om Arkimedes' Summation af en trigonometrisk Raekke. [16
Nyt Tidsskr. for Mathem. 18, 1907, A: 1—5.

***Degering, H.,** Wann schrieb Vitruv sein Buch über die Architectur? [17
Berliner philolog. Wochenschr. 27, 1907.

c) Geschichte des Mittelalters.

Kugener, M. A., Un traité astronomique et météorologique syriaque attribué à Denys l'Aréopagite (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 322—323. (H. BOSMANS.) [18

Al-Battani, Opus astronomicum, ed. C. A. NALLINO. II (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908 323—324. (H. BOSMANS.) [19

Eneström, G., Über eine alte Scherzfrage, die der Lösung einer unbestimmten Gleichung ersten Grades entspricht. [20
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 311.

Thompson, S. P., Peter Peregrinus de Maricourt and his Epistola de magnete (1907). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 295—296. (F. CAJORI.) [21

d) Geschichte der neueren Zeit.

Amodeo, F., Albrecht Dürer precursore di Monge. [22
Napoli, Accad. d. sc.. Atti 13_3, 1907. 16 S.

Playoust, Ch., Une page de l'histoire des mathématiques en France au XVI^e siècle. [23
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 550—552. — Zur Geschichte der Algebra.

***Mascart, J.,** Clavius et l'Astrolabe. [24
Paris, Observatoire, Bullet. astron. 22, 1905; 23, 1906; 24, 1907. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 324—331. (H. BOSMANS.)

Favaro, A., Regesto biografico Galileiano (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 322. (H. BOSMANS.) [25

Bosscha, J., Simon Marius. Réhabilitation d'un astronome calomnié. [26
Arch. néerl. d. sc. exactes 12_2, 1907, 258—307.

Bosmans, H., La découverte du Journal d'Isaac Beeckman. [27
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 332—333. — Über STEVIN und DESCARTES.

Cajori, F., Notes on the history of the slide rule. [28
The americ. mathem. monthly 15, 1908, 1—5. — [Résumé:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 205.

Thirion, J., Pascal. L'horreur du vide et la pression atmosphérique. [29
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 12_3, 1907, 383—450; 13_3, 1908, 149—251.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio (1907). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 10—12. (J. T.) [30

Geer, P. van, Hugeniana geometrica IV. [31
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1907, 145—168.

Bosmans, H., Lettre inédite d'Antoine Thomas, Missionnaire belge, en Chine, au XVII^e siècle. [32
Missions belges de la compagnie de Jésus (Bruxelles 1908). 18 S. — Zur Geschichte der astronomischen Beobachtungen in China; der Brief ist 1680 geschrieben.

Langley, E. M., An interesting find. [33
The mathem. gazette 4, 1907, 97—98. — Ein Brief von B. TAYLOR aus dem Jahre 1711.

Müller, Felix, Über eine Biographie L. Eulers vom Jahre 1780 und Zusätze zur Euler-Literatur. [34
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 36—39.

Braunmühl, A. von, Leonhard Euler. [35
Mitteil. zur Gesch. der Medizin und der Naturwiss. 7, 1908, 1—14.

Timerding, E., Eulers Theorie des Schiffes und die Bewegungsgleichungen des starren Körpers. [36
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber 17, 1908, 84—93.

Brauer, E., Eulers Turbinentheorie [37
Deutsche Mathem.-Verein, Jahresber. 17, 1908, 39—46.

Schlesinger, L., Über ein Problem der Diophantischen Analysis bei Fermat, Euler, Jacobi und Poincaré. [38
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 57—67.

Bögh, F., Nogle Bemaerkninger om et dansk matematisk Manuskript fra det 18. Aarhundrede. [39
Nyt Tidsskr. for Mathem. 18, 1907, A: 92—97.

Une page élémentaire de Lagrange. [40
L'enseignement mathém. 10, 1908, 66—68. — Über abgekürzte Multiplikation

Cajori, F., On the transformation of algebraic equations by Erland Samuel Bring [In Lund, Sweden, 1786]. Translated from the Latin and annotated. [41
Colorado, College, Publications (General series) Nr. 31, 1907, 65—91.

Simon, M., Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert (1906). [Rezension:] Revue génér. d. sc. 18, 1907, 595. [42

Lucas de Pesloüan, Ch., N.-H. Abel (1906). [Rezension:] Nature 75, 1907, 604. — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 540—541 (E. LAMPE.) — Nouv. ann. de mathém. 7_4, 1907, 475. (R. B.) — Revue génér d. sc. 18, 1907, 509. [43

***Mittag-Leffler, G.,** Niels-Henrik Abel. Paris, Hermann 1907. [44
8°, 68 S. — [2 fr.]

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi (1907). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 12—13. (E. LAMPE.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1908, 552—553. (H. WIELEITNER) [45

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker (1907). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 19, 1908; Lit.-Ber. 8. (SCHRUTKA.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 38, 1908, 553. (H. WIELEITNER.) [46

Stäckel, P. und Ahrens, W., Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. [47
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 233—306.

Tannery, J., Manuscrits et papiers inédits de Galois. [48
Bullet. d. sc. mathém. 31_2, 1907, 275—308. — Zusammen mit den zwei vorangehenden Artikeln besonders herausgegeben (Paris, Gauthier-Villars 1908; (3) + 67 + (1) S. 8°).

Walter, A., William Whewells Abhandlungen zur natürlichen Geometrie der Kurven. Graz 1907. [49
4°, 25 S. + 2 Taf. — Realschulprogramm.

Wangerin, A., Franz Neumann (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 846—847. (W. VOIGT.) — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 528—529. (E LAMPE.) — Zeitschr. für mathem Unterr. 38, 1908, 550—552. (S. GÜNTHER.) [50

Mackay, J. S., Herbert Spencer and mathematics. [51
Edinburgh, Mathem. soc., Proceedings 25, 1907, 95—106.

Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES publiée par B. BAILLAUD et H. BOURGET (1905). [Rezension:] Arch. der Mathem. 12_3, 1907, 262—263. (E. JAHNKE.) [52

Miller, G. A., Third report on recent progress in the theory of groups of finite order. [53
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1907, 78—91, 124—133.

***Stroobant, P., Delvosal, J., Philippot, H., Delporte, E. et Merlin, E.,** Les observatoires astronomiques et les astronomes. Bruxelles, Hayez 1907. [54
8°, VII + 316 S. + 1 Karte — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 125—126. (A. BERBERICH.)

Carracido, J. R., Sollemne primera adjudicacion de la medalla de su nombre al José Echegaray. Discurso. Madrid 1907. [55
8°, 19 S. + Taf.

*Le feste giubilari di Augusto Righi. Bologna, Zanichelli 1907. [56
8°, VI + 143 S. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 28, 1907, 2941.

Eisenstädter, J., Siegmund Günther. Zu seinem 60. Geburtstag. [57
Das Weltall 8, 1908, 153—157 + Porträt.

Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques. Nouvelle édition [publiée par la Société mathématique d'Amsterdam]. Amsterdam 1908. [58
8°, (4) + 110 + (2) S.

e) Nekrologe.

Giuseppe **Battaglini** (1826—1894). [59
Giorn. di matem. 45, 1907, 229—274 [Schriftverzeichnis]. (F. AMODEO.)

Gustav **Bauer** (1820—1906). [60
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. (Math Kl.) 37, 1907, 249—257. (C. v. VOIT.)

Davide **Besso** (1845—1906). [61
Il bollett. di matem. (Bologna) 5, 1906, 183—186. (R VOLPI.)

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [62
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachr. (Geschäftl. Mitt.) 1907, 69—82. (W. VOIGT.) — *Leipzig*, Sächs. Ges. d. Wiss., Berichte 58, 1906, 615—627. (TH. DES COUDRES.) — *Manchester*, Philos. soc., Memoirs and proceedings 51, 1906—1907, XLIV—XLV. — *München*, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. (Math. Kl.) 37, 1907, 262—267. (C. v. VOIT.)

Ernesto **Cesaro** (1859—1906). [63
Napoli, Accad. d. sc., Rendiconto 12_3, 1906, 358—375. (P. DEL PEZZO.) — Giorn. di matem. 45, 1907, 299—320. (A. PERNA.) — Il bollett. di matem. (Bologna) 5, 1906, 177—182. (V. NOBILE.)

Agnes Mary **Clerke** (1842—1907). [64
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 429—430. (TH. MOREUX.)

Josiah Willard **Gibbs** (1839—1903). [65
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient 13_3, 1908, 1—43. (P. DUHEM; Abdruck aus dem Bulletin des sciences mathématiques 31_2, 1907, S. 181—211.)

Asaph **Hall** (1829—1907). [66
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 242. — Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 114—115. (A. BERBERICH.)

Alexander Stewart **Herschel** (1836—1907). [67
Nature 76, 1907, 202—203. (W F. DENNING.)

Pierre Jules César **Janssen** (1824—1907). [68
Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 78—79. (A. BERBERICH.)

Hermann **Laurent** (1841—1908). [69
L'enseignement mathém. 10, 1908, 177.

Aimé **Laussedat** (1819—1907). [70
Revue génér. d. sc. 18, 1907, 341—342. (M. D'OCAGNE.)

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [71
London, Mathem. soc., Proceedings 5_2, 1907, XIII. (G. DARBOUX.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 26, 1908. 63 S. [mit Schriftverzeichnis]. (G. LORIA.)

Edward John **Routh** (1831—1907). [72
London, Mathem. soc., Proceedings 5_2, 1907, XIV—XX. (A. R. FORSYTH.)

Alfonso **Sella** (1865—1907). [73
Science 26_2, 1907, 923.

William **Thomson**, Lord **Kelvin** (1824—1907). [74
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 242. — Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 89—90. (F. A. SCHULZE.) — Science 27_2, 1908, 1—8. (A. G. WEBSTER.)

Gustav **Zeuner** (1828—1907). [75
Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 61—63. (HELM.)

f) Aktuelle Fragen.

Tannery, J., La méthode en mathématiques. [76
La revue du mois 3, 1908, 5—32.

Tannery, P., Programme d'un cours d'histoire des sciences (1907). — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 334—335. (H. BOSMANS.) [77

Cajori, F., Lessons drawn from the history of science. [78
School science and mathematics 1908. 12 S.

Enquête sur la méthode de travail des mathématiciens X. [79
L'enseignement mathém. 10, 1908, 152—172. (E. CLAPARÈDE, H. FEHR.)

[Deutsche Mathematiker-Versammlung 1907] [80
L'enseignement mathém. 10, 1908, 74—76.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— S. T. Adams am „New Hampshire college" zum Professor der Physik daselbst.

— Direktor B. Baillaud in Toulouse zum Direktor der Sternwarte in Paris.

— S. G. Barton in Philadelphia zum Professor der Mathematik an der „Clarkson school of technology" in Potsdam, N. Y.

— Dr. W. C. Brenke in Cambridge, Mass., zum Professor der Mathematik an der Universität von Nebraska in Lincoln.

— P. Burgatti in Rom zum Professor der theoretischen Physik an der Universität in Messina.

— Dr. W. H. Bussey in New York zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota in Minneapolis.

— L. Cohen an der „George Washington university" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Professor E. C. Colpitts in Atlanta zum Professor der Mathematik am „Emporia college" in Kansas.

— Dr. R. H. Curtiss zum Professor der Astrophysik an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Privatdozent R. du Bois-Reymond in Berlin zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Dr. J. A. Eiesland in Annapolis zum Professor der Mathematik an der Universität von West-Virginia.

— F. Field zum Professor der Mathematik an der „Georgia school of technology" in Atlanta.

— Privatdozent R. Füter in Marburg zum Professor der Mathematik an der Universität in Basel.

— Astronom F. Gonnessiat in Paris zum Direktor der Sternwarte in Alger.

— Professor W. Kaufmann in Bonn zum Professor der Physik an der Universität in Königsberg.

— Dozent H. Lebesgue in Poitiers zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dr. R. B. McClenon in Grinnel zum Professor der Mathematik am „Jowa college" daselbst.

— Professor H. Mache in Innsbruck zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Wien.

— Professor R. C. Maclaurin in Wellington zum Professor der mathematischen Physik an der „Columbia university" in New York.

— Professor M. MacNeill an der „McGill university" zum Professor der Mathematik am „Dalhousie college" in Halifax, Canada.

— Dr. W. A. Manning an der „Stanford university" zum Professor der Mathematik daselbst.

— Professor R. Marcolongo in Messina zum Professor der Mechanik an der Universität in Neapel.

— Dr. J. F. Messick zum Professor der Mathematik am „Randolph Macon college", Virginia.

— Dr. W. M. Mitchell zum Direktor des „Haverford college observatory".

— Professor D. A. Murray in Halifax zum Professor der Mathematik an der „McGill university".

— Dr. B. L. Newkirk am „Lick observatory" zum Professor der Mathematik und Mechanik an der Universität von Minnesota in Minneapolis.

— P. G. Nutting an der „George Washington university" zum Professor der Physik daselbst.

— Dr. A. B. Pierce in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan daselbst.

— Professor A. L. Rhoton an der „Southwestern university of Tennessee" zum Professor der Mathematik am „Georgetown college", Kentucky.

— Astronom H. L. Rice in Washington zum Professor der Mathematik am „Naval observatory“.

— Dozent E. Rothé in Nancy zum Professor der Physik an der Universität daselbst

— Professor P. Stäckel in Hannover zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

— Professor G. Vivanti in Messina zum Professor der höheren Analysis an der Universität in Pavia.

Todesfälle.

— T. Barker, früher Professor der Mathematik am „Owens college“ in Manchester, gestorben den 20. November 1907, 69 Jahre alt.

— Anton von Braunmühl, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in München, geboren in Tiflis den 22. Dezember 1853, gestorben in München den 9. März 1908.

— Robert Lewis John Ellery, Direktor der Sternwarte in Melbourne, gestorben 1907, 80 Jahre alt

— Rinaldo Ferrini, Professor der technologischen Physik an der Technischen Hochschule in Mailand, geboren in Mailand den 6. Juli 1831, gestorben 1908.

— Albert Lancaster, Direktor des meteorologischen Observatoriums in Uccle, geboren in Mons den 24. Mai 1849, gestorben in Brüssel den 4. Februar 1908.

— Hermann Laurent, „répétiteur“ an der „Ecole polytechnique“ in Paris, geboren in Echternach (Luxemburg) den 2. September 1841, gestorben in Paris den 19. Februar 1908.

— Albert Levy, Professor der Mathematik an der „Ecole de physique et chimie“ in Paris, gestorben in Montsouris den 28. Dezember 1907, 64 Jahre alt.

— Lorenz Leonard Lindelöf, früher Oberdirektor des Schulwesens in Finnland, geboren zu Karvia den 13. November 1827, gestorben in Helsingfors den 3. März 1908.

— Adolph Paalzow, früher Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Berlin, geboren in Rathenow den 5. August 1823, gestorben den 2. Januar 1908.

— Alfonso Sella, Professor der Physik an der Universität in Rom, geboren in Biella den 25. September 1865, gestorben den 25. November 1907.

— Richard Strachey, General, Meteorolog, geboren zu Sutton court, Somersetshire den 24. Juli 1817, gestorben den 12. Februar 1908.

— Ludwig Wedekind, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Karlsruhe, gestorben in Karlsruhe den 8 Februar 1908, 65 Jahre alt.

— Charles Augustus Young, früher Professor der Astronomie an der Universität in Princeton, geboren in Hanover, N. H. den 15. Dezember 1834, gestorben daselbst den 4. Januar 1908

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der mittelalterlichen Astronomie angekündigt.

— An der Universität in Göttingen hat Professor F. Bernstein für das Sommersemester 1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Heidelberg hat Privatdozent K. Bopp für das Sommersemester 1908 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik im achtzehnten Jahrhundert angekündigt.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. Simon für das Sommersemester 1908 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit Kulturgeschichte angekündigt.

Namenregister.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM
IN STOCKHOLM.

3. FOLGE. 9. BAND. 1. HEFT.
MIT 2 FACSIMILES IM TEXT

AUSGEGEBEN AM 17 SEPTEMBER 1908.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1908.

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

DRITTE FOLGE.

Herausgegeben von G. Eneström in Stockholm, Grefturegatan 77[I]
Druck und Verlag von B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3.

☛ Alle für die Redaktion bestimmten Sendungen (Briefe, Manuskripte, Recensionsexemplare usw.) wolle man richten an den Herausgeber der Bibliotheca Mathematica,

Herrn G. Eneström, Stockholm (Schweden), Grefturegatan 77[I]

oder an die Verlagsbuchhandlung B. G. Teubner in Leipzig, Poststraße 3, die um schnellste Weiterbeförderung an die Redaktion besorgt ist.

☛ Die Herren Verfasser erhalten von größeren Aufsätzen 20 mit Umschlag versehene, von kleineren Aufsätzen usw. 10 Sonderabdrucke unentgeltlich; eine größere Anzahl dagegen, als die genannte, zu den Herstellungskosten.

☛ Jeder Band der Bibliotheca Mathematica umfaßt 4 Hefte und kostet 20 Mark; jährlich soll zunächst etwa ein Band ausgegeben werden. Alle Buchhandlungen und Postanstalten nehmen Bestellungen an.

INHALT DES VORLIEGENDEN HEFTES.



ISAAC NEWTON

BIBLIOTHECA MATHEMATICA.

ZEITSCHRIFT FÜR GESCHICHTE
DER
MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN.

HERAUSGEGEBEN

VON

GUSTAF ENESTRÖM

IN STOCKHOLM.

3. FOLGE. NEUNTER BAND.

MIT BILDNISSEN VON NEWTON ALS TITELBILD UND 1 TAFEL,
SOWIE 2 FAKSIMILES IM TEXT UND 26 TEXTFIGUREN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1908—1909.

Inhaltsverzeichnis.

Autoren-Register.

Sach-Register.

Allgemeines über Geschichte der Mathematik.

Geschichte des Altertums.

Geschichte des Mittelalters.

Geschichte der neueren Zeit.

Das 1. Heft dieses Bandes (S. 1— 96) wurde am 17. September 1908 ausgegeben.
„ 2. „ „ „ (S. 97—192) „ „ 31. Dezember „ „
„ 3. „ „ „ (S. 193—288) „ „ 10. Juni 1909 „
„ 4. „ „ „ (S. 289—378) „ „ 2. September „ „

Verbesserung.

S. 291 Z. 3 v. u. statt „Paris 1660" lies „Lyon 1670".

Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik.

Von G. Eneström in Stockholm.

In meinem vorangehenden Leitartikel[1]) habe ich ausführlich dargelegt, wie umfassend die Gebiete der mathematisch-historischen Forschung sind, die bisher unvollständig untersucht worden sind, und mehr im Vorübergehen lenkte ich die Aufmerksamkeit auf den Wert einer kritischen Behandlung des Materials. Jetzt werde ich diese letztere Frage eingehend in Betracht ziehen und dabei zuerst untersuchen, ob das schon herbeigeschaffte und bearbeitete mathematisch-historische Material derart ist, daß eine besondere kritische Nachbehandlung desselben angebracht sein kann. Für diesen Zweck ist es nötig zu wissen, ob die unrichtigen Angaben, die in den neuesten Darstellungen der Geschichte der Mathematik vorkommen, zahlreich sind und auf welche Weise sie entstanden.

Daß auch der sachkundige und kritische Forscher zuweilen zu Resultaten gelangen wird, die durch spätere Untersuchungen modifiziert werden müssen, liegt in der Natur der Sache, denn der Forscher ist offenbar bis zu einem gewissen Grade von den zugänglichen Quellenschriften abhängig. Indessen gibt es in den bisherigen Darstellungen der Geschichte der Mathematik eine höchst bedeutende Zahl von unrichtigen Angaben oder Urteilen, die nicht von dem soeben angedeuteten Umstande bedingt sind, sondern auf unzureichender Sachkunde oder Kritik beruhen. Sehr gewöhnlich ist es, daß Angaben, die in älteren Arbeiten vorkommen, ohne jede Prüfung als richtig angesehen werden, und auf diese Weise werden noch heute viele nachweisliche Unrichtigkeiten weiter verbreitet. Ein Universalmittel, um die Fehler, die von älteren unrichtigen Angaben herrühren, zu vermeiden, gibt es natürlich nicht, sofern man sich nicht auf Geschichtsschreibung im Boncompagnischen Stil[2]) beschränkt, aber ein

1) G. Eneström, *Über planmäßige Arbeit auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete;* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 1—12.

2) Siehe G. Eneström, a. a. O. S. 8.

wirksames Mittel für diesen Zweck ist jedenfalls eine eingehende Berücksichtigung der „Literatur der Frage“. Diese Literatur vollständig auszunützen, ist oft sehr schwierig, zuweilen sogar unmöglich, und auch der gewissenhafteste Forscher kann die Gefahr laufen, gewisse frühere Untersuchungen zu übersehen. Auf der anderen Seite gibt es Arbeiten, die jeder Fachgenosse kennen und benutzen *sollte*, wenn er auf seinem Gebiete literarisch tätig sein will. Hierzu rechne ich in erster Linie die neuesten zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik, die auf wirklichen Quellenstudien gegründet sind, sowie wenigstens die letzten Jahrgänge der mathematisch-historischen Fachzeitschriften.[1]) Selbstverständlich enthalten auch die älteren Jahrgänge wertvolle Artikel, aber es ist klar, daß viele Artikel derselben solche Angaben bringen, die auf Grund neuerer Untersuchungen veraltet sind, und daß die wirklich wertvollen Resultate älteren Datums schon in den neuesten Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik mehr oder weniger vollständig verwertet sind, was in betreff der letzten Jahrgänge im allgemeinen nicht der Fall ist. Leider kommt es noch allzu oft vor, daß sich mathematisch-historische Verfasser nicht einmal der Mühe unterziehen, die neuesten Jahrgänge der Fachzeitschriften auszunützen und darum die älteren unrichtigen oder wenigstens unzuverlässigen Angaben unnötigerweise wiederholen. Zahlreiche Belege für diese meine Behauptung finden sich z. B. in der letzten Auflage der Cantorschen *Vorlesungen;* hier will ich ein einziges Beispiel erwähnen, das meines Erachtens aus mehr als einem Gesichtspunkte lehrreich ist.

Im Jahre 1857 veröffentlichte B. Boncompagni[2]) nach einer Pariser Handschrift[3]) eine Algorismusschrift unter dem Titel *Ioannis Hispalensis Liber algorismi de pratica arismetrice.* In der Tat beginnt die von Boncompagni benutzte Handschrift mit den Worten „Incipit prologus in libro alghoarismi de pratica arismetrice. Qui editus est a magistro Iohanne yspalensi“ und unter Bezugnahme hierauf legte Herr Cantor

---

1) Da Herr Cantor in seinem Einleitungsvortrag in Heidelberg 1904 (Verhandlungen des Mathematikerkongresses in Heidelberg 1904, Leipzig 1905, S. 500) unter den existierenden mathematisch-historischen Zeitschriften zuerst das Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche, und dann die Bibliotheca Mathematica erwähnt, so erlaube ich mir zu bemerken, daß das Bollettino des Herrn Loria in erster Linie eine mathematische Literaturzeitung ist, was schon aus dem Titel hervorgeht; „bibliografia“ bedeutet nämlich hier nicht „Bibliographie“, sondern „Rezensionen“, und beispielsweise enthält der Jahrgang 1904 nur zwei mathematisch-historische Abhandlungen, die zusammen 13 Druckseiten betragen. Aus welchem Grunde Herr Cantor in erster Linie das Bollettino aufführte, ist mir nicht bekannt, jedenfalls ist die Ordnungsfolge weder alphabetisch noch chronologisch.

2) B. Boncompagni, *Trattati d'aritmetica* 2, Rom 1857, S. 25—136.

3) Bibl. nat. anc fonds No. 7359.

diese Schrift sowohl in seinen *Beiträgen zum Kulturleben der Völker*[1]) als in der ersten Auflage seiner *Vorlesungen*[2]) ohne weiteres dem JOHANNES HISPALENSIS bei. Indessen machten WAPPLER[3]) und STEINSCHNEIDER[4]) einige Jahre vor dem Erscheinen der zweiten Auflage der *Vorlesungen* darauf aufmerksam, daß es eine andere Handschrift gibt, wo der Traktat dem GHERARDO CREMONESE zugeschrieben wird, und schon hieraus geht hervor, daß nunmehr JOHANNES HISPALENSIS nicht ohne weiteres als Übersetzer oder Bearbeiter des Traktates bezeichnet werden darf. Darum veröffentlichte ich vor einigen Jahren in der Bibliotheca Mathematica eine Anfrage[5]), worin ich besonders hervorhob, daß die Verfasserfrage bisher gar nicht erledigt worden sei. Nichtsdestoweniger hat Herr CANTOR noch in der dritten Auflage seiner *Vorlesungen*[6]) ohne weiteres die Angaben der ersten Auflage wiederholt. Daß er selbst die Frage einer näheren Prüfung unterworfen und dabei seine Angabe bestätigt gefunden habe, halte ich für durchaus unwahrscheinlich und zwar aus folgenden Gründen.

In der mathematisch-historischen Literatur sind meines Wissens bisher folgende Handschriften des Traktates erwähnt worden:

A. Ms. Paris. bibl. nat. 16202 [= Sorb. 972], Bl. 50—81, wahrscheinlich aus dem Anfange des 13. Jahrhunderts[7]);

B. Ms. Paris. bibl. nat. 15461 [= Sorb. 981], Bl. 1—14, wahrscheinlich aus der zweiten Hälfte des 13. Jahrhunderts[8]);

C. Ms. Paris. bibl. Mazarin. 3642 [früher 1258], Bl. 105—117, wahrscheinlich aus dem 13. Jahrhundert[9]);

D. Ms. Paris. bibl. nat. 7359 Bl. 85—111, wahrscheinlich etwa 1300 geschrieben[10]);

E. Ms. Erfurt. Amplon. Qu. 355, Bl. 85—115, aus dem 14. Jahrhundert[11]);

F. Ms. Dresden C. 80, Bl. 129—134, aus dem 15. Jahrhundert.[12])

Hierzu kommt noch eine Handschrift, die höchstwahrscheinlich eine Abschrift des Traktates ist, obgleich dieselbe den Titel: „Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam" hat und mit einem kurzen Anhang über römische Bruchrechnung versehen ist, nämlich

G. Ms. bibl. Vatic. reg. Suec. 1285, Bl. 14—20, aus der zweiten Hälfte des 14. Jahrhunderts.[13])

Von diesen Handschriften sind *A*, *F* und *G* anonym; in der Handschrift *B* wird der Traktat als „editus a magistro IOHE" und in der Handschrift *C* ebenfalls als „editus a magistro JOHANNE" bezeichnet, ohne daß angegeben wird, welcher JOHANNES gemeint ist; da beide Handschriften aus dem 13. Jahrhundert herzurühren scheinen,

---

1) M. CANTOR, *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker,* Halle 1863, S. 278.

2) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **1**, Leipzig 1880, S. 685.

3) E. WAPPLER, *Beitrag zur Geschichte der Mathematik;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **5**, 1890, S. 158—159.

4) M. STEINSCHNEIDER, *Über die mathematischen Handschriften der amplonianischen Sammlung;* Biblioth. Mathem. 1891, S. 47.

5) Siehe Biblioth. Mathem. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 114.

6) M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* $\mathbf{1}^3$, Leipzig 1907, S. 800.

7) Vgl. G. LIBRI, *Histoire des sciences mathématiques en Italie* **2**, Paris 1838, S. 300.

8) Vgl. LIBRI, a. a. O. S. 300.

9) Vgl. M. CHASLES, Comptes rendus de l'acad. d. sc. [de Paris] **13**, 1841, S. 523.

10) Vgl. G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 186.

11) Vgl. STEINSCHNEIDER, a. a. O. S. 47. 12) Vgl. WAPPLER, a. a. O. S. 158.

13) Vgl. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411.

könnte man sehr wohl an Johannes de Sacrobosco denken, und der Umstand, daß im Inhaltsverzeichnisse der Handschrift *B* eine neuere Hand Johannes Hispalensis als Verfasser angibt, bedeutet natürlich gar nichts. Nimmt man jetzt hinzu, daß die einzige Handschrift, wo der Traktat dem Johannes Hispalensis beigelegt wird, mehr als 100 Jahre nach dessen Tode geschrieben ist, so muß wohl klar sein, daß die Angabe der 3. Auflage der Cantorschen *Vorlesungen* als unzuverlässig betrachtet werden muß.

Nun könnte es scheinen, als ob diese Unzuverlässigkeit eigentlich recht belanglos wäre, so daß es genügte, überall wo Herr Cantor „die Schrift des Johannes Hispalensis" oder etwas Ähnliches sagt, den Ausdruck „die Schrift, die in einer Handschrift dem Johannes Hispalensis zugeschrieben wird" einzusetzen. Aber in Wirklichkeit ist die Sache gar nicht so einfach, denn der Traktat *De pratica arismetrice* wird von Herrn Cantor im Kapitel über die Mathematik der Westaraber erwähnt, offenbar nur aus dem Grunde, weil der angebliche Übersetzer[1]) desselben in Spanien lebte, und wenn man in Betracht zieht, teils daß keine Handschrift des Traktats aus der Zeit vor 1200 bekannt ist, teils daß man keine zuverlässige Angabe in betreff des Bearbeiters des Traktates besitzt, so dürfte hieraus folgen, daß die Schrift erst im zweiten Bande der *Vorlesungen* behandelt werden sollte; die Verfasserfrage hat also in diesem Falle einen wesentlichen Einfluß auf die Darstellung.

Aber abgesehen von der Frage, ob die Algorismusschrift, die den Titel *Liber algorismi de pratica arismetrice* hat, wirklich dem Johannes Hispalensis beizulegen sei, gibt es noch einen Punkt, in dem die Cantorsche Darstellung unzuverlässig ist. Herr Cantor nimmt nämlich ohne weiteres an, daß alles, was Boncompagni im zweiten Hefte der *Trattati d'aritmetica* veröffentlichte, dem Traktate angehört, aber Wappler[2]) und Steinschneider[3]) haben darauf hingewiesen, daß die von ihnen erwähnte Handschrift nicht dies alles enthält. Bemerkt man jetzt, daß der eigentliche Algorismus schon auf S. 93 der Boncompagnischen Ausgabe endet und dann mit der Überschrift: „Hic incipiunt regule" eine Sammlung von Sätzen aus Arithmetik, Proportionslehre und Algebra beginnt, die mit dem vorangehenden Algorismus nichts zu tun hat, so wird man veranlaßt anzunehmen, daß die Boncompagnische Ausgabe zwei verschiedene Arbeiten enthält, von denen nur die erste möglicherweise dem Johannes Hispalensis beigelegt werden könnte, während die andere Arbeit (oder richtiger Sammlung von Excerpten) auch in der von Boncompagni benutzten Handschrift anonym ist. Auf diesen Umstand habe ich ebenfalls in meiner oben zitierten Anfrage aufmerksam gemacht, aber dennoch weist Herr Cantor in der 3. Auflage seiner *Vorlesungen* genau wie früher den ganzen Inhalt des zweiten Heftes der *Trattati d'aritmetica* dem Johannes Hispalensis zu. Gewisse Ausführungen des Herrn Cantor im Kapitel über die Mathematik der Westaraber müssen darum meines Erachtens als sehr unzuverlässig bezeichnet werden und durchaus unrichtig ist es sogar, den Namen des Johannes Hispalensis mit dem neunzelligen magischen Quadrat in Verbindung zu setzen, da sich dies Quadrat, soweit bekannt ist, nur in einer einzigen Handschrift, nämlich der von Boncompagni benutzten, findet.[4])

1) Daß der Traktat kaum als eine eigentliche Übersetzung betrachtet werden kann, geht schon aus den Anfangsworten: „Qviquis in quatuor matheseos disciplinis efficacius uult perficere" hervor, und wird noch durch den Ausdruck: „Cuius rei scientia . . . ad totam quadruui disciplinam ualde est necessaria" (siehe die Ausgabe von Boncompagni S. 72) bestätigt.

2) E. Wappler, a. a. O. S. 158—159. 3) M. Steinschneider, a. a. O. S. 47.

4) Siehe G. Eneström, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 186.

Wenn es also dringend zu empfehlen ist, die vorhandene mathematisch-historische Literatur gebührend zu beachten, um Wiederholen von unrichtigen Angaben zu vermeiden, so ist ein solches Beachten nicht weniger empfehlenswert, um die Zahl der unrichtigen Angaben nicht zu vermehren. Eigentlich könnte man wohl mit Recht fordern, daß ein mathematisch-historischer Verfasser, der einen gewissen Gegenstand seiner Wissenschaft behandeln will, außer den schon angedeuteten Gesamtdarstellungen und Zeitschriftenbänden wenigstens die wichtigsten schon vorhandenen Spezialarbeiten über diesen Gegenstand kennt und benutzt. Daß aber dieser Forderung noch allzu wenig Genüge geleistet wird, zeigen uns deutlich gewisse neuere mathematisch-historische Werke, von deren Verfassern man eigentlich eine genaue Beachtung der „Literatur der Frage" erwartet hätte; ich beschränke mich hier darauf, zwei Beispiele zu erwähnen.

In seiner kürzlich erschienenen *Geschichte der Mathematik* widmet Herr S. Günther etwas mehr als eine Druckseite[1]) dem *Tesoro universale*[2]) des Tagliente, und motiviert sein Verfahren damit, daß von dem „inhaltreichen Sedezbüchlein noch recht wenig in der Literatur die Rede war, so daß ein Verweilen bei demselben gebilligt werden dürfte". Nun gibt es seit Jahrzehnten eine sehr verdienstvolle Arbeit, die jedermann, der über ältere italienische mathematische Bücher schreiben will, kennen und benutzen sollte, nämlich Riccardis *Biblioteca matematica italiana*, und zieht man diese Arbeit zu Rate, so ergibt sich, daß Riccardi[3]) auf 7 Spalten teils 27 verschiedene Auflagen des Rechenbuches von Tagliente genau beschreibt, teils zum Schluß ein kurzes aber gutes Résumé des wesentlichen Inhalts des Buches bringt. Überdies verweist Riccardi wiederholt auf eine ausführliche Abhandlung von Boncompagni, und wenn man diese Abhandlung einsieht, so findet man, daß die Behandlung des Rechenbuches von Tagliente darin nicht weniger als 165 Druckseiten in großem Quartformat in Anspruch nimmt[4]), also einen Raum, der der Hälfte der ganzen *Geschichte der Mathematik* des Herrn Günther entspricht! Die Angabe, daß von dem fraglichen Rechenbuche noch recht wenig in der Literatur die Rede war, ist also durchaus unrichtig, und wenn sich Herr Günther die Mühe gegeben hätte, wenigstens die Arbeit von Riccardi einzusehen, so würde er noch eine unrichtige und eine unsichere Angabe vermieden haben können. Die unrichtige Angabe ist, daß die von Herrn Günther benutzte Auflage vom Buchdrucker Antonio de Uberti in Venedig herrührt. Die Worte: „Opus Lucha Antonio de Uberti fē in vinetia", die am Ende vieler (oder vielleicht aller?) Auflagen vorkommen, beziehen sich nämlich nicht auf den Druck, sondern auf eine Multiplikationstafel und der fragliche Uberti ist identisch mit dem von Herrn Günther S. 344 erwähnten Arithmetiker, dessen angebliches Rechenbuch von 1548 in Wirklichkeit nur eine Auflage (die siebente bei Riccardi) des Rechenbuches von Tagliente ist. Die unsichere Angabe ist, daß die von Herrn Günther benutzte Auflage ein Inkunabel ist; die älteste datierte Ausgabe ist vom Jahre 1515

1) S. Günther, *Geschichte der Mathematik* 1. *Von den ältesten Zeiten bis Cartesius*, Leipzig 1908, S. 318—319.

2) Der Haupttitel des Buches ist *Libro de abacho.*

3) P. Riccardi, *Biblioteca matematica italiana* 1:2, Modena 1873—1876, Sp. 482—489.

4) B. Boncompagni, *Intorno ad un trattato d'aritmetica stampato nel 1478;* Atti dell'accad. pontif. de'Nuovi Lincei 16, 1863, S. 139—304.

und weder Boncompagni noch Riccardi hat mit Sicherheit ermitteln können, daß irgendeine der undatierten Ausgaben älter als 1515 sei; im Gegenteil erwähnt Girolamo Tagliente im Vorworte der ersten datierten Auflage von 1515, daß er „in verde e iuuenil etade" sei, und es ist wahrscheinlich, daß Tagliente noch 1515 sehr jung war. Ich gebe gern zu, daß die hier bemerkten Unrichtigkeiten nicht von besonders großem Belang sind, denn in der Güntherschen Arbeit könnte man ohne Schaden den ganzen Passus über Tagliente streichen, aber das ganze Verfahren ist unwissenschaftlich und darum unangebracht.

Das zweite Beispiel entnehme ich aus den Cantorschen *Vorlesungen.*

Noch in der zweiten Auflage, ganz wie in der ersten, kommt im 61. Kapitel des zweiten Bandes folgender Passus vor[1]):

> Die sechste, siebente und achte [Aufgabe am Schlusse der Rudolffschen Algebra] sind kubische Gleichungen, welche aufgelöst werden, nämlich $x^2(10-x)=63$ mit $x=3$, ferner $\frac{x^3-x^2}{2}=605$ mit $x=11$, endlich $x^3=10x^2+20x+48$ mit $x=12$. Aber wie findet Rudolff diese Wurzelwerte? Durch fein ausgeklügelte, in jedem dieser Einzelfälle gerade zutreffende Kunststückchen. Die letzte Gleichung z. B. behandelt er folgendermaßen. Zuerst addiert er 8 auf beiden Seiten, dann dividiert er durch $x+2$, erhält also der Reihe nach $x^3+8=10x^2+20x+56$ und $x^2-2x+4=10x+\frac{56}{x+2}$. Aus dieser letzteren Gleichung bildet er zwei $x^2-2x=10x$ und $4=\frac{56}{x+2}$, welchen beiden $x=12$ genügt. Das ganz Zufällige dieser Auflösung leuchtet ein. In der vorgelegten Gleichung stimmt die Zerlegung, in anderen würde sie Widersprechendes zutage fördern. Rudolff . . . tastete nach allerlei Kunstgriffen, welche diese Wurzelwerte ihn finden ließen, aber daß er auch nur auf dem Wege zu einem methodischen Auflösungsverfahren gewesen sei, kann man nicht behaupten.

Hier wird also dem Rudolff eine bestimmte Behandlungsweise der Gleichung $x^3=10x^2+20x+48$ beigelegt, und daraus werden gewisse Folgerungen gezogen. Nun gibt es in betreff der deutschen Algebra im 16. Jahrhundert eine Arbeit von Treutlein, die auf eingehendem Quellenstudium gegründet ist, und sehr zuverlässige Notizen über denselben Gegenstand bringt Gerhardts *Geschichte der Mathematik in Deutschland* Zieht man diese zwei Arbeiten zu Rate, so findet man:

1. daß Treutlein[2]) die zwei Aufgaben, die auf die Gleichungen $x^2(10-x)=63$ und $\frac{x^3-x^2}{2}=605$ führen, erwähnt und dann hinzufügt: „Rudolff fügt freilich ihre Lösungen ($x=3$ und $x=11$) bei, kennt aber natürlich kein allgemeines Verfahren zu deren Auffindung";
2. daß Gerhardt[3]) ebenfalls diese zwei Aufgaben erwähnt mit der Bemerkung: „Rudolff fügt auch die Wurzeln hinzu, ohne sich jedoch über den Weg der Lösung auszusprechen".

Weder Treutlein noch Gerhardt spricht also von der Gleichung $x^3=10x^2+20x+48$ und aus Gerhardts Bemerkung geht hervor, daß bei Rudolff überhaupt keine „fein ausgeklügelten Kunststückchen" vorkommen. In der Tat bezieht sich der

1) M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 2[1], Leipzig 1892, S. 391; 2[2], Leipzig 1900, S. 426—427.

2) P. Treutlein, *Die deutsche Coss;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 2, 1879, S. 88.

3) C. I. Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland,* München 1877, S. 59.

CANTORsche Bericht nicht auf die Originalausgabe der RUDOLFFschen Algebra, sondern auf die von Herrn CANTOR benutzte, 29 Jahre später erschienene und wesentlich ergänzte Neuausgabe von STIFEL, und überdies führt die 8. Aufgabe bei RUDOLFF-STIFEL nicht auf die Gleichung $x^3 = 10x^2 + 20x + 48$ (diese Gleichung ist ein Zusatz von STIFEL bei der Behandlung der siebenten Aufgabe), sondern auf die Gleichung $x^3 + 75x^2 + 1875x + 15625 = 42875$, die sofort auf $(x + 25)^3 = 42875$ reduziert werden kann. Durch ungenügende Berücksichtigung der Arbeiten von TREUTLEIN und GERHARDT hat Herr CANTOR also unnötigerweise unrichtige Angaben gebracht. Es ist wahr, daß das CANTORsche Referat wesentlich verbessert werden kann, wenn man nur STIFEL statt RUDOLFF einsetzt, aber als STIFEL die neue Ausgabe von RUDOLFFS Algebra redigierte, kannte er schon die allgemeine Lösung der kubischen Gleichungen, so daß das Referat ohne Interesse ist. Jedenfalls werden die Folgerungen hinfällig, die daraus gezogen worden sind.

Außer den unrichtigen Angaben, die hauptsächlich auf ungenügender Literaturkenntnis beruhen, gibt es in den neuesten mathematisch-historischen Arbeiten noch eine sehr große Anzahl, die von Mißverständnissen verschiedener Art herrühren. Zuweilen liegt es so nahe, eine ältere Angabe zu mißverstehen, daß es kaum vermieden werden kann, z. B. wenn ein mathematisch-historischer Verfasser bemerkt, daß bei BERNELINUS „das Einmaleins" mit Ausnahme der Produkte gleicher Faktoren vorkommt[1]) und ein anderer diese Bemerkung dahin deutet, daß bei BERNELINUS die Diagonalreihe frei gelassen ist[2]); hier ist es ja fast unmöglich zu erraten, daß „das Einmaleins" nicht das gewöhnliche Einmaleins, sondern eine Sammlung von 36 besonderen Multiplikationsregeln bedeutet.[3]) Zuweilen wird eine Stelle einer Quellenschrift ungenau wiedergegeben oder übersetzt oder unrichtig gedeutet. Viele unrichtige oder wenigstens unzuverlässige Angaben sind dadurch entstanden, daß man aus einer allgemeinen Hypothese, die nur in einem sehr beschränkten Sinne richtig sein kann, weitgehende Folgerungen gezogen hat.[4]) In den meisten der erwähnten Fälle beruhen die Fehler in erster Linie auf unkritischer Behandlung des benutzten Materials. Natürlich stößt man zuweilen auch auf reine Flüchtigkeits-, Schreib- oder Druckfehler.

Daß die im vorhergehenden erwähnten unrichtigen, unzuverlässigen oder irreleitenden Angaben älteren und neueren Datums früher oder später berichtigt werden müssen, kann wohl kaum in Abrede gestellt werden, denn für eine historische Wissenschaft ist es gewiß nicht gleichgültig, ob in den neuesten Darstellungen Hunderte von Fehlern vorkommen. Dagegen könnte es zweifelhaft sein, ob es angebracht sei, schon jetzt

1) Siehe M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 1^3, S. 881.

2) Siehe J. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik* 1, Leipzig 1902, S. 69.

3) Siehe G. ENESTRÖM, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 415.

4) Siehe hierüber G. ENESTRÖM, *Über die Bedeutung historischer Hypothesen für die mathematische Geschichtsschreibung;* Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S 1—8.

besondere Arbeit für den fraglichen Zweck aufzuwenden. Solange nämlich große Gebiete der Geschichte der Mathematik höchst unvollständig bearbeitet sind, könnte man meinen, daß es besser wäre, wenn die Fachgenossen in erster Linie diese Gebiete behandelten und sich vorläufig auf Verbesserung der wichtigsten Unrichtigkeiten beschränkten. Die übrigen Fehler könnten ja gelegentlich berichtigt werden im Zusammenhang mit Neubearbeitungen der betreffenden Gegenstände.

Dieser Ansicht kann ich indessen nicht beipflichten. Zuerst ist es oft recht schwierig zu ermitteln, welche Fehler weniger wichtig sind, denn aus anscheinend unwesentlichen Angaben können zuweilen wichtige Folgerungen gezogen werden, und wenn die Angaben zum Teil unrichtig sind, so werden auch die Folgerungen davon beeinflußt. Aber ausschlaggebend für meine Auffassung ist der Umstand, daß die zahlreichen, in gewissen der neuesten Darstellungen vorkommenden, Ungenauigkeiten mit einer bisher allzu gewöhnlichen unwissenschaftlichen Behandlung der Geschichte der Mathematik zusammenhängen. Welche diese Behandlungsweise ist, dürfte aus dem Vorhergehenden klar sein: sie wird durch ungenügende Berücksichtigung der vorhandenen mathematisch-historischen Untersuchungen und unkritische Bearbeitung des benutzten Materials gekennzeichnet, und sie ist dadurch veranlaßt worden, daß die älteren Verfasser auf mathematisch-historischem Gebiete keine wirkliche Schulung hatten, sondern mehr oder weniger dilettantenmäßig arbeiteten. Solange nun Darstellungen dieser Art neu herausgegeben und fast überall wesentlich lobend erwähnt werden, ist es zu fürchten, daß jüngere Verfasser auf dem mathematisch-historischen Gebiete sich derselben unwissenschaftlichen aber bequemen Arbeitsmethode bedienen werden. Denken wir uns z. B., daß ein ordentlicher Professor an einer größeren deutschen Universität kürzlich eine Darstellung der höheren Analysis veröffentlicht hätte, in der er unter Berufung auf die *Lectiones mathematicae* des Johann Bernoulli die Formel $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ auch für den Fall $m = -1$ benutzte und also das unbestimmte Integral $\int \frac{dx}{x}$ gleich ∞ setzte, so ist es wohl fast sicher, daß einige seiner Schüler, die nur seine Arbeit eingehend studiert hatten, dadurch veranlaßt sein würden, dasselbe Verfahren anzuwenden und die Richtigkeit der Formel $\int \frac{dx}{x} = \log x$ anderer Verfasser zu bezweifeln; unter solchen Umständen wäre ja die Hervorhebung der Unrichtigkeit des Satzes $\int \frac{dx}{x} = \infty$ fast als eine Pflicht zu betrachten. Nun ist freilich die von mir gemachte Voraussetzung so undenkbar, daß sie geradezu lächerlich erscheinen muß, aber in betreff der Geschichte der Mathematik

findet wirklich etwas Ähnliches statt[1]), und solange man nicht kräftige Maßregeln ergreift, um für die Zukunft die Veröffentlichung von Darstellungen der Geschichte der Mathematik zu vermeiden, die rein elementare Fehler enthalten, kann man nicht hoffen, daß die ältere unwissenschaftliche mathematisch-historische Arbeitsmethode bald in Fortfall kommt und die Folgen derselben beseitigt werden. Wie es jetzt ist, kann die Mühe, die junge Fachgenossen bei ihren mathematisch-historischen Untersuchungen aufwenden, in gewissen Fällen nicht nur unnütz, sondern sogar für die mathematisch-historische Forschung schädlich werden.

Aber die unwissenschaftliche Behandlung der Geschichte der Mathematik, von der ich schon gesprochen habe, führt mit sich auch einen anderen Übelstand. Wenn nämlich Mathematiker, die nicht zugleich Historiker sind, ersehen, daß auch sehr gelobte mathematisch-historische Arbeiten eine große Zahl von unzuverlässigen Angaben und unkritischen Behauptungen enthalten, so bekommen sie leicht die Ansicht, daß die Geschichte der Mathematik als wirkliche Wissenschaft noch nicht existiere, und daß eigentlich keine besondere Sachkunde oder Schulung nötig sei, um eine mathematisch-historische Arbeit zu verfertigen. Haben sie dann irgendeinen Anlaß, historische Artikel über gewisse mathematische Gegenstände zu wünschen, so kann es leicht eintreffen, daß sie sich für diesen Zweck an Personen wenden, denen gewisse sehr wichtige Voraussetzungen für wirklich wissenschaftliche Forschung auf dem mathematisch-historischen Gebiete durchaus fehlen. Auf diese Weise kann eine angeblich mathematisch-historische Arbeit verfertigt und zum Druck befördert werden, wodurch die schon vorhandene Zahl von unrichtigen Angaben sehr vergrößert wird und die alten Unrichtigkeiten weiter verbreitet werden. Wir brauchen nicht weit zu gehen, um ein Beispiel einer Arbeit dieser Art zu bekommen.

Im Jahre 1906 erschien als 1. Ergänzungsband des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung ein Bericht *Über die Entwicklung der Elementar-Geometrie im XIX. Jahrhundert* von Herrn Max Simon. Mit Recht hat Herr Felix Müller hervorgehoben[2]), daß die Aufgabe, die Entwickelung der Elementargeometrie im 19. Jahrhundert darzustellen, eine äußerst schwierige ist; nimmt man jetzt hinzu, daß die früheren Arbeiten des Herrn Simon auf dem mathematisch-historischen Gebiete ganz besonders durch Mangel an wissenschaftlicher Arbeitsform und an Objektivität sowie durch eine ungewöhnlich große Zahl von Flüchtigkeitsfehlern gekennzeichnet sind, so ist es klar, daß man im voraus Herrn

---

1) Vgl. meine Besprechung der 3. Auflage des 1. Bandes der Cantorschen *Vorlesungen* in der Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 398—406.

2) Felix Müller, Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 407.

Simon als durchaus inkompetent, den Bericht zu erstatten, betrachten konnte, und daß seine Arbeit jedenfalls sehr viele Unrichtigkeiten enthalten mußte. In Wirklichkeit wird dies vorläufige Urteil durch die Arbeit selbst auf eine geradezu verblüffende Weise bestätigt; die Zahl der Unrichtigkeiten ist so groß, und die verschiedenen Arten von Fehlern sind so vollständig darin vertreten, daß man den „Bericht“ als ein lehrreiches Beispiel, wie eine wissenschaftliche Arbeit nicht verfaßt werden sollte, benutzen kann. Eigentlich darf man kaum sagen, daß die Arbeit verfaßt ist, denn sie ist vielmehr eine zum Abdruck gebrachte Sammlung von unbearbeitetem oder ungenügend bearbeitetem Material zu einer literarischen Arbeit. Unter solchen Umständen muß man staunen, wenn man im Vorworte des Herrn Simon liest, daß der angebliche Bericht, der ursprünglich für die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* bestimmt war, nicht sofort, sondern erst nach vier Jahren abgelehnt wurde; kaum weniger fällt es auf, daß derselbe auf Anregung des Herrn F. Klein mit dem oben angeführten Titel unter den Schriften einer wissenschaftlichen Gesellschaft veröffentlicht worden ist. Meines Erachtens kann dies nur so erklärt werden, daß die Existenz der wirklich wissenschaftlichen mathematisch-historischen Forschung einem der leitenden deutschen Mathematiker unserer Zeit unbekannt geblieben ist. Es mag sein, daß die Resultate der von Herrn Simon im Interesse der Sache aufgewandten Mühe verdienen konnten, den Mathematiklehrern zugänglich gemacht zu werden, aber für diesen Zweck hätte man ein anderes Verfahren anwenden sollen. Zuerst ist der Titel sehr irreleitend; eigentlich sollte er etwa: „Vorarbeiten zu einer Materialsammlung in betreff der Entwickelung der Geometrie, vorzugsweise im 19. Jahrhundert“ lauten. Noch irreleitender ist die Veröffentlichung der Arbeit unter den Schriften einer wissenschaftlichen Gesellschaft[1]), und besonders sind die Worte des im August 1905 datierten Vorwortes, daß der Vorstand der Deutschen

1) Aus gewissen Anzeigen der Teubnerschen Verlagsbuchhandlung scheint hervorzugehen, daß man ursprünglich beabsichtigte, die Simonsche Arbeit in der Teubnerschen Sammlung von „Lehrbüchern“ oder in den Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften zu veröffentlichen. Die 100. Ausgabe des Teubnerschen „Verzeichnisses“ zeigt nämlich (S. 221) eine „Geschichte der Elementargeometrie in Problemen“ von Max Simon für die Sammlung von „Lehrbüchern“ an, und das Heft 1904 : 2 der Teubnerschen „Mitteilungen“ bringt (S. 30) die Voranzeige einer „Geschichte der Elementargeometrie in Problemen mit besonderer Berücksichtigung des 19 Jahrhunderts“ von Max Simon, die angeblich für die Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften bestimmt war. Meiner Ansicht nach wären die schädlichen Wirkungen des Simonschen Buches etwas geringer geworden, wenn es wenigstens nicht im Namen der Deutschen Mathematikervereinigung veröffentlicht worden wäre.

Mathematikervereinigung die Anregung des Herrn F. Klein „willkommen hieß“, zu bedauern; im August 1905 zählte der Vorstand nämlich unter seinen Mitgliedern die Herren A. Pringsheim und P. Stäckel, die beide wirklich wissenschaftliche[1]) mathematisch-historische Untersuchungen ausgeführt haben. Alle diese Umstände müssen dazu beitragen, daß die meisten Leser, die natürlich nicht sachkundig sein können, ohne weiteres den Simonschen „Bericht“ als eine vorzügliche Arbeit betrachten, und daß die meisten der Sachkundigen aus persönlichen Gründen wenig geneigt sind, ihr wirkliches Urteil über die Arbeit öffentlich auszusprechen. Welchen bedauerlichen Einfluß auf die Verbreitung unrichtiger mathematisch-historischer Notizen dies haben wird, ist leicht einzusehen; hier erwähne ich nur ein einziges Beispiel dieser Art. In einem kleinen Orte in Rußland wohnt ein Herr, der sich besonders damit beschäftigt, die Anfragen des Intermédiaire des mathématiciens zu beantworten. Findet er nun eine Anfrage über einen Gegenstand der Elementargeometrie, so schlägt er seinen Simon auf, schreibt die dort vorkommenden Angaben ab und schickt sie an die Redaktion der Zeitschrift, die dann diese Angaben gewissenhaft zum Abdruck bringt.[2]) Ohne Zweifel werden wenigstens einige unrichtige Angaben auf diese Weise viel weiter verbreitet.

Aus den jetzt angeführten Gründen ist es meines Erachtens sehr wichtig, daß die schon vorhandenen zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik einer kritischen Behandlung unterzogen werden. Unter den fraglichen Darstellungen sind ja die Cantorschen *Vorlesungen* die am meisten benutzten, und darum habe ich seit neun Jahren für diesen Zweck eine besondere Abteilung der Bibliotheca Mathematica angeordnet, die schon viele hunderte kritischer Bemerkungen enthält. Von Belang sind ebenfalls kritische Besprechungen anderer neuerschienener Gesamtdarstellungen der Geschichte der Mathematik und auch in dieser Hinsicht habe ich versucht, durch die Bibliotheca Mathematica dem Wiederholen älterer oder neuerer Unrichtigkeiten entgegenzuarbeiten.

Über den Wert einer kritischen Behandlung des Materials, das für neue mathematisch-historische Untersuchungen herbeigeschafft wird, ist

1) Wenn ich in diesem Artikel zwischen „wirklich wissenschaftlicher“ und „unwissenschaftlicher“ oder „dilettantenmäßiger“ Arbeitsmethode unterschieden habe, so will ich dennoch nicht behaupten, daß in betreff derselben ein absoluter Gegensatz stattfinde. Auch eine Arbeitsmethode der ersten Art kann zum Teil unvollkommen sein, und es ist gar nicht unmöglich, daß sie in einigen Jahrzehnten als zu wenig wissenschaftlich bezeichnet wird. Ich meine nur, daß sie wenigstens von den systematischen Fehlern frei ist, die ich als für die „unwissenschaftliche“ Arbeitsmethode charakteristisch hervorgehoben habe.

2) Siehe L'intermédiaire des mathématiciens **14**, 1907, S. 15, 44, 46, 87, 131, 139, 142, 211; **15**, 1908, S. 67.

es ja unnötig, hier etwas hinzuzufügen, denn ich habe gerade mit Rücksicht hierauf die kritische Nachbehandlung des schon vorhandenen Materials dringend empfohlen. Dagegen könnte es angebracht sein, in Erwägung zu ziehen, ob noch etwas anderes getan werden sollte, um die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf den Wert einer kritischen Behandlung des neuen Materials zu lenken. Dabei liegt es nahe, an die Bearbeitung einer besonderen „Anleitung zu mathematisch-historischen Forschungen" zu denken; diese Anleitung sollte also teils direkte Aufschlüsse über die wissenschaftliche mathematisch-historische Arbeitsmethode bieten, teils durch ausgewählte Beispiele aus der vorhandenen mathematisch-historischen Literatur nachweisen, zu welchen Unrichtigkeiten oder Ungenauigkeiten eine fehlerhafte Arbeitsmethode unmittelbar geführt hat und wie schwierig oder unmöglich es gewesen ist zu bewirken, daß diese Unrichtigkeiten nicht weiter verbreitet wurden. Gewiß würde eine solche Arbeit nützlich sein, aber dieselbe als besondere Schrift zu veröffentlichen dürfte mit Rücksicht auf die kleine Zahl der eigentlichen mathematisch-historischen Forscher noch nicht der Mühe lohnen. Dagegen könnte eine „Anleitung" dieser oder ähnlicher Art meines Erachtens sehr gut für den Schlußband der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* passen.

Nun setzt, wie gesagt, jede wirklich kritische Untersuchung eine gewisse mathematisch-historische Schulung voraus, und man könnte meinen, daß es für die mathematisch-historische Forschung schädlich wäre, wenn man zu großen Wert auf diese Schulung legte. Dadurch würde man nämlich viele Mitarbeiter verlieren können, die nicht in der Lage sind, sich diese Schulung zu verschaffen und deren Beistand jedenfalls bei der Bearbeitung gewisser Gegenstände nützlich wäre. In bezug hierauf bemerke ich, daß die besondere mathematisch-historische Schulung in erster Linie bei zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik sowie bei gewissen Spezialuntersuchungen nötig oder wenigstens sehr empfehlenswert ist. Dagegen gibt es viele Gegenstände, deren Behandlung geringe Literaturkenntnis oder geringe kritische Begabung erfordert. Beispielsweise kann man die Geschichte des Abelschen Theorems sehr wohl darstellen, ohne auch nur zu wissen, daß überhaupt eine Fachzeitschrift für Geschichte der Mathematik existiert, und ob die allgemeine Lösung der kubischen Gleichung vor oder nach Euklides entdeckt wurde. Ebenso kann man über eine besondere Arbeit des 17. Jahrhunderts einen guten und nützlichen Bericht erstatten, auch wenn man z. B. der Ansicht ist, daß jede Schrift, worin die Form Archimenides vorkommt, eine direkte und wörtliche Übersetzung aus dem Arabischen sein muß. Auf dem mathematisch-historischen Forschungsgebiete gibt es also Arbeit genug für solche, die in diesem Gebiete tätig sein wollen, ohne Fachmänner im

eigentlichen Sinne zu sein. Was ich bewirken will, ist nur, daß sich diese sozusagen „freiwilligen Mitarbeiter“ auf Gebiete beschränken, die sie imstande sind zu behandeln, ohne unnötigerweise die schon sehr bedeutende Zahl von unrichtigen mathematisch-historischen Angaben zu vermehren.

Viel schwieriger ist es dagegen zu entscheiden, inwieweit man damit einverstanden sein soll, daß Personen ohne hinreichende mathematisch-historische Schulung zusammenfassende Darstellungen bearbeiten. Tatsächlich ist es von Interesse, neue Darstellungen dieser Art zu haben, die den Bedürfnissen bestimmter Gruppen von Lesern entsprechen. So z. B. brauchen wir eine sehr kurze Geschichte der Mathematik für Studenten, etwa wie Balls *Primer of the history of mathematics*, ferner eine etwas ausführlichere Darstellung für Studenten und Lehrer, wo die literarische Seite etwas mehr als in den zwei bekannten Zeuthenschen Büchern berücksichtigt wird, also etwa wie Balls *Account of the history of mathematics*, und endlich eine viel ausführlichere Arbeit für Historiker der Mathematik, etwa wie die Cantorschen *Vorlesungen*. Ebenso kann es nützlich sein, einige speziellere Gesamtdarstellungen zur Verfügung zu haben, z. B. eine Geschichte der Elementargeometrie. Soll man nun festhalten, daß eine ähnliche Arbeit erst dann veröffentlicht werden soll, wenn eine Person mit hinreichender mathematisch-historischer Schulung geneigt ist, dieselbe zu übernehmen? Die Frage ist, wie ich schon bemerkt habe, sehr schwierig, und meines Erachtens muß sie in verschiedenen Fällen verschieden beantwortet werden. Ist es zurzeit unmöglich, einen wirklich sachkundigen Bearbeiter zu bekommen, und kann man eine andere Person finden, die wenigstens bis zu einem gewissen Grade sachkundig ist, so kann es angebracht sein, derselben die Arbeit zu überlassen, aber nur unter der Bedingung, daß das Manuskript vor dem Drucke von einer kompetenten Person durchgesehen wird. Ganz besonderes Gewicht soll darauf gelegt werden, daß keine neue Auflage einer älteren Geschichte der Mathematik, die einen wissenschaftlichen oder pädagogischen Zweck verfolgen will, ohne Mitwirkung eines wirklich sachkundigen Historikers herausgegeben wird. Nur in einem Falle könnte vielleicht gebilligt werden, daß Gesamtdarstellungen ohne solche Mitwirkung erscheinen, nämlich wenn es sich um Kompendien der Geschichte der Mathematik handelt, die ausdrücklich für Liebhaber dieses Gegenstandes bestimmt sind. Die Kompendien dieser Art, die schon existieren, sind nämlich zum größten Teil sehr minderwertig, und auch eine Person ohne besondere mathematisch-historische Schulung könnte sehr wohl eine bessere Arbeit bringen.

Der wesentlichste Inhalt der vorangehenden Ausführungen kann auf folgende Weise zusammengefaßt werden.

1. Die Zahl der unrichtigen, unzuverlässigen oder irreleitenden Angaben der neueren zusammenfassenden Darstellungen der Geschichte der Mathematik ist so groß, daß besondere Maßregeln ergriffen werden sollen, um dieselben zu verbessern;

2. die fraglichen fehlerhaften Angaben beruhen zum größten Teile darauf, daß die meisten bisherigen Verfasser solcher Darstellungen keine besondere Schulung gehabt haben und sich darum oft einer unwissenschaftlichen Arbeitsmethode bedient haben;

3. die kritische Behandlung der schon vorhandenen Darstellungen der Geschichte der Mathematik soll zum Zwecke haben, nicht nur die Unrichtigkeiten zu verbessern, sondern noch mehr die Aufmerksamkeit der Fachgenossen auf den Wert einer mathematisch-historischen Schulung zu lenken;

4. mathematisch-historische Arbeiten, die eine solche Schulung voraussetzen, sollten nur von den eigentlichen Fachmännern besorgt und jedenfalls nicht ohne ihre Mitwirkung herausgegeben werden, während spezielle Untersuchungen, die in erster Linie bezwecken, neues Material zu bringen, in vielen Fällen von anderen Mitarbeitern ausgeführt werden können.

Die Geometrie des Pythagoras.

Von Heinrich Vogt in Breslau.

Inhalt.

Zeugnisse für geometrische Entdeckungen des Pythagoras liegen uns an etwa zwölf Stellen der alten Literatur vor. Aber die ältesten dieser Stellen sind im letzten vorchristlichen Jahrhundert, d. h. 500 Jahre nach Pythagoras, niedergeschrieben und haben nur zweifelhaften Wert. Die beweisende Kraft für unser Wissen um den Geometer Pythagoras liegt in den drei Stellen, in denen Proklus (410—485), der Vorsteher der Neuplatonischen Schule zu Athen, in seinem Kommentar zum ersten Buche der Elemente des Euklid geometrische Leistungen des Pythagoras erwähnt. Dem Proklus standen gute alte Quellen, die für uns verloren sind, zu Gebote[1]), und er ist ein einsichtiger Berichterstatter. Er ist für die ältere griechische Mathematik unser zuverlässigster und ergiebigster Gewährsmann[2]); seine Angaben sind bestimmend gewesen für das Bild von den geometrischen Leistungen des Pythagoras, wie es durch Einzeluntersuchungen allmählich ausgestaltet und in den zusammenfassenden Darstellungen der griechischen Mathematik niedergelegt ist.

Wer Klarheit über Pythagoras' Geometrie schaffen will, der muß mit der Analyse des Proklus einsetzen. Das habe ich getan.[3]) Die Er-

1) Van Pesch, *De Procli fontibus*, Leyden 1900, S. 36—37.

2) Vgl. Tannery, *La géométrie grecque*, Paris 1887, S. 14—17.

3) Für sachkundigen Rat in philologischen Fragen bin ich den Herren P. Feit und O. Rubensohn zu Dank verpflichtet.

gebnisse meiner Untersuchung weichen von der in der Geschichtschreibung der Mathematik herrschenden Auffassung durchaus ab. Sie liegen in der Richtung der Gedanken, welche E. ZELLER seit der zweiten und dritten Auflage seiner *Philosophie der Griechen* (1856 und 1869) über den Forscher PYTHAGORAS und unser Wissen von ihm dargelegt hat; sie bestätigen und erweitern die Resultate, zu welchen G. JUNGE in seiner Schrift *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?* gelangt ist.[1])

§ 1. Der Kommentar zu Euklid I, 47.

Der Kommentar des PROKLUS zu EUKLID I, 47, dem sogenannten pythagoreischen Lehrsatz, hat lange Zeit nur in der Fassung der Ausgabe von GRYNAEUS (Basileae 1533) vorgelegen (S. 110): *Τῶν μὲν ἱστορεῖν τὰ ἀρχαῖα βουλομένων ἀκούοντες τὸ θεώρημα τοῦτο εἰς Πυθαγόραν ἀναπεμπόντων ἐστὶν εὑρεῖν καὶ βουθυτεῖν λεγόντων αὐτὸν ἐπὶ τῇ εὑρέσει.* Erst 1873 wurde aus besseren Handschriften in der Ausgabe von FRIEDLEIN[2]) ἀκούοντες ersetzt durch ἀκούοντας, βουθυτεῖν durch βουθύτην.

BAROZZI übersetzt in seiner lateinischen Ausgabe des PROKLUS[3]) unsere Stelle: „Si eos quidem qui antiqua enarrare volunt audiamus, praesens Theorema ad PYTHAGORAM referentes inveniemus, et dicentes eum cum id invenerit bovem immolasse“.

BRETSCHNEIDER[4]) gibt nebeneinander den Text nach GRYNAEUS und die Übersetzung nach BAROCIUS: „Hören wir die, welche alte Geschichten erzählen wollen, so ist dies Theorem auf PYTHAGORAS zurückzuführen, der der Erfindung halber einen Stier geopfert haben soll“.

So sehen wir die Übersetzung des BAROCIUS nach drei Jahrhunderten bei BRETSCHNEIDER wieder aufleben; ihre Nachwirkung ist auch heute, nach Erscheinen der FRIEDLEINschen Ausgabe, noch nicht erloschen.

Und doch ist die BAROCIUS-BRETSCHNEIDERsche Übersetzung unserer Stelle unmöglich; ja die Stelle gibt mit der Lesart ἀκούοντες überhaupt keinen Sinn.[5]) Der einzige Nominativ ἀκούοντες müßte Subjekt sein; das

1) Halle a. S. 1907. Aus „Novae Symbolae Joachimicae“; vgl. Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 62. — Wenn S. GÜNTHER in seiner jüngst erschienenen *Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1908, S. 56, 57) die JUNGEsche Richtung als „der neuesten Zeit“ angehörig und „radikal“ charakterisiert, so übersieht er, daß der besonnene ZELLER diese Richtung vor einem halben Jahrhundert eingeschlagen hat, und daß Philosophen und Philologen ihm längst gefolgt sind.

2) a. a. O. S. 426. 3) Patavii 1560, S. 270.

4) *Die Geometrie und die Geometer vor EUKLIDES*, Leipzig 1870, S. 80.

5) BAROCIUS hat vielleicht aus anderen ihm zur Verfügung stehenden Handschriften (vgl. FRIEDLEIN, a. a. O. praefatio S. III, IV) die Lesart ἀκούοντας benützt; doch wird dies unwahrscheinlich gemacht dadurch, daß er die Lesart βουθυτεῖν des GRYNAEUS stehen läßt.

einzige Verbum finitum aber, welches als Prädikat in Frage kommen könnte, wäre ἐστὶν εὑρεῖν; — und so konstruieren Barocius und Bretschneider auch: „wenn wir hören, finden wir" —. Das ist aber eine griechisch ganz unmögliche Verknüpfung statt ἀκούουσιν (oder allenfalls ἀκούοντας) ἐστὶν εὑρεῖν. Ferner fehlt bei dieser Zuordnung das Objekt zu εὑρεῖν; man hat dazu die Genetive ἀναπεμπόντων καὶ λεγόντων mißbraucht, indem man den Genetiv βουλομένων von ἀκούοντες abhängen läßt.

Hankel[1]) übersetzt in offenbarer Anlehnung an Bretschneider: „Wenn wir die, welche alte Geschichten erzählen wollen, hören, so finden wir, daß sie dieses Theorem auf Pythagoras zurückführen".

Cantor[2]) gibt keine volle Übersetzung der Stelle, sondern nennt die, „welche Proklus als seine Gewährsmänner anführt": „die, welche Altertümliches erkunden wollen".[3]) Er begründet diese Abweichung von Bretschneider mit den Worten: „Das Wort ἱστορεῖν besitzt bei Proklus nirgend eine spöttische Nebenbedeutung, man darf also nicht, wie es geschehen ist, übersetzen 'die alte Geschichten erzählen wollen'", und akzeptiert im übrigen, wie auch aus der Ausnutzung der Stelle hervorgeht, die Bretschneidersche Übersetzung.[4])

Tannery[5]) übersetzt: „Si l'on écoute ceux qui veulent raconter l'histoire des anciens temps, on peut en trouver qui attribuent ce théorème à Pythagore et lui font sacrifier un bœuf après sa découverte".

Fast alle Autoren sehen, diesen Übersetzungen gemäß, in der Äußerung des Proklus die mehr oder minder bestimmte Versicherung, daß Pythagoras der Entdecker des Satzes vom Hypotenusenquadrat sei; sie zweifeln nur die Glaubwürdigkeit des Stieropfers an. Bretschneider[6]) sagt: „Daß unter dem, der gern alte Geschichten erzählt, auch hier niemand anderes als Eudemus zu verstehen ist, leuchtet wohl unmittelbar ein, ebenso wie die Fabelhaftigkeit des Stieropfers, das allen pythagoreischen Grundsätzen geradezu widerspricht. *Das Faktum selbst aber, daß Pythagoras jenen Lehrsatz erfunden habe, kann nicht bezweifelt werden, da es im ganzen Alterthum als Thatsache anerkannt wird.*" Er weist hiernach die Ansicht zurück, daß schon die Ägypter wegen Kenntnis des rechtwinkligen Dreiecks 3, 4, 5 als die Entdecker des Quadratsatzes zu betrachten seien. Ebenso bezweifelt Tannery[7]) nur die Verbindung des Stieropfers mit dem Quadratsatz[8]), „ce théorème auquel est resté attaché le nom du sage de

1) *Zur Geschichte der Mathematik im Alterthum und Mittelalter,* Leipzig 1874, S. 97. Hankel hat die Friedleinsche Ausgabe nicht mehr benutzen können.

2) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I³, Leipzig 1907, S. 152.

3) Ebenso S. 179, 180. 4) Ebenso Junge, a. a. O. S. 38.

5) *La géométrie grecque,* S. 103. 6) a. a. O. S. 80. 7) a. a. O. S. 105.

8) Junge gibt (a. a. O. S. 29) Tannerys Ansicht nicht ganz richtig wieder.

Samos. Tout semble indiquer au contraire, que, s'il ne l'a pas emprunté aux Égyptiens, *cette proposition fut une des premières qu'il rencontra et nullement le couronnement de ses recherches*". CANTOR[1]) „will den pythagoreischen Lehrsatz unter allen Umständen dem PYTHAGORAS erhalten wissen". „Sei es darum, daß man den Zeugnissen des VITRUVIUS, des PLUTARCH, des DIOGENES LAERTIUS, des PROKLUS[2]), *so bestimmt sie auch lauten*, wegen ihres späten Datums kein Gewicht beilegen dürfe. Schwerer fallen doch die in die Wagschale, welche PROKLUS als seine Gewährsmänner anführt, die, welche Alterthümliches erkunden wollen, sei damit, wie man gewöhnlich annimmt, EUDEMUS gemeint, oder nicht." „Wir haben uns schon darüber ausgesprochen, daß wir für den Satz vom rechtwinkligen Dreieck PYTHAGORAS selbst als den Entdecker betrachten, und uns wesentlich auf den Bericht bezogen, diejenigen, welche Alterthümliches erkunden wollten, führten den Satz auf PYTHAGORAS zurück."

Anders urteilt HANKEL[3]): „Jene berühmte Erzählung" (vom Opfer)... „wird man demnach aufgeben müssen; doch möchte ich nicht so weit gehen, den Lehrsatz selbst dem PYTHAGORAS abzusprechen, *obgleich keine einzige nur einigermaßen glaubwürdige Nachricht darüber vorhanden ist*." Und dazu die Anmerkung: „PROKLUS, ein einsichtiger Schriftsteller, drückt sich auffallend unbestimmt so aus" (folgt die S. 17 gegebene Übersetzung). „Auch ihm war, wie hieraus hervorgeht, keine sichere Quelle bekannt." In ähnlicher Weise bestreitet VAN PESCH[4]), der keine Übersetzung unserer Stelle gibt, ihre Beweiskraft: „Ex quibus verbis ... apparet PROCLO nondum esse persuasum traditionem illam vera referre".

So gegensätzliche Urteile konnten aus *einer* Stelle herausgelesen werden; und doch ist sie unzweideutig, wenn auch geschraubt stilisiert. Ich konstruiere so: der vorangestellte Genetiv **τῶν ἱστορεῖν βουλομένων** ist gen. partitivus, abhängig von **ἔστιν εὑρεῖν**, **ἀκούοντας** ist Objekt zu **εὑρεῖν**, die nachgestellten Genetive **ἀναπεμπόντων καὶ λεγόντων** hängen von **ἀκούοντας** ab.[5])

1) a. a. O. S. 152, 179, 180.

2) Ebenso ordnen ALLMAN, *On Greek geometry from THALES to EUKLID* (Hermathena **3**, 1879, S. 183) und MAX SIMON, *EUKLID und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig 1901, S. 66, PROKLUS ohne Unterschied in die Reihe der Zeugen VITRUVIUS, DIOGENES LAERTIUS und PLUTARCH ein. — Auch S. GÜNTHER, *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft* V, 1 (Nördlingen 1888), S. 29 weist ohne Bedenken den Quadratsatz dem PYTHAGORAS zu; ebenso in seiner *Geschichte der Mathematik* (Leipzig 1908), S. 55. Ebenso TROPFKE, *Geschichte der Elementar-Mathematik* II, Leipzig 1903, S. 71.

3) a. a. O. S. 97. 4) a. a. O. S. 79.

5) So wird auch das Gezwungene der TANNERYschen Übersetzung vermieden, welche *ἀκούοντας* im Sinne von *ἀκούουσιν* nimmt, davon direkt **τῶν βουλομένων** abhängen läßt und das Objekt zu **εὑρεῖν** in den an **βουλομένων** attrahierten Genetiven **ἀναπεμπόντων καὶ λεγόντων** findet.

Demnach übersetze ich wörtlich: „*Unter denen, welche das Altertum erforschen wollen, kann man einige finden, welche denen Gehör geben, die dieses Theorem auf* Pythagoras *zurückführen und ihn als Stieropferer bei dieser Gelegenheit bezeichnen*“; und dem Sinne nach: „*Einige Altertumsforscher schenken den Schriftstellern Glauben, welche diesen Lehrsatz bis zu* Pythagoras *hinaufrücken und von seinem Stieropfer erzählen*“.

Nach der früher angenommenen Übersetzung sieht Proklus die Gesamtheit der alten Autoren vor sich und findet unter ihnen einige, welche den Quadratsatz dem Pythagoras in Verbindung mit dem Stieropfer zuschreiben. *Objektive* Bedenken kann dies Zeugnis nur dadurch erregen, daß die Entdeckung des Quadratsatzes mit dem ganz verdächtigen blutigen Opfer verknüpft wird, und daß nur *einige* Autoren, nach der Opferzutat zu schließen, nicht gerade die ältesten und besten, den Bericht geliefert haben; eine *subjektive* Unsicherheit des Proklus kann nur in dem ἀκούοντας „wenn wir die hören“ oder „wenn wir denen Gehör schenken“ gefunden werden. Immerhin gibt diese Übersetzung jeder der verschiedenen oben dargelegten Auffassungen von der Zeugniskraft unserer Stelle Raum.

Anders, wenn meine Übersetzung die richtige ist. *Alsdann sieht* Proklus *zwei getrennte Generationen von Schriftstellern vor sich; die einen, die ἱστορεῖν βουλόμενοι, sind die Jüngeren, vielleicht sogar seine Zeitgenossen. Die Älteren sind die Gewährsmänner der Jüngeren; sie sind es, welche in Verbindung mit der Opfererzählung den Quadratsatz dem* Pythagoras *zugeschrieben haben. Nur einige aber von den Jüngeren, so sagt* Proklus, *messen jenen Älteren Glaubwürdigkeit bei.*

Welches sind nun jene älteren Zeugnisse? Offenbar keine anderen als solche, wie wir sie heute in jenen oben (S. 15) erwähnten Schriftstellen noch in Händen haben.[1]) Die Nachricht von Pythagoras' Stieropfer taucht für uns zuerst bei Cicero[2]) (44 v. Chr.) auf, in Beziehung gesetzt zu einer geometrischen Entdeckung, nicht speziell zu dem Quadratsatz, aber wegen des blutigen Opfers schon bei ihrem ersten Auftreten angezweifelt; sodann bei Vitruv[3]) (etwa 16—13 v. Chr.) verbunden mit dem auf das rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5 beschränkten Quadratsatz; zweimal bei Plutarch[4]) (ca. 46—120) in unsicherer Zuordnung zum

1) Diese Schriftstellen sind zusammengestellt in allen Auflagen von Zeller, *Philosophie der Griechen;* in I_1^5 1892 stehen sie S. 320, 2. Die wichtigsten finden sich übersetzt in Allman, *Greek Geometry,* S. 181—185, Tannery, *La géométrie grecque,* S. 104 und alle in Junge, *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?,* S. 27—30. — Allgemeiner handeln über Pythagoras' Mathematik: Diog. VIII, 11, Jamblichus, *De vita Pyth.* 88, derselbe, *De communi math scientia* XXII, XXIII und Proklus S. 65.

2) *De natura deorum* III, Kap. 36, § 88.

3) *De architectura* IX, praef.

4) *Non posse suaviter vivi sec. Epic.* XI, 4. *Quaest conviv.* VIII, 2, 4

Quadratsatz oder einer anderen geometrischen Entdeckung des Pythagoras (entweder Flächenanlegung oder Konstruktion einer Figur von gegebener Gestalt und Fläche); bei Athenaeus[1]) (Anfang des II. Saec. n. Chr.) mit Quadratsatz; zweimal bei Diogenes Laertius[2]) (um 200 n. Chr. oder später), einmal mit dem Quadratsatz des Pythagoras, das andere Mal in Konkurrenz mit einem Opfer des Thales für Entdeckung des Satzes vom rechten Winkel im Halbkreise; endlich bei Porphyrius[3]) (233—304) mit Quadratsatz und dem Zusatz, daß nach Angabe der Gewissenhafteren der Stier aus Teig hergestellt war, also nur in effigie geopfert wurde.

Alle diese Zeugnisse haben für uns nur den Wert *eines* Zeugnisses; sie tragen, worauf Tannery[4]) und van Pesch[5]) hinweisen, deutlich die Herkunft aus dem Epigramm[6]) des im übrigen unbekannten Arithmetikers Apollodor (Apollodot) an der Stirn, auf welches Plutarch, Athenaeus und Diogenes sich direkt berufen. Dieses Epigramm, dessen Spuren also zuerst im ersten vorchristlichen Jahrhundert auftauchen, in der Zeit, in welcher mit dem Neupythagoreismus auch die Pythagoras-Legende ausgebildet wurde[7]), können wir nur als eine Legendenbildung ansehen, — kein Geschichtschreiber der Mathematik hat es anders angesehen. *Jetzt sehen wir aus der Proklus-Stelle, daß es auch schon für die urteilsfähigen Historiker seiner und der ihm dicht vorangehenden Zeit ebenfalls eine Legende, keine Geschichtsquelle war. Ist nach der bisherigen Auffassung Proklus in die Reihe der Legendenverbreiter eingestellt worden, so steht er für uns jetzt als einziger ganz außerhalb derselben: er ist ihr Kritiker, und er lehnt sie ab.*

Und dieses legendenhafte Epigramm ist die *einzige* Aussage des ganzen Altertums, an welche sich die Zuweisung des Quadratsatzes an Pythagoras knüpft; das gilt für *unsere* Kenntnis des Altertums; nicht anders war es zu Proklus' Zeit.

Keinesfalls darf bei den *ἀναπέμποντες καὶ λέγοντες*, den Legendenerzählern, an Eudemus gedacht werden, was Bretschneider für sicher, Cantor für möglich hält. Erstens nicht, weil Eudemus für Proklus die beste und sicherste Quelle ist und unmöglich unter solchen Schriftstellern verstanden werden kann, denen nur wenige Glauben schenken; zweitens nicht, weil der Schüler und Mitarbeiter des Aristoteles, wie wir aus den Resten seiner Schriften und aus den Urteilen der Alten wissen[8]), ein

1) X, 418 F. 2) VIII, 12; I, 25. 3) *Vita Pythagorae* 36.

4) a. a. O. S. 105. 5) a. a. O. S. 80.

6) *Ἡνίκα Πυθαγόρης τὸ περικλεὲς εὕρετο γράμμα,*
Κεῖν' ἐφ' ὅτῳ λαμπρὴν ἤγετο βουθυσίην.

„Als Pythagoras die berühmte Figur fand, jene, bei der er das glänzende Stieropfer darbrachte.“

7) Zeller a. a. O. $I_1{}^5$, S. 281; $III_2{}^3$, S. 81, 98—99. 8) Näheres unten S. 26, 27.

knappes, wissenschaftliches Werk über Geschichte der Geometrie geschrieben hat, und in einem solchen Werk für Legenden kein Platz gewesen sein kann, vgl. VAN PESCH[1]): „PROCLI ille locus, quem modo attuli, EUDEMO abiudicandus est et iniuria vulgo adhibetur ad demonstrandum iam EUDEMUM contendisse theorema illud notissimum ipsius PYTHAGORAE fuisse inventum". Ich gehe weiter als VAN PESCH: Wenn PROKLUS außer jenem Epigramm und seinen Verbreitern keine Quelle für das Anrecht des PYTHAGORAS auf den Quadratsatz zu nennen weiß, *so ist dies ein positiver Beweis dafür, daß EUDEMUS den Quadratsatz dem PYTHAGORAS nicht zugeschrieben hat.*

Derselbe selbständig urteilende und sein Urteil nicht verbergende PROKLUS fährt im Kommentar zu EUKLID I, 47 fort: *ἐγὼ δὲ θαυμάζω μὲν καὶ τοὺς πρώτους ἐπιστάντας τῇ τοῦδε τοῦ θεωρήματος ἀληθείᾳ, μειζόνως δὲ ἄγαμαι τὸν στοιχειωτὴν, οὐ μόνον ὅτι δι' ἀποδείξεως ἐναργεστάτης τοῦτο κατεδήσατο, ἀλλ' ὅτι καὶ τὸ καθολικώτερον αὐτοῦ τοῖς ἀνελέγκτοις λόγοις τῆς ἐπιστήμης ἐπίεσεν ἐν τῷ ἕκτῳ βιβλίῳ.* „Auch ich bewundere die ersten Entdecker dieses Lehrsatzes; in höherem Grade aber staune ich über den Verfasser der Elemente, nicht nur weil er für diesen Satz einen ganz klaren, bündigen Beweis führte, sondern weil er auch den verallgemeinerten Satz durch unwiderlegliche Erkenntnisgründe im 6. Buche festlegte."

Mit Recht sieht VAN PESCH in diesen Worten, besonders in dem Plural *τοὺς ἐπιστάντας* „die Entdecker" einen Ausdruck des Zweifels: PROKLUS hat sich begnügt, festzustellen, daß *einige* an die PYTHAGORAS-Legende glauben; er selbst spricht im weiteren nicht von PYTHAGORAS, ja nicht von *einem* bekannten oder unbekannten Entdecker, sondern von *den* Entdeckern. Dieser Plural kann in diesem Zusammenhange nicht als zufällig angesehen werden. Ist es sicher, daß in den vorangehenden Worten die Gewährsmänner, welche den Quadratsatz dem PYTHAGORAS selbst zuschreiben, als unzuverlässig charakterisiert werden, so ist es mindestens wahrscheinlich, daß PROKLUS in den bedingungslos angegebenen *ἐπιστάντες* auf die Kollektivbezeichnung in einer ihm zuverlässig scheinenden Quelle Bezug nimmt.[2])

Von der besprochenen PROKLUS-Stelle ist die zwei Seiten später folgende, ebenfalls auf EUKLID I, 47 bezügliche, nicht zu trennen; nämlich von den beiden Methoden zur Auffindung ganzzahliger rechtwinkliger Dreiecke *τὴν μὲν εἰς Πλάτωνα ἀναπέμπουσι, τὴν δὲ εἰς Πυθαγόραν,* „daß man die eine auf PLATO zurückführt, die andere auf PYTHAGORAS". PROKLUS ist in seinen Quellenangaben sparsam; er pflegt, wenn er dieselbe Quelle mehrmals hintereinander benutzt, sie höchstens einmal zu bezeichnen. Um so

1) a. a. O. S. 80 2) Vgl. unten S. 52.

weniger ist zu erwarten, daß er die umständliche Charakterisierung von S. 426 auf S. 428 wiederholen sollte. Doch liegt in der Wiederaufnahme des Wortes *ἀναπέμπουσιν* ein Hinweis auf die Gewährsmänner von S. 426 und damit auch die Andeutung der gleichen Stellungnahme des PROKLUS.

§ 2. Tendenz des Euklid-Kommentars. Proklus' Philosophie.

Die dritte und letzte der PROKLUS-Stellen, durch welche PYTHAGORAS geometrische Entdeckungen nachgesagt werden, findet sich in dem historischen Überblick, welchen CANTOR das „Mathematikerverzeichnis", JUNGE zutreffender das „Geometerverzeichnis" nennt.[1])

Diese PYTHAGORAS-Stelle, wie das ganze Geometerverzeichnis, ist richtig zu verstehen allein aus dem Zweck des EUKLID-Kommentars und aus der Philosophie des PROKLUS heraus. Es ist deshalb nötig, auf beide einen Blick zu werfen.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, will ich zuerst einige Stellen anführen, in denen an hervorragenden Punkten des Werkes PROKLUS sein Programm mit gar nicht mißzuverstehender Deutlichkeit entwickelt. Am Schluß von Prologus II (84, 8—15), heißt es: „Indem ich mit der Einzeluntersuchung beginne, warne ich meine Leser, das bei mir zu suchen, wovon meine Vorgänger so viel Wesens machen: Einzelannahmen, Einzelfälle und derartiges. Übersättigt hiervon werde ich dergleichen nur selten berühren. Das aber, was theoretischen Gehalt hat und in Beziehung zur Philosophie steht, das soll mein Kommentar vorzugsweise behandeln." Vor dem Übergang zum ersten Lehrsatz (200, 10—18): „Ich wende mich zur Auslegung der EUKLIDischen Beweise. Ich gebe wieder, was die Alten Vollendetes darüber geschrieben haben, indem ich uferlose Wortfülle kürze. Was technisch ausgezeichnet und erkenntnistheoretisch wertvoll ist, das überliefere ich, weil ich mehr auf mustergültige Durcharbeitung Wert lege als auf Mannigfaltigkeit der Fälle und Annahmen, durch die Neulinge sich gerade am meisten angezogen fühlen." Schlußworte des ganzen Werkes (432, 11—19): „Wenn andere Aufgaben mich ablenken sollten, so fordere ich die Freunde dieser Studien auf, nach derselben Methode auch die folgenden Bücher auszulegen, dabei aber stets nach Bedeutsamkeit und Klarheit zu streben. Denn die Kommentare, welche bisher umlaufen, stiften nichts als Verwirrung, weil sie weder Zurückführung auf das Ursächliche, noch dialektische Gliederung, noch philosophische Theorie bringen."

Es gibt nach PROKLUS drei Stufen des Erkennens, die Vernunfterkenntnis (*νοητὴ γνῶσις*), welche unvermittelt auf die reinen, einheitlichen, unteil-

1) ED. FRIEDLEIN, S. 65—68.

baren, immateriellen Ideen gerichtet ist, die Meinung, Wahrnehmung (*δόξα, αἴσθησις*), welche sich auf die sinnlichen, teilbaren, materiellen Dinge bezieht, und dazwischen die vermittelte Erkenntnis, das Denken (*διάνοια, λογισμός*), dessen Objekte höher als das materielle Teilbare, aber niedriger als das intelligible Unteilbare stehen (3, 14—4, 8). Zu diesen Mitteldingen gehören die mathematischen Gebilde; deshalb nimmt das mathematische Erkennen eine Mittelstellung zwischen dem sinnlichen und dem ideellen Erkennen ein (*μεσότης τῶν μαθηματικῶν*). Die Mathematik ist nicht selbst höchste Erkenntnis (*πρώτη ἐπιστήμη*), aber sie kommt der höchsten Erkenntnis am nächsten; sie geht nicht auf das absolute Voraussetzungslose, aber auf die in der Eigenart der Seele liegenden Bedingungen und dadurch auf die Gründe des Mannigfaltigen und der Erscheinungswelt (30—32).

Denn die Platonische Philosophie stellte sich dieselbe Frage wie die Kantische: Woher stammt die Genauigkeit und absolute Sicherheit (*ἀκρίβεια, ἀσφάλεια, ἀνέλεγκτον*) der mathematischen Wahrheiten (12, 13—14)? Die Antwort lautet zunächst so wie die Kantische: Die Genauigkeit und Sicherheit der Mathematik wäre unerklärbar, wenn die mathematischen Wahrheiten aus der Wahrnehmung (*αἴσθησις*) abgeleitet wären, die Seele also aus den materiell vorhandenen Dreiecken und Kreisen nachträglich in sich die Gestalt des Dreiecks und des Kreises und ihre Gesetze ableiten müßte[1]) (12—14).

Von hier an aber ist die Platonische Wendung eine andere als die Kantische. Nach Kant liegen in der Seele Raum und Zeit als leere Formen, als Möglichkeiten, die angewendet auf die Erscheinung überhaupt erst Erfahrung liefern; außerhalb der möglichen Erscheinungswelt gibt es keine Erkenntnis. Nach Plato aber liegen die Wesensvorbilder (*παραδείγματα κατ' οὐσίαν*, 13, 9) der mathematischen Gestalten und Gedanken als reine, immaterielle, unvergängliche, unteilbare, voraussetzungslose Ideen in der Seele vorgebildet; die Seele erzeugt selbst die mathematischen Gebilde als Projektionen (*προβολαί*, 13, 10) der in ihr vorhandenen Formen. Die reinen mathematischen Gebilde sind die in Schmerzen geborenen Kinder der ewigen Ideen (13, 22—26). In der Erscheinungswelt aber sind die Ideen an das Wesenlose, Nichtseiende gebunden, materiell, geteilt, voraussetzungsvoll, vergänglich; ihre Erkenntnis unsicher (*αἴσθησις, δόξα*). Die Figur des Kreises, welche die Sinnenwelt bietet, entbehrt der Genauigkeit, Sicherheit und Reinheit; auch das Vorstellungsbild (ὁ *ἐν φαντασίᾳ κύκλος*) des Kreises ist nicht eines, sondern aus Einheit und Mannigfaltigkeit gemischt, nicht reine Form,

1) van Pesch, a. a. O. S. 33: „Non parvam igitur similitudinem inter Procli sententiam et Kantianam doctrinam de spatii praenotionibus nostris deprehendimus".

sondern dargestellte Form; erst der Kreis im Denken ist einer und unteilbar und nicht auseinandergelegt (*εἷς καὶ ἁπλοῦς καὶ ἀδιάστατος*, 54, 5—13).

Die Mittleraufgabe der Mathematik ist es nun, die unreine, in der Sinnenwelt anhebende Erkenntnis zur reinen Erkenntnis des Unvergänglichen zu läutern und zu erheben. Dadurch wird sie zur unentbehrlichen Vorstufe der Philosophie; sie soll in einem besonderen Falle der Seele die Fesseln der Sinnenwelt abnehmen und damit überhaupt ihren Blick für die Erkenntnis des Ganzen reinigen (28, 3—7). *ὥτουσὶ καὶ τῆς μαθηματικῆς τὸ τέλος εἰς νοῦν ἀναπέμπειν προσήκει καὶ τὴν σύμπασαν σοφίαν* (28, 10—11). „So gehört es sich, das Ziel der Mathematik auf Vernunfterkenntnis und die Weisheit als Ganzes zu richten."

Diesem Ziele strebt die Mathematik zu, indem sie mit der Einzelerkenntnis, die sich aus der Wahrnehmung, ja aus dem menschlichen Bedürfnis ergibt (29, 4—13), zwar beginnt, aber nicht bei ihr stehen bleibt. Die mathematische Vorstellungskraft wird äußerlich angeregt zur Besinnung auf die in der Seele vorgebildeten Formen (*ἀνάμνησις* 18, 16—20); dann aber muß sie die Sinnenwelt, den Augenschein, welche den Ausgang bildeten, abstreifen; sie muß von dem, was seinem Wesen nach später und zufällig ist, aufsteigen zu dem, was genetisch das Folgende, wesentlich aber das Vorangehende ist. So baut die mathematische Erkenntnis eine Stufenleiter (35, 11—12) von der *ὕλη* zum *εἶδος*, vom *ἴδιον*, *ἐπὶ μέρος* zum *καθόλου*, von *αἴσθησις*, *δόξα* durch *διάνοια* zum *νοῦς*; entsprechend dem pythagoreischen Merkwort: *σχᾶμα καὶ βᾶμα* (84, 17).[1])

Mit diesen Ausführungen über das Wesen der Mathematik macht Proklus keinen Anspruch auf Originalität (48, 1—5): *Τὰ μὲν δὴ κοινὰ καὶ ἐπὶ πᾶσαν διατείνοντα τὴν μαθηματικὴν ἐπιστήμην ἐν τοῖς προειρημένοις λόγοις τεθεάμεθα τῷ τε Πλάτωνι συμπορευόμενοι καὶ παρὰ τῶν ἄλλων ἀναλεγόμενοι τὰ πρὸς τὴν παροῦσαν πραγματείαν ἡμῖν συντείνοντα νοήματα.* „Das, was sich allgemein auf die gesamte Mathematik bezieht, habe ich in der Vorrede überschaut, indem ich mich an Plato anschloß und auch von anderen[2]) die Gedanken aufnahm, welche den vorliegenden

1) „Figur-Geometrie ist Stufe-Erhebung."

2) Wem Proklus außer Plato und Plotin gefolgt ist, scheint nicht näher untersucht zu sein. Van Pesch geht auf die Quellen von Prologus I nicht ein (außer 70 mit dem Hinweis auf Plotin I, 33 für Proklus 21, 19—24). Nic. Festa bemerkt in seiner Ausgabe von Jamblichus, *De communi mathematica scientia* (Leipzig 1891, Praefatio IX, 2—7): „Id tamen mihi persuasum est Jamblichi librum hunc et Procli in Euclidem commentariorum partem prologi priorem ex eodem fonte manasse; fontem autem ipsum, ut plerumque, ex Platonicis et Aristoteliis rivulis fuisse deductum. Sed de hoc alias." Er gibt im Index unter Proclus zehn zum Teil recht ausgedehnte,

Stoff betreffen.“ Er wandelt in den ausgetretenen Pfaden der Platonischen Schule; aber gerade darum, weil seine Gedankenrichtung unfrei ist[1]), ist sie absolut zwingend für die Tendenz seines ganzen Werkes.

Proklus *wollte* nicht die Elemente aus rein mathematischem Interesse kommentieren; er *wollte* nicht geometrisch-historische Daten in möglichster Reinheit und Vollständigkeit der Nachwelt überliefern; — diese Daten lagen ja zu seiner Zeit vor aller Augen; er konnte nicht wissen, daß uns späten Nachkommen sein Werk der Ersatz für die verschütteten Quellen sein würde, und daß *eine* Zeile Eudemus uns viel wertvoller sein würde als zehn Seiten Proklus. Was er wollte und nach seiner Art wollen mußte, das war, seinen Zeitgenossen, ja seinen Studenten (den *νεαροπρεπεῖς*, *εἰσαγόμενοι*, *ἀκούοντες*) das Beste zu geben, was er hatte: die Mathematik als Teil der Philosophie, die Analyse der Elemente als Einführung in die Philosophie.[2]) Auf diesen Standpunkt müssen wir uns stellen, wenn wir ihn verstehen und ihm gerecht werden wollen.

Aus Proklus' philosophierender Stellung zur Mathematik erklären sich auch manche Besonderheiten seines Urteils, die wir anders gar nicht verstehen würden, so die unbillige Hochschätzung der verallgemeinerten Lehrsätze gegenüber den besonderen. 250, 251 sagt er: „Wir sind zwar dem alten Thales Dank schuldig für die Entdeckung der Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck“; „höhere Bewunderung aber gebührt den Neueren (gemeint ist Geminus), welche diesen Satz verallgemeinert und seine Gültigkeit für alle in sich gleichartigen Linien (*ὁμοιομερής*), d. h. auch für den Kreis und die zylindrische Spirale nachgewiesen haben.“ Die Ausdehnung des Quadratsatzes auf ähnliche Figuren über den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks schätzt er höher ein als die Entdeckung des Quadratsatzes selbst (vgl. oben S. 21). Ja, für uns sehr interessante Einzelsätze, wie die Entdeckung Heros[3]), daß die drei Hilfslinien beim Euklidischen Beweise des Quadratsatzes sich in einem Punkte schneiden, haben für ihn kein Interesse (429, 12—15); er übergeht sie, weil sie nicht Ausgang für weitere Verallgemeinerungen sind.

Wir urteilen in diesen Fällen anders. Wir haben vorzugsweise *historisches* und daneben *psychologisches* Interesse. Deshalb schätzen wir die Leistung des ersten Schrittes viel höher ein als die der folgenden. Auf Proklus' philosophischer Stufenleiter aber steht am höchsten der

---

übereinstimmende Stellen an, die sich noch vermehren lassen. Die versprochene Untersuchung aber hat er nicht geführt.

1) Zeller, a. a. O. 3^2, S. 787; van Pesch, a. a. O. Kap. IV.

2) van Pesch, a. a O. S. 55: „Mathematicen summam philosophiae studio utilitatem afferre censebat Proclus; ergo eam discipulos docebat“.

3) van Pesch, a. a. O. S. 45.

allgemeinste Satz; denn ihm ist καθόλου, καθολικῶς, καθολικώτερον die Zauberformel, welche die Loslösung von ὕλη und αἴσθησις bedeutet.

§ 3. Das Geometerverzeichnis.

Treten wir, so vorbereitet, an das Geometerverzeichnis heran: in seinem Prologus II zählt Proklus von Thales bis zu dem letzten Vorläufer Euklids, Philippus von Mende, 21 Geometer auf. Von den meisten sagt er nichts, als daß sie eben Geometer waren. Er drückt dies in mehreren ganz inhaltlosen Wendungen aus, wie „er beschäftigte sich mit Geometrie“ (zweimal); „er erwarb sich Anerkennung durch geometrische Untersuchungen“ (sechsmal); „er vermehrte die Sätze“ (zweimal); „er erfand vieles“ (dreimal).

Bei denen, über die er nicht so kurz hinweggeht, macht Proklus meist Bemerkungen über methodische Leistungen: Haften an der Wahrnehmung oder Loslösung davon, Verknüpfung mit philosophischer Erkenntnis und besonders Verallgemeinerung der Sätze. Dies geschieht zehnmal: bei Thales, Pythagoras, Plato, Leodamas, Archytas, Theaetet, Leon, Eudoxus, Theudius, Philippus. Abfassung oder Verbesserung der Elemente wird vier Geometern zugeschrieben (Hippokrates, Leon, Theudius, Hermotimus). Genau gekennzeichnete Einzelentdeckungen finden wir nur dreimal: bei Pythagoras, Hippokrates und Eudoxus.

Die Herkunft des Geometerverzeichnisses ist eine der wichtigsten und am meisten behandelten Fragen der Geschichte der griechischen Geometrie.

Als Quelle kommt zunächst des Eudemus Geschichte der Geometrie in Betracht. Proklus hatte sie, darin herrscht jetzt volle Übereinstimmung, zweifellos in Händen[1]); denn noch hundert Jahre später war sie in den Händen von Simplikius und Eutokius; er zitiert sie an vielen Stellen seines Werkes mit Namenangabe, an anderen benutzt er sie ohne Namennennung.[2]) Am Ende des Geometerverzeichnisses selbst weist der Satz οἱ μὲν οὖν τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν „die Geschichtschreiber machen mit diesem (Philippus von Mende, einem Schüler Platos) den Abschluß ihrer Darstellung“, wie von niemand bestritten wird, auf Eudemus hin.

Proklus benutzt Eudemus' Geschichte der Geometrie mit Quellenangabe im ganzen fünfmal: 299, 3 Entdeckung des Scheitelwinkelsatzes durch Thales; 333, 6 Winkelantragung des Önopides; 379, 2 Entdeckung der Summe der Dreieckswinkel durch die Pythagoreer; 352, 14—18

1) Zusammenfassend und abschließend handelt hierüber van Pesch, a. a. O. Kap. III. Vgl. Heiberg, Philologus 43 (1884), S. 345. 2) van Pesch, a. a. O. S. 77—79.

Kongruenzsatz und Entfernungsmessung des Thales; 419, 15 Flächenanlegung der Pythagoreer. Außerdem werden ohne jeden Zweifel auf Eudemus' Geschichte der Geometrie vier weitere Proklus-Stellen zurückgeführt[1]): 157, 11 Halbierung des Kreises durch Thales; 250, 20 Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck von demselben; 283, 7—10 Lotfällen des Önopides; 305, 3 Anlegen von Vielecken um einen Punkt herum zur Ausfüllung von vier Rechten durch die Pythagoreer. Aus diesen neun Zitaten geht der Charakter von Eudemus' Werk deutlich hervor: *alle neun Stellen liefern Angaben über ganz bestimmte geometrische Entdeckungen. Dagegen kommt als Beglaubigung von theoretischen Spekulationen, woran Proklus doch reich ist, ja selbst von Definitionen, Eudemus' Geschichte der Geometrie nie vor.* Für die Winkeldefinition des Eudemus (125, 7) beruft sich Proklus nicht auf die Geschichte der Geometrie, sondern auf ein anderes Werk desselben Verfassers περὶ γωνίας. Die Pythagoreer werden im ganzen achtzehnmal erwähnt; aber nur dreimal ist die Quelle Eudemus, und zwar gerade die dreimal, in denen es sich um bestimmte geometrische Entdeckungen handelt. Die anderen 15 Stellen geben ohne Ausnahme Definitionen, begriffliche Teilungen, methodische, mystische und metaphysische Spekulationen der Pythagoreer — all dieses war offenbar in des Eudemus Geschichte der Geometrie nicht zu finden.

Wir besitzen ferner einen langen Auszug des Simplikius[2]) aus Eudemus, betreffend die Quadratur der Möndchen des Hippokrates, und einen anderen von Eutokius[3]) über die Würfelverdoppelung des Archytas. Alles bestätigt die Vorstellung von des Eudemus Werk, die wir aus Proklus erhalten haben. Zum Überfluß liefert uns Simplikius[4]) noch eine Charakteristik der Darstellungsweise und des Stiles des Eudemus: *ἐκθήσομαι δὲ τὰ ὑπὸ τοῦ Εὐδήμου κατὰ λέξιν λεγόμενα ὀλίγα τινὰ προστιθεὶς εἰς σαφήνειαν ἀπὸ τῆς τῶν Εὐκλείδου στοιχείων ἀναμνήσεως διὰ τὸν ὑπομνηματικὸν τρόπον τοῦ Εὐδήμου κατὰ τὸ ἀρχαϊκὸν ἔθος συντόμους ἐκθεμένου τὰς ἀποδόσεις* — „Ich werde das von Eudemus Gesagte wörtlich mitteilen, jedoch zur Verdeutlichung einige Hinweisungen auf die Elemente des Euklid hinzufügen, wegen der notizenhaften Art des Eudemus, welcher nach alter Sitte nur kurze Angaben macht."

---

1) van Pesch, a. a. O. S. 77—79.

2) *Simplicii in Aristotelis physic. libr. IV priores comment.* ed. H. Diels, Berolini 1882, p. 54—69. Neuerdings leicht zugänglich gemacht durch F. Rudio, *Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates*, Leipzig 1907. Vgl. Biblioth. Mathem. 3_3, 1902, 7—62, 342—349 und 4_3, 1903, 13—18, 118—126.

3) In Heibergs Archimedes-Ausgabe III, S. 98—103.

4) Diels, a. a. O. S. 60; Rudio, a. a. O. S. 46.

Das Geometerverzeichnis des Proklus enthält nun als wesentlichsten Bestandteil methodische Räsonnements, welche dem Werke des Eudemus bestimmt fremd gewesen sind; andrerseits fehlt in ihm jede Erwähnung von gewissen Problemen, welche Eudemus besprochen hat, und welche die Geometrie der zweiten Hälfte des 5. Jahrhunderts beherrscht haben, Würfelverdoppelung, Kreisquadratur, Dreiteilung des Winkels.

So hat die Streitfrage entstehen können: *Hat für das Geometerverzeichnis dem Proklus ein entsprechender Teil der Geschichte der Geometrie von Eudemus als Quelle vorgelegen? Hat er aus dieser direkten Quelle oder aus einer abgeleiteten geschöpft?* Hatte Tannery bestimmt behauptet[1]), daß Proklus seine Angaben nicht dem Eudemus selbst, sondern dem Geminus (1. Jahrhundert v. Chr.) entnommen habe, so kommt van Pesch[2]), der zuletzt diese Frage behandelt hat, nicht zu einer bestimmten Antwort: „Haec fere sunt, quae de nostro loco observare velim, ut ita aliis viam ad hanc quaestionem ad certum finem perducendam patefaciam. Nam equidem, quamquam magis me inclinatum esse confiteor ad illam ex Eudemo epitomen non ipsi Proclo sed excerptatori alicui attribuendam, tamen pro certo id statuere non ausim.“ Cantor dagegen[3]) sieht das Mathematikerverzeichnis als von Eudemus herrührend an.

Nach der in § 2 dargelegten Auffassung des Proklus von der Aufgabe der Mathematik in der Entwickelung der Erkenntnis und der hierauf basierten Tendenz seines Euklid-Kommentars kann für ihn ein Überblick über die Entwickelung der Geometrie nicht der Ort sein, in dem Einzelleistungen aufgezählt werden dürfen, also auch nicht der Ort für einen Auszug aus der Geschichte der Geometrie des Eudemus. Proklus hat offenbar nicht die Absicht, eine vollständige Übersicht über die Entwickelung der Methoden zu geben, aber bei seinem einseitigen Interesse für *methodische* Fortschritte stellt sich ihm ganz von selbst das geschichtliche Resümee unter das philosophische Leitmotiv (65, 1—3): *ἀπὸ αἰσθήσεως οὖν εἰς λογισμὸν καὶ ἀπὸ τούτου ἐπὶ νοῦν ἡ μετάβασις γένοιτο ἂν εἰκότως* „Die natürliche Entwickelung geht von der Wahrnehmung zur Überlegung[4]) und von dieser zur Vernunfterkenntnis.“

So sind die aus dem praktischen Bedürfnis hervorgegangenen Messungen der Ägypter für Thales der Anlaß zu geometrischen Betrachtungen geworden; deshalb nimmt er eine Zwischenstellung ein: „Manches behandelte er allgemein, in anderem blieb er an der Wahr-

1) *La géométrie grecque,* chap. V. 2) a. a. O. S. 84. 3) a. a. O. I², S. 257.

4) *λογισμός* ist hier nicht als „Berechnung“ aufzufassen; denn die Berechnung haftet nach griechischer Auffassung ganz an dem „Besonderen“, den Gegenständen der *αἴσθησις* und führt nicht über sie hinaus. Vgl. hierzu besonders 39, 20—40, 5. Hier ist *λογισμός* im Sinne von *διάνοια* zu verstehen.

nehmung haften".[1]) Den entscheidenden Schritt der Loslösung von praktischen Zwecken zur immateriellen und damit rein intellektuellen Betrachtung tat Pythagoras; *dadurch bahnte er der Geometrie als spekulativer Wissenschaft den Weg. Proklus charakterisiert die einzelnen Geometer nur nach den Fortschritten, die sie auf dieser Bahn gemacht haben, und ferner soweit sie als Vorgänger des Euklid sich durch Abfassung oder Verbesserung der Elemente verdient gemacht haben.*

Diejenigen Geometer, welche nur Einzeltatsachen entdeckt haben, und auch diejenigen, deren Entdeckungen zwar Fortschritte in der ihn interessierenden Verallgemeinerung sind, aber über die Elemente hinausgehen, die findet er mit bloßer Nennung des Namens ab, oder er übergeht sie ganz. Die ihm nach Eudemus wohlbekannten geometrischen Entdeckungen von Thales, Önopides, Hippias erwähnt er wohl im Verlaufe des Kommentars an geeigneter Stelle[2]), aber im Geometerverzeichnis war für sie kein Platz. Würfelverdoppelung, Kreisquadratur, Winkelteilung sind ungelöste Probleme, die Lösungsversuche sind nicht exakt, die bloße Fragestellung ist für Proklus keine methodische Leistung. Die mechanischen Lösungen müssen ihm als Rückfälle in die Empirie und methodisch ganz verwerflich erscheinen; Lösungen durch Kegelschnitte und andere höhere Kurven sind nicht elementar; also dürfen wir uns gar nicht wundern, von diesen ihre Zeit aufs tiefste bewegenden Problemen im Geometerverzeichnis keine Spur zu finden.

Bringt das Geometerverzeichnis mithin gerade das, was Proklus nach seiner Denkweise und nach der Anlage seines Werkes interessieren mußte, läßt er das weg, was nach diesen Rücksichten für ihn nicht in Betracht kam, so wird die, andernfalls unverständliche, Eigenart des Geometerverzeichnisses am besten durch die Annahme erklärt, daß Proklus selbst der Verfasser dieses Geometerverzeichnisses ist.

Seine Hauptgrundlage wird Eudemus' Geschichte der Geometrie gewesen sein; doch sind andere Quellen nicht ausgeschlossen, beruft er sich doch selbst einmal auf Hippias von Elis, ein andermal auf ein Werk Platos; endlich kann manches Niederschlag von Meinungen sein, die,

1) So ist *τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων, τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον* gemäß der Denkweise des Proklus zu übersetzen. Wir dürfen hierin eine Beziehung auf die Verwendung der Kongruenz zur praktischen Ausmessung der Entfernung (352, 16–18) sehen. Das ist auch die Auffassung Tannerys (a. a. O. S. 92), und dem entspricht seine Übersetzung (a. a. O. S. 67): „ses tentatives d'un caractère tantôt plus général, tantôt plus restreint au concret". Dagegen ist die Übersetzung (Bretschneider, a. a. O. S. 28, 42; Cantor, a. a. O. I³ S. 136): „das eine machte er allgemeiner, das andere sinnlich faßbarer" zu verwerfen.

2) Thales 157, 11; 250, 20; 299, 4; 352, 15. — Önopides 283, 7; 333, 6. — Hippias 272, 7; 356, 11.

auf keine Quelle zurückführbar, als Schulüberlieferungen von Generation zu Generation gelaufen waren. Als *Auszug* aber ist das Geometerverzeichnis nur insoweit zu betrachten, als *bloße Namen* und besonders Namen von Verfassern längst verschollener Werke vorkommen; im übrigen ist es, soweit EUDEMUS in Betracht kommt, nicht Auszug, sondern *Reflexion über die Angaben des EUDEMUS;* von den methodischen Bemerkungen und Räsonnements des Geometerverzeichnisses hat im EUDEMUS bestimmt nichts gestanden. Ich glaube mit dieser Erklärung dem Tatbestande besser gerecht zu werden als TANNERY[1]): „Si PROCLUS avait eu ces Livres (d'EUDÈME) entre les mains, il n'aurait point fait l'extrait que nous avons, et il nous aurait fourni en temps et lieu beaucoup plus de détails tirés d'EUDÈME que nous n'en trouvons malheureusement chez lui“.

Geradezu als Ausnahmen sind die Angaben über geometrische Einzelleistungen bei drei Geometern des Verzeichnisses, bei EUDOXUS, HIPPOKRATES und PYTHAGORAS, anzusehen. Von EUDOXUS heißt es (67, 3—8): **πρῶτος τῶν καθόλου καλουμένων θεωρημάτων τὸ πλῆθος ηὔξησεν καὶ ταῖς τρισὶν ἀναλογίαις ἄλλας τρεῖς προσέθηκεν καὶ τὰ περὶ τὴν τομὴν ἀρχὴν λαβόντα παρὰ Πλάτωνος εἰς πλῆθος προήγαγεν καὶ ταῖς ἀναλύσεσιν ἐπ' αὐτῶν χρησάμενος** „er vermehrte zuerst die Zahl der als 'allgemein' bezeichneten Probleme und fügte zu den bekannten drei Proportionen drei neue hinzu; auch vermehrte er die Kenntnis des auf den 'Schnitt' Bezüglichen, welches bei PLATO seinen Anfang genommen hatte, indem er sich hierbei der analytischen Methode bediente“. Die in meiner Übersetzung wiedergegebene Zusammenfassung der Satzteile rechtfertige ich auf folgende Weise: ebenso wie im letzten Teil der Periode die Beschäftigung mit dem 'Schnitt'[2]) nur die Gelegenheit zur Anwendung der analytischen Methode ist, ebenso ist die Erfindung dreier neuer Proportionen eine Verallgemeinerung des Proportionsbegriffs und also selbst ein Beispiel für die Vermehrung der allgemeinen Theoreme.[3]) Faßt man die Stelle so,

1) a. a. O. S. 75.

2) Nach BRETSCHNEIDER (a. a. O. S. 167, 168) und CANTOR (a. a. O. I², S. 240—241) die stetige Teilung; nach TANNERY (a. a. O. S. 68, 3; 76—78) Schnitt des Kegels oder Zylinders.

3) CANTOR (a. a. O. I², S. 238): „EUDOXUS ... war der erste, welcher die Menge der Lehrsätze überhaupt vermehrte“. Ich kann dies nicht für eine sinnentsprechende Übersetzung ansehen. TANNERY (a. a. O. S. 96): „La théorie des proportions, conçue généralement et comme applicable à l'Arithmétique et à la Musique aussi bien qu'à la Géométrie ... c'est sans doute par là qu'il faut expliquer l'expression de théorèmes généraux (**καθόλου**)“. Ich glaube mit TANNERY, daß in dem **καθόλου** in der Tat Bezug genommen wird auf die durch EUDOXUS vollzogene Verallgemeinerung der Proportionslehre; aber ich glaube nicht, daß es sich auf die Ausdehnung der Theoreme auf Arithmetik, Musik und Geometrie bezieht. Dem widerspricht der Gebrauch des Wortes **καθόλου** als eines terminus technicus innerhalb der Geometrie.

so stehen in ihr die Einzelentdeckungen nur als Gelegenheitsbezeichnung von methodischen Fortschritten. Als rein sachliche geometrische Einzelleistungen bleiben dann allein die dem HIPPOKRATES und dem PYTHAGORAS zugewiesenen Entdeckungen übrig.

Beide aber werden in ganz eigenartiger Weise eingeführt 66, 4—8: *ἐφ' οἷς Ἱπποκράτης ὁ Χῖος ὁ τὸν τοῦ μηνίσκου τετραγωνισμὸν εὑρών, καὶ Θεόδωρος ὁ Κυρηναῖος ἐγένοντο περὶ γεωμετρίαν ἐπιφανεῖς. πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν.* — „Nach diesen machten sich in der Geometrie bemerkbar der als Entdecker der Möndchenquadratur bekannte HIPPOKRATES von Chios und THEODORUS von Kyrene. Denn HIPPOKRATES war der erste unter den Genannten, welcher auch Elemente verfaßte.“ Man beachte: der Hauptgrund der Erwähnung des HIPPOKRATES liegt in der Abfassung von Elementen. Daß HIPPOKRATES einer der erfindungsreichsten Köpfe war, daß er sich mit Erfolg an die schwierigsten Probleme seiner Zeit wagte, daß er die Würfelverdoppelung auf die Konstruktion der zwei mittleren Proportionalen zurückführte, daß er durch die Quadratur der Möndchen in genialer Weise die Kreisquadratur zu erzwingen suchte, davon sagt PROKLUS kein Wort. Die Möndchenquadratur selbst erwähnt er, aber wie! Nicht als eine Belehrung des Lesers, sondern, wie es die Art einer solchen partizipialen Apposition ist, in Parenthese als Gedächtnishilfe, als Berufung auf eine bekannte Tatsache.

65, 15—21: *ἐπὶ δὲ τούτοις Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τὰ θεωρήματα διερευνώμενος, ὃς δὴ καὶ τὴν τῶν ἀλόγων* (alii *ἀναλόγων*) *πραγματείαν καὶ τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν.* — „Nach diesen verwandelte PYTHAGORAS die Untersuchung geometrischer Fragen in eine freie (d. h. von praktischen Zielen losgelöste) Wissenschaft, indem er deduktiv die ersten Gründe erforschte und die Lehrsätze immateriell und intellektuell untersuchte. Derselbe hat bekanntlich auch die Handhabung des Irrationalen (andere Lesart: der Proportionen) und die Zusammensetzung (Konstruktion?) der kosmischen Figuren entdeckt.“

Der Hauptsatz enthält das methodische Räsonnement. Was für Quellen PROKLUS hierfür gehabt haben mag, ob er sein eigenes Urteil, ob er Schulüberlieferung gibt, wage ich nicht zu entscheiden. Auf zweierlei aber möchte ich hinweisen, erstens, daß bestimmt nicht an EUDEMUS zu denken ist, zweitens, daß in JAMBLICHUS[1]) (gest. um 333 n. Chr.) das Wesen der Geometrie des PYTHAGORAS ganz ebenso geschildert wird: „Er betrieb die Geometrie philosophisch“; „als Schönstes in ihr begegnet uns

1) *De communi mathematica scientia*, herausgeg. von NIC. FESTA, Leipzig 1891, XXXII, XXXIII (S. 67—68, 70).

das erhabene (ὑψηλόνουν) Wesen, welches zu den ersten Gründen hinaufführt (ἐπὶ τὰ πρῶτα αἴτια ἀναγόμενον), der Theorie wegen die Forschung betreibt und nach dem rein Seienden greift." *Besonders heißt es wörtlich wie bei PROKLUS: Πυθαγόρας τὴν περὶ τὰ μαθήματα φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν.*

Der Nebensatz aber ὃς δὴ ... ἀνεῦρεν bringt, genau wie das Partizipium bei HIPPOKRATES, die tatsächlichen Angaben in Parenthese als etwas von der theoretischen Betrachtung vollständig Losgelöstes, nicht als Belehrung, sondern als Berufung auf ein populäres Wissen, über welches allgemeine Übereinstimmung herrscht.

Diese Art, wie die einzigen isolierten Einzelentdeckungen nicht im eigentlichen darstellenden Text, sondern nebenbei gegeben werden, so daß ihre populäre Verbreitung als Mittel zur Kennzeichnung der Persönlichkeit dient, bestätigt meine Auffassung von der Tendenz des Geometerverzeichnisses und erhält umgekehrt von dieser Tendenz her ihre Beleuchtung.

Die Fremdartigkeit beider Stellen legt den Gedanken nahe, daß sie erläuternde Zutaten eines Überarbeiters oder Abschreibers sein könnten. Auf sie dürfte die Bemerkung von HEIBERG bezüglich FRIEDLEINS PROKLUS-Ausgabe[1]) passen: „für den Text im einzelnen ist aber vieles aus Handschriften und durch Konjekturalkritik nachzutragen". Vergleichung der Handschriften ist mir nicht möglich. Der Verpflichtung, die PYTHAGORAS-Stelle auf ihren inneren Wert und ihre Glaubwürdigkeit kritisch zu prüfen, würden wir auch dann nicht überhoben sein, wenn sie nicht von PROKLUS selbst geschrieben sein sollte.

§ 4. Entdeckung des Irrationalen. Konstruktion der regelmäßigen Körper.

Nach der von FRIEDLEIN in den Text aufgenommenen Lesart ἀλόγων und der üblichen Übersetzung hat PYTHAGORAS *„die Handhabung (Theorie) des Irrationalen und die Konstruktion der kosmischen (regelmäßigen) Körper entdeckt".*

Zunächst ist bemerkenswert, daß an dieser Stelle, welche auf bekannte, für PYTHAGORAS charakteristische Entdeckungen Bezug nimmt, *die* Aussage fehlt, die man, wenn die allgemeine Ansicht richtig ist, als erste erwarten sollte: Auffindung und Beweis des Quadratsatzes durch PYTHAGORAS *Dieses Schweigen, ganz unverständlich, wenn PROKLUS dem PYTHAGORAS diesen populärsten aller Lehrsätze zuschriebe, ist eine höchst bedeutsame Bestätigung meiner in § 1 dargelegten Auffassung von PROKLUS' Kommentar zu EUKLID I, 47.*

Dagegen vertragen sich die Entdeckung des Irrationalen und die Konstruktion der regelmäßigen Körper mit ihr in keiner Weise. Beide

1) Philologus 43, S. 327.

Leistungen setzen unbedingt Kenntnis und Handhabung des Quadratsatzes voraus. Läßt diese Stelle keine andere Lesung oder Deutung zu, so steht sie in unheilbarem Widerspruche zum Kommentar über den Quadratsatz (426).

Ein solcher Widerspruch aber wäre unerträglich. Er wäre erstens so deutlich, daß PROKLUS ihn notwendig gemerkt haben müßte. Zweitens handelt es sich nicht um zwei Aussagen anderer, denen PROKLUS indifferent gegenüberstehen könnte, sondern er bringt in beiden Stellen seine ganz persönliche Ansicht zum Ausdruck, S. 426 zweifelt er *persönlich* die Überlieferung an, S. 65 beruft er *persönlich* sich auf die Überlieferung.

Mir scheint aber, die Entdeckung des Irrationalen und die Konstruktion der regelmäßigen Körper durch PYTHAGORAS steht in ebenso unheilbarem Widerspruche mit allem, was PROKLUS selbst und was andere gute Quellen uns über die Entwickelung der ältesten griechischen Geometrie lehren.

Nach PROKLUS hat THALES (um 640—548) den Lehrsatz von der Gleichheit der Scheitelwinkel (299, 3—4), die Gleichheit der Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck (250, 20—251, 2), die Halbierung des Kreises durch den Durchmesser (157, 10—11), die Kongruenz zweier Dreiecke aus Übereinstimmung einer Seite und der anliegenden Winkel (352, 14—16) entdeckt und die Kongruenzanschauung praktisch zur Bestimmung des Abstandes von Fahrzeugen auf See benutzt (352, 16—18). ÖNOPIDES, den das Verzeichnis als wenig jüngeren Zeitgenossen des ANAXAGORAS nennt, hat zuerst die Aufgabe gelöst (283, 7—10), von einem Punkte auf eine Gerade das Lot zu fällen, und zwar als Hilfsaufgabe zu astronomischen Zwecken; er hat ferner die Konstruktion der Winkelantragung geleistet (333, 5—6). Für alle diese Angaben ist EUDEMUS als Quelle entweder genannt oder unzweideutig gekennzeichnet. Da ANAXAGORAS um 500 geboren und 428 gestorben ist, dürfen wir die Geburt des ÖNOPIDES etwa 490 ansetzen, also seine Blütezeit frühestens 470—450. Mag nun das Ansehen, welches ÖNOPIDES sich als Geometer erworben hat, mit diesen beiden Konstruktionen zusammenhängen oder nicht[1]), mögen wir diese Konstruktionen selbstverständlich so verstehen, daß ÖNOPIDES sie nicht überhaupt zuerst, sondern als erster mit strenger Beschränkung auf Lineal und Zirkel gelöst hat[2]), so geht doch aus den wohlbezeugten und unbezweifelbaren Angaben des PROKLUS so viel mit Sicherheit hervor, daß um 470 noch so einfache Erfindungen zu machen waren, also wie BRETSCHNEIDER[3]) sagt, „die Geometrie noch immer in

1) CANTOR, a. a. O. I^3, S. 191; vgl. unten S. 42.

2) BRETSCHNEIDER, a. a. O. S. 65. 3) a. a. O. S. 65.

den ersten Stadien der Entwickelung war", und „noch nicht weit ausgebildet sein konnte".

Zwischen THALES und ÖNOPIDES steht zeitlich PYTHAGORAS (etwa 570—500); mögen seine Anhänger ihn schon früh für einen Gottbegnadeten und Wundertäter gehalten haben, *wir* können nicht anders als ihn in eine Entwickelungsreihe mit seinen Vorgängern und Nachfolgern stellen. Auch durch die angebliche Geheimhaltung seiner geometrischen Entdeckungen innerhalb seiner Schule dürfen wir ihn nicht der historischen Reihe entrücken, denn diese Geheimhaltung ist eine späte Erfindung.[1]) Für CANTOR[2]) und TANNERY sind die primitiven Konstruktionen des ÖNOPIDES eine große Verlegenheit. *Wegen* ÖNOPIDES schiebt TANNERY[3]) die Abfassung der altpythagoreischen „Tradition touchant PYTHAGORE", des ältesten „cadre des élémens", bis in die Mitte des 5. Jahrhunderts, aber *trotz* ÖNOPIDES glaubt er an weitreichende geometrische Entdeckungen des PYTHAGORAS, von denen der Quadratsatz eine der zeitigeren und geringeren sein soll. Auch BRETSCHNEIDER begeht mit den oben wiedergegebenen Urteilen eine starke Inkonsequenz. S. GÜNTHER[4]) behandelt die Entdeckung des „Hekatombensatzes" durch PYTHAGORAS als ganz gesicherte Tatsache und spricht von ÖNOPIDES, „auf den die *Legende* einige der elementarsten Konstruktionen zurückführt". Das ist konsequent; aber die Konsequenz ist durch eine nicht zu rechtfertigende Verkehrung des Wertes der Quellen erkauft.[5])

Auch die Entdeckungen, welche nicht dem PYTHAGORAS selbst, sondern den Pythagoreern im allgemeinen zugeschrieben werden, müssen wir, wenn wir *verstehen*, nicht *Wunder glauben* wollen, erstens in die allgemeine Entwickelung der Geometrie einreihen und zweitens in sich vom Einfacheren zum Verwickelteren ansteigend denken. Unter diesen Gesichtspunkten fügt sich der Satz von der Winkelsumme im Dreieck (PROKLUS 379) gut zwischen die Entdeckungen des THALES und ÖNOPIDES ein; an die Ausdehnung dieses Satzes auf Polygone und an den Satz des THALES über die Scheitelwinkel schließt sich ebenso natürlich der pythagoreische Satz,

1) ERWIN ROHDE, *Kleine Schriften* II, 108—112. — ZELLER, a. a. O. I^5, S. 329—331, III_2^3, S. 81, 1; 112. ZELLER widerlegt (I^5, S. 330, 2) unrettbar die Deutung, welche TANNERY, JAMBLICHUS, *De vita Pyth.* S. 89 gegeben hat. Damit fallen die „weiteren Kombinationen" aus der Geheimlehre, also auch „La tradition touchant PYTHAGORE". Dagegen spricht auch PROKLUS (66, 7—8) *πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν.*

2) a. a. O. I^3, S. 190—191. 3) a. a. O. S. 86, 105.

4) *Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft* 5:1, Nördlingen 1888, S. 29, 30.

5) SUTER, *Geschichte der mathematischen Wissenschaften* I^3, Zürich 1873, S. 26 sucht sich dadurch zu helfen, daß er „entweder die Angaben des EUDEMUS als unrichtig betrachtet oder die Lebenszeit des ÖNOPIDES viel weiter hinaufrückt".

daß von regelmäßigen Figuren allein sechs Dreiecke, vier Quadrate, drei Sechsecke sich um einen Punkt herum so zusammenschieben lassen, daß sie vier Rechte ausfüllen (Proklus 301, 305).

Einer ganz anderen Gedankenreihe aber gehört die pythagoreische Flächenanlegung im weitesten Sinne (παραβολή, ὑπερβολή, ἔλλειψις; Proklus 419, 420) an. Flächenmessungen, Flächenvergleichungen und Verwandlungen werden gewiß schon im Anfang der griechischen Geometrie gestanden haben, da ja die ersten griechischen Geometer, was gut bezeugt und von niemand bestritten wird, ihre Anregung durch die praktische Meßkunst der Ägypter erhalten haben. Aber von den einfachen Flächenvergleichungen und Antragungen bis zur allgemeinen Flächenanlegung, welche mit der Lösung der quadratischen Gleichung gleichwertig ist und die stetige Teilung unter sich begreift, ist ein sehr weiter Weg. Wird die Flächenanlegung durch Proklus-Eudemus ganz allgemein den Pythagoreern zugeschrieben, so können wir den älteren unter ihnen, welche zwischen Thales und Önopides lebten und die Winkelsumme des Dreiecks und der Polygone feststellten, im Sinne einer historischen Entwickelung nur die Elemente dieser Entdeckungen zutrauen; den Abschluß müssen spätere geleistet haben.

In die Zeit nun der ältesten Pythagoreer, ja des Pythagoras selbst, soll, wenn die übliche Auffassung der Stelle des Geometerverzeichnisses recht hat, auch die Entdeckung des Irrationalen fallen. Das Vorhandensein von Strecken, welche prinzipiell durch kein Maß meßbar sind, ist durch Messen nicht festzustellen; denn das Messen sowohl der meßbaren wie der unmeßbaren Strecken ist gleichermaßen ungenau. Die Existenz solcher Strecken ist auch durch die Vorstellung absolut unfaßbar; auch der geschulte Geist sträubt sich stets aufs neue gegen dieses Zugeständnis; erst als das Denken ein beherrschendes Übergewicht über das Anschauen gewonnen hatte, war diese großartige Abstraktion möglich. Aber nicht genug damit; nicht die Auffindung des Irrationalen als einer Einzeltatsache, etwa der Diagonale des Quadrats, soll unsere Stelle dem Pythagoras zuschreiben, sondern τὴν τῶν ἀλόγων πραγματείαν „*die Handhabung oder Theorie* des Irrationalen". Also Pythagoras müßte die Idee des Irrationalen in das Gedankensystem eingefügt, sie theoretisch durchgearbeitet, ihre Konsequenzen verfolgt und sie praktisch verwertet haben. *Das alles sind Leistungen, welche die sichere Überlieferung Theodorus, dem Pythagoreer und Lehrer Platos, Theaetet, dem Altersgenossen Platos, und Eudoxus, dem Schüler Platos, zuschreibt; — sie stehen am Ende einer Entwickelung, welche von Pythagoras an gerechnet über hundert Jahre umfaßt!*

Zu einer Zeit, als man noch nicht gelernt hatte, exakt einen Winkel anzutragen und ein Lot zu fällen, *soll Pythagoras ferner die Krone aller*

elementaren Konstruktionen, die Konstruktion der regelmäßigen Polyeder geleistet haben! Außer allen elementaren Konstruktionen würde dies die exakte Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks, also die stetige Teilung, d. h. die allgemeine Flächenanlegung und Konstruktion der quadratischen Gleichung voraussetzen!

Das alles glaube, wer kann! Dem Proklus aber, welcher zwar kein schöpferischer Geometer, aber doch ein in geometrischen Dingen urteilsfähiger Kopf war und verstand, was er schrieb, können wir nicht zutrauen, daß er so krasse Widersprüche, solche Zickzacksprünge der Geometrie, die bald eine wunderbare Findigkeit, bald eine wunderbare Vergeßlichkeit voraussetzen und jedem Entwickelungsgedanken hohnsprechen, nicht bemerkt haben sollte. Deshalb müssen wir, zunächst um der inneren Übereinstimmung der verschiedenen Proklus-Stellen willen, mit Zweifeln und Verbesserungsvorschlägen an dieser Stelle ansetzen, welche durch keinen Zusammenhang, durch keine Quellenangabe gesichert ist.

Entdeckung des Irrationalen, Konstruktion der regelmäßigen Körper durch Pythagoras sind aber auch unverträglich mit allem, was wir aus anderen Quellen über die Entwickelung der griechischen Geometrie wissen. Diese allgemeinere Untersuchung hat in vortrefflicher Weise G. Junge geführt in seiner Schrift: *Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt?*

Indem Junge alle direkten Berichte über die Entwickelung der Lehre vom Irrationalen im 5. Jahrhundert heranzieht, stellt er fest[1]): „Durch die Annahme, daß schon Pythagoras die Theorie des Irrationalen begründet hat, wird die Entwickelung dieser Theorie auf unnatürliche Art auseinandergezerrt. Das Bild wird einfach, sowie man annimmt, daß das Irrationale erst zur Zeit Theodors, also jedenfalls nach 450, entdeckt ist.“ — „‘Alles ist Zahl’, das war der Fundamentalsatz der pythagoreischen Philosophie.“ Die Lehre von der metaphysischen Allherrschaft der Zahlen „muß schon einige Ausbildung und einiges Alter gehabt haben, als die Gegenlehre vom Irrationalen auftauchte“. Denn darin eben besteht die Entdeckung des Irrationalen, daß es Größen gibt, welche kein gemeinschaftliches Maß haben (*ἀσύμμετροι*) und sich nicht verhalten wie Zahlen (*τὸ ἄλογον, τὸ ἄῤῥητον*). Wir Modernen haben uns gewöhnt, die Schärfe dieses Gegensatzes zu verdecken, indem wir den Zahlbegriff auch auf das Irrationale ausdehnen. Für die Griechen aber ist das *ἄλογον* eben nicht „Zahl“[2]); deshalb ist in griechischem Sinne noch mehr als in unserem die metaphysische Zahlenlehre unverträglich mit dem Irrationalen. Zur Zeit der Entdeckung des Irrationalen „war also die . . . pythagoreische

1) a. a. O. S. 9, 10, 12, 30, 31.

2) Euklid, Elem. X, 5: „Kommensurable Größen verhalten sich zueinander wie Zahlen“. X, 7: „Inkommensurable Größen verhalten sich nicht zueinander wie Zahlen“

Zahlenlehre schon so fest und so umfangreich geworden, daß die Entdeckung des Irrationalen ihr nichts mehr anhaben konnte. Aber zur Zeit ihres Entstehens hätte die Lehre von den Zahlenverhältnissen das Irrationale schwerlich ertragen können. Und ganz unglaublich ist es, daß der Begründer der Schule und des Zahlenkultes, daß PYTHAGORAS selbst These und Antithese nebeneinander aufgestellt haben soll". — „In dem halben Jahrtausend nach PYTHAGORAS' Tode ist nicht die kleinste geometrische Entdeckung von ihm mit einiger Sicherheit festzustellen." „In der nun folgenden Zeit des Neupythagoreismus flossen, um mit ZELLER zu sprechen, die Quellen über PYTHAGORAS und seine Lehre reichlich. Aber nicht einmal aus dieser Zeit ist mir außer der PROKLUS-Stelle irgendeine Nachricht bekannt, die die Entdeckung des Irrationalen PYTHAGORAS zuschriebe." —

Erheblichen Zweifeln ist die angebliche Konstruktion der fünf regelmäßigen Körper durch PYTHAGORAS begegnet.[1]) HANKEL und CANTOR suchen wenigstens die Konstruktion des regelmäßigen Zwölfflächners von PYTHAGORAS auf seine Schüler zu verschieben[2]); erstens wegen der Schwierigkeit, an die Ausführung der stetigen Teilung durch PYTHAGORAS selbst oder seine Zeitgenossen zu glauben, zweitens weil eine Überlieferung[3]) die Konstruktion des regelmäßigen Zwölfflächners dem Pythagoreer HIPPASUS zuschreibt, und endlich wegen der Zuordnung der regelmäßigen Körper zu den Elementen, der sie ihren Namen „kosmische Körper" verdanken.[4])

Die vier Elemente Erde, Wasser, Luft, Feuer wurden nach der bestimmten Angabe des ARISTOTELES[5]) zuerst durch EMPEDOKLES (geb. um 490) als die materiellen Prinzipien der Welt aufgestellt; also konnten die regelmäßigen Körper von PYTHAGORAS wenigstens noch nicht als „kosmische" erkannt und bezeichnet werden. Erst nach EMPEDOKLES' Auftreten konnte diese Zuordnung geschehen, und auch nur dann, wenn die Elementenzahl mit der Zahl der regelmäßigen Körper übereinstimmte, also beide die Vierzahl hatten. Folglich war der Zwölfflächner zu der Zeit, als EMPEDOKLES mit der Elementenlehre auftrat, noch nicht entdeckt. Nachdem er dann entdeckt war, mußte man ihm, wenn man nicht den ganzen Parallelismus von Elementen und Körpern aufgeben wollte, irgendeine

---

1) S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik*, S. 59: „Daß man sie auch sämtlich nach strenger Vorschrift aufzubauen imstande gewesen sei, soll damit nicht gesagt werden".

2) HANKEL, a. a. O. S. 95, Anm. 3; CANTOR, a. a. O. I³, S. 175.

3) JAMBLICHUS, *De vita PYTH.*, S. 88.

4) JUNGE, a. a. O. § 9.

5) ARISTOTELES, Metaphysik I, 4. Gegen das ganz bestimmte Zeugnis des ARISTOTELES fallen die Angaben von VITRUV (*De Architectura* VIII, praef.) und anderen gar nicht ins Gewicht (ZELLER, a. a. O. I⁵, S. 406—408, 759).

Bedeutung für die Konstitution der Welt zuweisen. Noch in PLATOS *TIMAEUS* ist diese unausgeglichene Schwierigkeit zu erkennen. PLATO beweist (31—32) die Notwendigkeit und Ausschließlichkeit der vier EMPEDOKLEischen Elemente Feuer, Luft, Wasser, Erde aus dem im Raume geltenden Gesetz der zwei mittleren Proportionalen und setzt zu ihnen die vier schönsten Körper, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Würfel, die durch ihre Begrenzungen bestimmt sind, in Beziehung (53—55). Für den fünften Körper aber, das Dodekaeder, beruft er sich auf die geometrische Einsicht, daß er der letzte Mögliche ist. Ein ihm entsprechendes Element hat er nicht, sondern weist ihm das All zu: *ἔτι δὲ οὔσης ξυστάσεως μιᾶς πέμπτης ἐπὶ τὸ πᾶν ὁ θεὸς αὐτῇ κατεχρήσατο ἐκεῖνο διαζωγραφῶν*" — „Da noch eine, die fünfte Zusammensetzung übrig war, so benutzte Gott diese zum Umriß des Weltganzen."

Wir sehen: *Weder PROKLUS' Angaben über die ältere Geschichte der Geometrie, noch unsere übrigen Kenntnisse vom Irrationalen und den regelmäßigen Körpern bei den Griechen vertragen die übliche Deutung des Geometerverzeichnisses, durch welche beide Entdeckungen PYTHAGORAS zugewiesen werden.*

§ 5. Handhabung der Proportionen. Zusammensetzung der regelmäßigen Körper.

Hat die Lesart *ἀλόγων* sich als gänzlich unglaubwürdig erwiesen, so liegt es nahe, die Lesart *ἀναλόγων*, welche ebenfalls in den Handschriften vorkommt, auf ihre Brauchbarkeit zu prüfen.[1])

Die Proportionslehre (*τὸ ἀνάλογον, ἡ ἀναλογία*) war bei den Alten an die Lehre von den Mittelwerten geknüpft.[2]) Diese Lehre aber wurde nicht allein auf dem Gebiete der Geometrie, sondern auch in der Arithmetik und Musik entwickelt; dementsprechend unterschied man arithmetische, geometrische und harmonische Mittel. Es wird nun durch bestimmte Zeugnisse dem PYTHAGORAS und seinen Schülern die Aufstellung dieser drei Mittelwerte zugeschrieben; es wird ferner berichtet, daß die späteren Pythagoreer HIPPASUS und ARCHYTAS und nach ihnen

1) Die Lesart *ἀναλόγων* statt *ἀλόγων* finde ich zuerst bei FABRICIUS, *Bibliotheca graeca* Bd. II, 1707, S. 385; sie ist weiter bezeugt durch AUGUST im Anhang II zu seiner EUKLID-Ausgabe (Berlin 1826—1829, S. 290). ZELLER in der 3. und 4. Auflage (1869 und 1876, S. 273 und 294) bemerkt: „wo statt *ἀλόγων* wohl *ἀναλόγων* zu lesen ist"; in der 5. Auflage (1892) fehlt diese Bemerkung. MULLACH, *Fragmenta philosophorum graecorum* III, Paris 1881, S. 266 schreibt *ἀναλόγων*, BLASS, *De Platone Mathematico*, Bonn 1861, S. 5 *ἀναλογιῶν*, wofür auch JUNGE eintritt (S. 43).

2) Hierfür und für das Folgende vgl. CANTOR, a. a. O. I³, S. 165—166, 238—240, und JUNGE, a. a. O. § 11.

Eudoxus den Namen des dritten Mittelwertes geändert haben, so daß jene drei Bezeichnungen ihre jetzigen Bedeutungen erhielten. Proklus selbst erzählt (67), daß Eudoxus die vorhandenen drei Proportionen durch drei neue vermehrte.

Werden so die Mesoteten und Proportionen direkt an Pythagoras und seine Schule angeknüpft, so haben wir in dem teils bezeugten, teils erschließbaren Entwickelungsgange der Elemente zwar indirekte, aber durch ihre innere Übereinstimmung überzeugende Beweise dafür, daß die Entstehung der Proportionslehre auf die ältesten Pythagoreer zurückgeht.

Nach Proklus' Bericht sind die Elemente vor Euklid keineswegs ein äußerlich abgeschlossenes, innerlich gefestigtes System gewesen. Hippokrates von Chios (um 450) schrieb zuerst Elemente; dann stellte Leon, Schüler des Neokleides, welcher selbst jünger als Plato gewesen sein muß, die Elemente zusammen, „er bewies große Sorgsamkeit durch Fülle und Brauchbarkeit des Gebotenen". Als dritter ordnete Theudius von Magnesia die Elemente „in lobenswerter Weise"; Hermotimus von Kolophon schloß sich in der Vervollkommnung und Vermehrung der Elemente an Eudoxus und Theaetet an. Endlich trat Euklid auf (68): *ὁ τὰ στοιχεῖα συναγαγὼν καὶ πολλὰ μὲν τῶν Εὐδόξου συντάξας, πολλὰ δὲ τῶν Θεαιτήτου τελεωσάμενος, ἔτι δὲ τὰ μαλακώτερον δεικνύμενα τοῖς ἔμπροσθεν εἰς ἀνελέγκτους ἀποδείξεις ἀναγαγών* — „er stellte die Elemente zusammen, ordnete viele Erfindungen des Eudoxus ein und brachte viele Gedanken des Theaetet zum Abschluß; endlich führte er das von seinen Vorgängern weniger scharf Bewiesene auf unwiderlegliche Beweise zurück".

Zweimal werden als Euklids Vorläufer Theaetet und Eudoxus genannt; wir sind noch bestimmter dahin unterrichtet[1]), daß das fünfte Buch der Elemente, die Proportionslehre, auf Eudoxus, das zehnte, die Theorie des Irrationalen, auf Theaetet zurückgeht.[1]) So erkennen wir die Richtung, in welcher die allmähliche Umgestaltung der Elemente erfolgte: es ist die Bewältigung und Verarbeitung der neu erworbenen Ideen des Irrationalen und Inkommensurabeln, dieses „véritable scandale logique".[2]) Durch diese Entdeckungen waren viele Beweise, die man bisher für zwingend gehalten hatte, nicht mehr scharf. Dies gilt besonders für die Proportionslehre.

Die Vorstellung der Ähnlichkeit und der damit verknüpften Gleichheit der Streckenverhältnisse ist ganz fundamental und in der Anschauung vorhanden[3]), solange das Inkommensurable ganz außerhalb des Gesichts-

1) Cantor, a. a. O. I³ S. 236, 241, 275; Tannery, a. a. O. S. 96, 99—102.

2) Tannery, a. a. O. S. 98.

3) Tannery, a. a. O. S. 92: „La notion de la similitude est incontestablement une des premières que l'homme ait acquise".

kreises liegt. So dürfen wir mit TANNERY[1]) Ähnlichkeit und Proportionen zu den ältesten Bestandteilen griechischer Geometrie rechnen und dürfen annehmen, daß in den älteren Elementen die Proportionen sehr zeitig eingeführt wurden, daß sie ein sehr weitgehendes Beweismittel waren, und daß z. B. die Flächenlehre und der Satz vom Quadrat der Hypotenuse durch Ähnlichkeit begründet wurde.[2])

War dies so, gerade dann und nur dann ist es verständlich, daß die Entdeckung des Inkommensurabeln eine fundamentale Umgestaltung der Elemente zur Folge hatte. Die Proportions- und Ähnlichkeitslehre, ja selbst die Flächenlehre samt dem Quadratsatz, war nun zum *μαλακώτερον, ἐπὶ μέρος δεικνύμενον* geworden; um sie wieder zur *ἀνελέγκτως, καθόλου* erkannten Wahrheit zu erheben, mußten entweder neue Beweise ohne Benutzung der Ähnlichkeit gefunden werden, oder es mußte die Proportionslehre umgestaltet werden. Den ersten Weg schlug man für die Flächenlehre ein: wenn der neue, auf Flächenvergleichung ohne Ähnlichkeit gestützte Beweis des Quadratsatzes von PROKLUS EUKLID zugeschrieben wird, so dürfen wir vermuten, daß ein Verdienst EUKLIDS um die Verschärfung der Elemente gerade in der Neugestaltung der Flächenlehre liegt. Den anderen Teil der Arbeit hatten EUDOXUS und THEAETET geleistet; an sie schloß EUKLID sich an.

Die Annahme der Entdeckung des *ἄλογον* durch PYTHAGORAS zerstörte jede Idee einer organischen Entwickelung der griechischen Geometrie; *wir erhalten das Bild einer verständlichen und durch die Quellen beglaubigten Entwickelung, wenn das ἀνάλογον lange vor dem ἄλογον entdeckt wurde. Deshalb ist die Lesart τῶν ἀλόγων nicht nur als unmöglich zu beseitigen, sondern wir haben ausreichende positive Stützen für ihren Ersatz durch τῶν ἀναλόγων.* —

τὴν τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασιν ἀνεῦρεν hat man bisher stets übersetzt „er erfand (fand) die Konstruktion der kosmischen (regelmäßigen) Körper“ und gemäß der geometrisch-technischen Bedeutung des Wortes „Konstruktion“ darin die Aussage gesehen: PROKLUS schreibt dem PYTHAGORAS die exakte Konstruktion der möglichen regelmäßigen Körper zu, etwa so, wie das 13. Buch der Elemente sie lehrt; als Vorstufe ist darin selbstverständlich die Konstruktion des regelmäßigen Fünfecks und

1) TANNERY, a. a. O. S. 97. Ich kann TANNERYS absoluter Datierung der pythagoreischen Entdeckungen nicht zustimmen; aber diese relative Anordnung halte ich für in sich wohl begründet. Ebenso HEIBERG, Philologus **43**, S. 333.

2) TANNERY, a. a O. S. 105. Ebenso ZEUTHEN, *Geschichte der Mathematik im Altertum und Mittelalter,* Kopenhagen 1896, S. 50, und ZEUTHEN, *Théorème de PYTHAGORE, origine de la géométrie scientifique.* II. Congrès international de philosophie, Genève 1904; Comptes rendus du congrès S. 834, 849, 853—854.

die stetige Teilung enthalten. Ich habe bewiesen: *es ist höchst unwahrscheinlich, daß Proklus diese Leistungen dem Pythagoras zugetraut hat; es ist ganz unmöglich, daß Pythagoras sie ausgeführt hat.*

Tatsächlich liegt diese Schwierigkeit weniger im griechischen Text als in der üblichen Übersetzung; sie ist also vermeidbar.

Die Worte *σύστασις, συστήσασθαι* haben bei Proklus wie bei Euklid natürlich meist die geometrisch-technische Bedeutung „Konstruktion, konstruieren". Zunächst aber haben sie einen allgemeineren Sinn, und dieser ist bei Proklus keineswegs vergessen. Das Substantivum *σύστασις* kann einmal die Wirkung des Zusammensetzens bedeuten: das „Zusammengesetzte in seiner Eigenart", was wir wörtlich genau und im Sinne zutreffend durch das lateinische Wort „Konstitution" wiedergeben können, z. B. *σύστασις κόσμου*. Zweitens bedeutet es die Tätigkeit des Zusammensetzens ganz allgemein, nicht nur in dem Sinne „geometrische Konstruktion"; ja für den engsten Sinn „Herstellung der Figur" im weiteren Rahmen einer geometrischen Aufgabe gilt gar nicht das Wort *σύστασις*, sondern *κατασκευή*.[1]) Abgesehen von dem ganz allgemeinen Gebrauch (z. B. *σύστασις τῆς ἐπιστήμης* 64, 13) werden nebeneinander gestellt *συστάσεις, γενέσεις, διαιρέσεις, θέσεις, παραβολαί* (56, 8—10); *συστάσεις, τομαί, θέσεις, παραβολαί, προσθέσεις, ἀφαιρέσεις* (78, 25—26); S. 423, 21—22 definiert Proklus: *τὸ μὲν γὰρ ὡς ἐκ πολλῶν συγκροτούμενον συστάσεως δεῖται* „das aus einer Vielheit gewissermaßen Zusammengeschlagene bedarf der „Zusammensetzung". Die Verbindung *τῶν κοσμικῶν σχημάτων σύστασις* ist eine feste; zweifellos bedeutet sie in den meisten Fällen die Konstruktion der regelmäßigen Körper im Sinne von Buch XIII der Elemente[2]), und sie *kann* auch an unserer Stelle diese Bedeutung haben. Aber sie *muß nicht* diese Bedeutung haben — mehr will ich nicht beweisen —, und es ist *nicht nötig*, daß Proklus, wenn er von den geometrischen Leistungen der Vorzeit spricht, den engsten, rein technischen Sinn vor Augen hat. Wir werden dem durch die Übersetzung gerecht werden, wenn wir das Wort „Konstruktion", welches für uns *nur* den technischen Sinn hat, durch ein allgemeineres, etwa „Zusammensetzung", ersetzen. Dieses Wort hat auch den Vorzug, daß in ihm außer der Tätigkeit des *συστήσασθαι* auch das Resultat „die Konstitution" enthalten ist. Daß ich *an dieser Stelle* dem allgemeinen Wort vor dem technischen Ausdruck den Vorzug gebe, muß natürlich durch *sachliche* Gründe gerechtfertigt werden.

Nach unserem Wissen von der älteren griechischen Geometrie müssen wir für ihre Operationen vielmehr das allgemeine Wort „Zusammensetzung" als „Konstruktion" im engeren Sinne gebrauchen. Es unter-

---

1) Die Definition Proklus 203. 2) So Proklus 68, 23—24 und 70, 26.

liegt keinem Zweifel, daß die prinzipielle Beschränkung auf den Gebrauch von Lineal und Zirkel für geometrische Konstruktionen sich sehr allmählich, etwa im Zeitraum von 500 bis 400 vollzogen hat. Die Bestimmung der Schiffsentfernung durch THALES[1]) operiert mit Herstellung von Geraden, rechten Winkeln, Halbieren einer Strecke im Terrain; gewiß sind diese Operationen in indisch-ägyptischer Weise mit Hilfe von Seilen und Visierstangen ausgeführt worden. HIPPOKRATES benutzte für die Herstellung der Möndchen, welche kleiner als ein Halbkreis sind, die Methode, welche ZEUTHEN „Einschiebung“ nennt. ZEUTHEN versteht darunter „die Konstruktion einer Strecke, deren Endpunkte auf gegebenen Linien liegen, und die selbst oder in ihrer Verlängerung durch einen gegebenen Punkt geht“. Diese Konstruktion läßt sich durch gleichzeitige Drehung und Schiebung eines Lineals mechanisch leicht ausführen und ist praktisch noch lange in Gebrauch gewesen.[2]) Erst PLATO scheint, entsprechend seiner Trennung der Geometrie von Technik und *αἴσθησις*, die systematische Einschränkung der Konstruktionswerkzeuge auf Lineal und Zirkel gefordert zu haben.[3]) Als seinen Vorgänger in dieser Beschränkung dürfen wir ÖNOPIDES ansehen.[4]) So wird auch das Lob verständlich, welches nach PROKLUS (66) PLATO dem ÖNOPIDES gespendet hat: es galt nicht der Leistung, sondern der Reinhaltung der Methode.

Hat PROKLUS nun in diesem Sinne PYTHAGORAS die Kenntnis und Herstellung der fünf regelmäßigen Körper zugeschrieben, so hat er zwar geirrt, denn wegen der Zuordnung der Körper zu den vier Elementen können bis auf die Zeit des EMPEDOKLES nur vier regelmäßige Körper bekannt gewesen sein; aber er befindet sich nicht mehr im Widerspruch mit sich selbst. Vielmehr ergibt sich jetzt aus allen einschlägigen PROKLUS-Stellen zusammen mit anderen Berichten ein durchaus verständliches Bild für die Entwickelung der Kenntnis von den fünf regelmäßigen Körpern.

Die Grundvorstellung und den Begriff des regelmäßigen Körpers hat, ohne daß wir andere Körper zu Hilfe zu nehmen brauchten, der Würfel geliefert.

Hatten die Pythagoreer früh erkannt, daß sechs regelmäßige Dreiecke, vier Quadrate, drei Sechsecke die Fläche um einen Punkt herum füllten, so lag der Versuch nahe, was schon bei den drei in einer Ecke

1) TANNERY, a. a. O. S. 90—92.

2) ZEUTHEN, a. a. O. S. 80—82. Vgl. auch ENRIQUES, *Fragen der Elementargeometrie* II, Leipzig 1907, Art. VII § 4 und RUDIO, *Bericht des SIMPLICIUS*, Leipzig 1907, S. 59.

3) HANKEL, a. a. O. S. 156; CANTOR, a. a. O. I², S. 234; S. GÜNTHER, *Geschichte der Mathematik*, S. 67. Die Quelle ist PLUTARCH.

4) S. oben S. 33.

zusammenstoßenden Quadraten des Würfels vorlag, auch mit weniger als sechs Dreiecken und drei Sechsecken zu versuchen. Es ergab sich, daß drei, vier, fünf Dreiecke eine Ecke bilden; und geleitet durch die vom Würfel abstrahierte Idee des regelmäßigen Körpers entdeckte man durch mechanisches Zusammenfügen das regelmäßige Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder.

Jener pythagoreische Winkelsatz schloß aber auch, wie PROKLUS berichtet, die Erkenntnis ein, daß andere regelmäßige Vielecke, also Fünfecke, Siebenecke usw. sich überhaupt nicht lückenlos um einen Punkt herum in der Ebene zusammenfügen lassen. *Um diese Erkenntnis zu gewinnen, brauchten die Pythagoreer das regelmäßige Fünfeck nicht geometrisch konstruieren zu können*[1]*; haben sie doch ganz bestimmt das regelmäßige Siebeneck, Neuneck usw., welche sie auch untersucht haben mußten, um jenen Satz allgemein auszusprechen, nicht konstruiert, sondern ausprobiert. Kamen sie weiter auf den nunmehr nicht fern liegenden Gedanken, auch diese regelmäßigen Vielecke zu einer Ecke zusammenzufügen, so gelangten sie zum regelmäßigen Dodekaeder (HIPPASUS) und zugleich zur Einsicht, daß mit den gewonnenen fünf Körpern die Reihe der regelmäßigen Körper abgeschlossen ist.*[2]

Daß selbst zu PLATOS Zeit die Zusammensetzung der regelmäßigen Körper noch nicht eine Konstruktion im Sinne des 13. Buches der Elemente war, können wir aus der Darstellung des *TIMAEUS*, 53—55 deutlich erkennen. Abgesehen vom Dodekaeder, welches als letzter möglicher regelmäßiger Körper nur *erwähnt* wird, begnügt sich PLATO für die vier

1) Ebensowenig kann ich den für die Pythagoreer bezeugten Gebrauch des Pentagramms als Erkennungszeichen (BRETSCHNEIDER, a. a. O. S. 85, 86; CANTOR, a. a. O. I³, S. 178) für einen Beweis ansehen, daß sie es geometrisch konstruiert, also die stetige Teilung usw. gekannt haben. Ebenso urteilt (gegen TANNERY) HEIBERG, Philologus **43**, S. 333.

2) Ich halte mit HANKEL (a. a. O. S. 95, Anm.) und JUNGE (a. a. O. S. 83) gegen CANTOR (a. a. O. I³, S. 174), TROPFKE (*Geschichte der Elem.-Mathem.* II, S. 400) und M. SIMON (*EUKLID und die sechs planimetrischen Bücher*, Leipzig 1901, S. 6) diese Einsicht auf Grund des Satzes von den allein möglichen Polygonen um einen Punkt herum für eine durchaus primitive, obgleich ihre exakte Begründung den Abschluß der Elemente EUKLIDS bildet. Nicht auszuschließen ist als Anregung des geometrischen Nachdenkens die empirische Anschauung des regelmäßigen Tetraeders und des regelmäßigen Oktaeders (CANTOR, a. a. O. I³, S. 175), und vielleicht auch die des Dodekaeders, welches als Kristallform des Pyrits vorkommt und nach F. LINDEMANN von Etruskern künstlich hergestellt und mit Zahlzeichen versehen sich als Kultgegenstand schon in der ersten Eisenzeit (1000—900 v. Chr.) in Oberitalien vorfinden soll (*Zur Geschichte der Polyeder und Zahlzeichen*; Sitzungsber. der bayr. Akademie der Wissensch (Math. Phys. Kl.) **26**, 1896, S. 625—756). LINDEMANN nimmt an, daß PYTHAGORAS (ich würde sagen die Pythagoreer) durch die Gallier mit dem Dodekaeder bekannt geworden ist, *aber es nicht konstruiert hat* (S. 729, 733, 755).

Körper mit der Herleitung der Dreiecks- und Quadratflächen aus den Elementardreiecken, dem gleichschenklig-rechtwinkligen und demjenigen rechtwinkligen, in welchem die Hypotenuse das Doppelte der kleineren Kathete ist. Die *Ecken* aber werden einfach *zusammengefügt;* auch für die des Oktaeders und Ikosaeders, welche durch die in der Ecke zusammenstoßenden vier oder fünf Dreiecke nicht vollständig bestimmt sind, wird nicht wie bei EUKLID die Möglichkeit und Eindeutigkeit der Konstruktion durch Bestimmung der räumlichen Diagonalen gesichert, ja nicht einmal angedeutet.[1])

Als wichtigster Beweis für die frühe Kenntnis des Dodekaeders bei den Pythagoreern hat bisher ein bei STOBAEUS erhaltenes Fragment des PHILOLAOS, eines Zeitgenossen des SOKRATES, gegolten. Dasselbe lautet[2]): *καὶ τὰ ἐν τᾷ σφαίρᾳ σώματα πέντε ἐντί. τὰ ἐν τᾷ σφαίρᾳ πῦρ, ὕδωρ, καὶ γᾶ, καὶ ἀήρ, καὶ ὁ (ἁ) τᾶς σφαίρας ὁλκὰς πέμπτον,* und ist bisher verstanden worden: „Die Körper in der Kugel sind fünf (die fünf regelmäßigen Körper, ZELLER); die Körper in der Weltkugel (die Körper in der Welt, ZELLER), Feuer, Wasser, Erde und Luft, und als fünfter das Lastschiff der Kugel". Viele Verbesserungsvorschläge sind zu diesem Fragmente gemacht worden; besonders knüpfen sie sich an das Wort *ὁλκάς*. Doch die größte Schwierigkeit liegt darin, daß *σφαῖρα* zuerst als *geometrische Kugel*, dann als *Weltkugel*, *σώματα* erst als *geometrische* Körper, dann als Elemente der *materiellen Körper* verstanden werden. *σφαῖρα* in dem wechselnden Sinne ist hart, aber möglich.[3]) Dagegen bedeutet *σῶμα* seinem Begriff nach den physischen Körper, den geometrischen nur mit erklärendem Zusatz, z. B. *σῶμα στερεόν*[4]); der geometrische Raumteil heißt *στερεόν, σχῆμα, εἶδος, τόπος, χώρα.* Schlagend geht dies aus HERONS Definitionen hervor[5]): *σῶμα μὲν οὖν μαθηματικόν ἐστι τὸ τριχῇ διάστατον,*

1) In den 82 Zeilen dieses Abschnitts (Ausgabe von BEKKER, Berlin 1817, III, S. 66—70) gebraucht PLATO elfmal die Worte *συνίστασθαι, συνέστηκεν, σύστασις* und damit abwechselnd völlig gleichbedeutend dreimal *συναρμόσασθαι,* einmal *συντίθεσθαι,* einmal *συνάγειν,* zweimal *συμπαγεῖν,* neunmal die ganz allgemeinen *ποιεῖν, γίγνεσθαι, γένεσις* und als Gegensatz einmal *λύεσθαι* und einmal *διαλύεσθαι.* Ich sehe in dem durchaus sinnlich anschaulichen, nicht terminologisch festgewordenen Gebrauch dieser Worte eine Rechtfertigung meiner oben dargelegten Auffassung des Wortes *σύστασις*.

2) BOECKH, *PHILOLAOS*, Berlin 1819, S. 160. WACHSMUTH, *STOBAEI Anthologium*, Berlin 1884, I, 18. ZELLER, a. a. O. $I_1{}^5$, S. 406—408 Anm.

3) GUNDERMANN, Rheinisches Museum 59, 1904, S. 145 sucht die Beziehung zwischen den beiden Bedeutungen von *σφαῖρα* herzustellen durch die Lesart *κατὰ ἐν τᾷ σφαίρᾳ σώματα*.

4) Vgl. PASSOW, *Handwörterbuch der griechischen Sprache*, Leipzig 1857, II, 2, S. 1804.

5) *HERONIS Alexandrini geom. et stereom. reliquiae*, ed. HULTSCH, Berlin 1864, S. 11 def. 13.

σῶμα δὲ ἁπλῶς τὸ τριχῇ διάστατον μετὰ ἀντιτυπίας — „ein mathematischer Körper ist das dreifach Ausgedehnte; ein Körper schlechthin (ohne Zusatz) ist das dreifach Ausgedehnte mit Gegendruck" (d. h. mit Widerstandsfähigkeit, materieller Undurchdringlichkeit). Dasselbe wie diese auf Epikur zurückgehende Definition[1]) drücken die Aristotelischen Bestimmungen aus: *ἀδύνατον δύο σώματα ἅμα ἐν τῷ αὐτῷ εἶναι* — „zwei Körper können nicht zugleich an demselben Orte sein"; *σῶμα ἅπαν ἁπτόν* — „jeder Körper ist berührbar"; *τὸ κενόν* i. e. *τόπος ἐστηρεμένος σώματος* sive *χώρα σώματος* — „das Leere ist der des Körpers beraubte Ort oder der Raum des Körpers".[2]) Dagegen werden die Elemente der physischen Körperwelt (der *σώματα*) ganz gewöhnlich selbst schlechthin *τὰ σώματα* genannt.[3]) Wenn also in dem Philolaos-Fragment der Wechsel in der Bedeutung des Wortes *σφαῖρα* unwahrscheinlich ist, so ist es ganz unglaublich, daß *τὰ σώματα* zuerst die geometrischen Körper, dann die Elemente bedeuten sollten.

Als eine wahre Erlösung sehe ich die Form an, welche Diels dem Philolaos-Fragment gegeben hat[4]): *καὶ τὰ μὲν τᾶς σφαίρας σώματα πέντε ἐντί, τὰ ἐν τᾶι σφαίραι πῦρ ⟨καὶ⟩ ὕδωρ καὶ γᾶ καὶ ἀήρ, καὶ ὃ τᾶς σφαίρας ὁλκάς, πέμπτον* — „Und zwar gibt es fünf Elemente der Weltkugel: die *in* der Kugel befindlichen, Feuer, Wasser, Erde und Luft, und was der Kugel Lastschiff ist, das fünfte".[5])

Damit sind in geradezu glänzender Weise die erwähnten Schwierigkeiten überwunden: *σφαῖρα* ist nur die pythagoreische Weltkugel, *τὰ σώματα* nur die Elemente der Materie; zugleich ist durch die scharfe Gegenüberstellung der vier Elemente *in* der Weltkugel gegen das fünfte, den Träger des Alls, sowohl der dreimalige Gebrauch des Wortes *σφαῖρα* wie das auffällige *ὁλκάς* gerechtfertigt.

Aber jede Beziehung auf die fünf regelmäßigen Körper ist durch Diels' Interpretation aus dem Philolaos-Fragment ausgeschieden, und dadurch gewinnt die kleine Dielssche Konjektur eine große geometrische Bedeutung.

Von Boeckh an bis in die neueste Zeit hat man die Entscheidung der Frage, ob die fünf regelmäßigen Körper pythagoreische oder platonische Entdeckung sind, neben der Proklus-Stelle S. 65, vorzugsweise in dem Philolaos-Fragment gesehen. Boeckh sagt[6]): „Das ehemals von mir über-

1) Vgl. Sextus Empiricus, *Adv. mathematicos* III, sect. 21.

2) Entnommen aus Bonitz, *Index Aristotelicus* 742ᵃ 39, 742ᵃ 42, 381ᵇ 9—12.

3) Z. B. Bonitz, *Index Aristotelicus* 742ᵇ 6—37.

4) Diels, *Fragmente der Vorsokratiker,* Berlin 1903, S. 254, und noch entschiedener in der 2. Auflage, Berlin 1906, I, S. 244.

5) An Diels schließt sich Nestle, *Die Vorsokratiker,* Jena 1908, S. 162 an.

6) *Philolaos des Pythagoreers Lehren,* Berlin 1819, S. 162.

sehene Bruchstück des Philolaos entscheidet mir zugleich die Streitfrage, ... ob die Lehre von den fünf Körpern als Formen der Elemente Pythagoreisch oder ursprünglich Platonisch sind"; Blass[1]): „Incidimus in quaestionem utrum Plato ea (quinque solida) primus excogitaverit an Pythagoricae sint originis. Sed iam Boeckhius, vir in his rebus facile princeps, rem diiudicavit cum ex fragmento Philolaico hanc doctricam ex schola Pythagorica fluxisse convicerit"; Cantor[2]): „Auch das Ikosaeder und nicht minder das Dodekaeder muß wohl oder übel den Pythagoreern bekannt gewesen sein. Sonst könnte nicht Philolaos schon von den fünf Körpern in der Kugel reden."

Redet nun Philolaos tatsächlich nicht von den fünf Körpern der geometrischen Kugel, so ist diese Argumentation hinfällig; denn nunmehr ist das älteste Zeugnis von den fünf regelmäßigen Körpern und zugleich ihrer Verknüpfung mit den Elementen der Platonische *Timaeus*. Für Platos Priorität spricht jetzt die erste Veröffentlichung, ferner das Zeugnis des Pappus[3]) und die im Altertum gebräuchliche Verknüpfung der fünf Körper mit seinem Namen und seiner Schule.[4]) Für die Pythagoreer zeugt Proklus im Geometerverzeichnis und Plutarch[5]), sodann die Tatsache, daß Plato die Lehre von den fünf Körpern einem Pythagoreer in den Mund legt; das wichtigste Zeugnis aber sind die oben dargelegten Momente historischer Entwickelung. Die Pythagoreer sind durch ihre eigentümliche an die regelmäßigen Polygone angeknüpfte Fragestellung[6]) so dicht an die Erkenntnis der Existenz, und zwar der ausschließlichen Existenz der fünf Polyeder herangerückt, daß es aus inneren Gründen schwer fällt zu glauben, sie hätten diesen letzten Schritt nicht getan.

Kann mich demnach der Wegfall des Philolaos-Arguments nicht bestimmen, den Pythagoreern die *Entdeckung* und *Kenntnis* der regelmäßigen Polyeder abzusprechen, so ist doch nicht zu leugnen, daß die exaktgeometrische Arbeit Platos und seiner Schule auf diesem Gebiete eine erhöhte Bedeutung gewinnt.

Diese erhöhte Bedeutung wird auch einer Notiz des Suidas über Theaetet zugute kommen, welche aussagt[7]): **πρῶτος δὲ τὰ πέντε καλούμενα στερεὰ ἔγραψε.** Ich übersetze: „*Er hat zuerst die sogenannten Fünf-*

1) C. Blass, *De Platone Mathematico diss.*, Bonn 1861, S. 22.

2) a. a. O. I^3, S. 175.

3) Pappus, *Collectiones math.* V, 19 ed. Hultsch, S. 352.

4) Proklus, S. 68, 20—23

5) *De placitis philosoph* II, 6: *Πλάτων δὲ καὶ ἐν τούτοις πυθαγορίζει.* Vgl. Zeller, a. a. O $I_1{}^5$, S. 289 Anm.

6) Proklus, S. 304, 11—305, 3.

7) *Suidae Lexicon, graece et latine* rec. Bernhardy, Berlin 1854. *Θεαίτητος* I_2, S. 1120.

körper gezeichnet (konstruiert)", und finde durch Theaetet den Abschluß der langen Entwickelung vollzogen, den wir bei Plato noch vermissen.

Ich folge mit meiner Übersetzung des Wortes ἔγραψε Boeckh[1]): „Denn der sonderbare Ausdruck kann nichts anderes heißen, als daß er entweder das erste wissenschaftliche Werk darüber geschrieben oder zuerst ihre richtige Zeichnung und Projektion auf einer Fläche gelehrt habe." Damit wird, wie mir scheint, der Sinn der Stelle besser getroffen als durch Bernhardy: „primus scripsit de quinque solidis, quae sic vocantur". An Bernhardy schließen sich Bretschneider[2]), Cantor[3]) und Tannery[4]) an. Mag man aber die Stelle so oder so übersetzen, sie bildet für diejenigen, welche Pythagoras die Konstruktion der regelmäßigen Körper zuschreiben wollen, eine nicht geringere Verlegenheit als Proklus' Bericht von den unzeitgemäßen Konstruktionen des Önopides. Haben Pythagoras oder die ältesten Pythagoreer die regelmäßigen Körper entdeckt, so ist es unglaublich, daß erst 100 Jahre später das erste Werk über diesen wichtigen und besonders durch seine Verknüpfung mit den Elementen der Materie allgemein interessanten Gegenstand geschrieben sein sollte. Will man aber mit Bretschneider und Tannery Theaetets Leistung auf die *Berechnung* der Beziehungen zwischen räumlichen Diagonalen, Kugelradien und Kantenlängen der regelmäßigen Körper beschränken[5]), so ist zu bedenken, daß gerade auf diesen Beziehungen die stereometrische Konstruktion der fünf Körper beruht, und daß es ein Widerspruch ist, die *Konstruktion* dem Pythagoras[6]), die *Konstruktionsbedingungen* aber dem 100 Jahre später lebenden Theaetet zuzuweisen.

Wem diese *sachlichen* Gründe nicht stark genug sind, um das *formelle* Bedenken zu überwinden, daß Proklus in einer sonst technisch festen Verbindung das Wort σύστασις einmal nicht im *technischen* Sinne gebraucht, der muß eben annehmen, daß Proklus mit seiner Zuweisung der Körperkonstruktion einen Irrtum begeht. Tatsächlich, wenn auch stillschweigend, tun dies Hankel, Junge und Günther, die aus sachlichen Gründen nicht „an ein Aufbauen nach strenger Vorschrift" durch Pythagoras glauben können. Nach meiner Ansicht von der Natur des Geometerverzeichnisses erscheint ein solcher Irrtum sehr wohl möglich.

Es gibt aber noch eine dritte, radikale Lösung, nämlich die, den ganzen Relativsatz ὃς δὴ . . . ἀνεῦρεν, der ja so wie so durch Fremdartigkeit und Schwanken der Lesarten verdächtig ist (s. oben S. 32, 38) und durch Zuweisung der regelmäßigen Körper an Pythagoras in Widerspruch mit S. 68, 22: **τῶν καλουμένων Πλατωνικῶν σχημάτων** tritt, für den Ein-

1) *Philolaos* S. 163 2) a. a. O. S. 148. 3) a. a. O. I², S. 237.
4) a. a. O. S. 99—102. 5) Cantor wagt in dieser Frage keine Entscheidung.
6) Tannery, a. a. O. S. 101, Zeile 1, 2.

schub eines unbekannten Überarbeiters zu erklären. Jedoch, mag man sich zu dieser *formellen* Frage stellen, wie man will, meine *sachlichen* Gründe und Ergebnisse bleiben davon unberührt.

§ 6. Von Pythagoras' Geometrie wissen wir nichts.

Wird die PYTHAGORAS-Stelle des Geometerverzeichnisses so gelesen und übersetzt, wie ich es gerechtfertigt zu haben glaube, „derselbe hat bekanntlich auch die Handhabung der Proportionen und die Zusammensetzung der kosmischen Körper entdeckt", so stimmt sie zusammen mit PROKLUS' Urteil im Kommentar zu EUKLID I, 47, wonach die Entdeckung des Quadratsatzes durch PYTHAGORAS nicht glaubwürdig bezeugt ist.

Die erste sichere Kunde vom Vorhandensein des Quadratsatzes bei den Griechen geben uns die geometrischen Leistungen des HIPPOKRATES von Chios. Dieser verwendet in seiner Möndchenquadratur den Quadratsatz in sehr freier Weise, nicht nur für das rechtwinklige Dreieck, sondern auch zu Schlüssen über Spitzwinkligkeit und Rechtwinkligkeit von Dreiecken aus dem Verhalten ihrer Seitenquadrate. Derselbe hat das Problem der Würfelverdoppelung behandelt und es auf die Konstruktion der zwei mittleren Proportionalen zurückgeführt. Das setzt voraus, daß die Quadratverdoppelung und die Konstruktion *einer* mittleren Proportionalen schon geleistet war. HIPPOKRATES ist Zeitgenosse des THEODORUS, jünger als ÖNOPIDES; sein Aufenthalt in Athen wird um 450—430 angesetzt.[1]) Um diese Zeit also muß der Quadratsatz eine wissenschaftlich gesicherte, nicht mehr isolierte Tatsache, also gewiß schon seit mehreren Jahrzehnten bekannt gewesen sein.

Andrerseits aber wissen wir bestimmt, daß die Entdeckung des Quadratsatzes eine Blüte griechischen Geistes ist, nicht, wie behauptet worden ist, ein Erzeugnis indischer oder ägyptischer Spekulation, dem Abendlande etwa durch Weisheit suchende, reisende Griechen oder im Gefolge von Handels- oder allgemeinen Kulturbeziehungen übermittelt.

Es muß zwar zugestanden werden, daß Inder und Ägypter Einzelfälle des Quadratsatzes sehr früh (die Inder spätestens im 8. vorchristlichen Jahrhundert, vielleicht schon einige Jahrhunderte früher) gekannt und zu Konstruktionen von rechten Winkeln benutzt haben. Aber wenn die Inder den Satz auch bedingungslos und allgemein ausgesprochen haben, so war er bei den Orientalen doch nur ein aus Einzelfällen glücklich erratener Zusammenhang, nicht eine wissenschaftlich, anschaulich oder deduktiv begründete Tatsache, nicht ein geometrischer Lehrsatz.[2])

1) CANTOR, a. a. O. I³ S. 201.

2) Siehe meine Abhandlung: *Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt?* Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 6—23.

Es ist denkbar, daß Einzelfälle des Quadratsatzes (z. B. das rechtwinklige Dreieck 3, 4, 5) zum uralten allgemeinen Besitz der asiatisch-griechischen Kulturwelt gehört haben; es ist denkbar, daß die Auffindung dieser geometrischen Tatsachen an verschiedenen Stellen der Erde unabhängig voneinander erfolgt ist; es ist endlich denkbar, daß eine Überlieferung dieser Tatsachen von Volk zu Volk in der alten Kulturwelt erfolgt ist. Welcher von diesen Fällen für die Anfänge des Quadratsatzes vorliegt, ist nicht zu entscheiden. Das aber ist absolut sicher, daß die Griechen von den Orientalen nicht erhalten konnten, was diese selbst nicht besaßen. Mögen sie die Einzeltatsachen als geistiges Rohmaterial aus der Fremde bezogen haben, die Geometrie als Wissenschaft und der Quadratsatz als geometrische Wahrheit ist in Griechenland geboren.

Die Geburtszeit fällt nach dem Obigen in die ältere Zeit der pythagoreischen Schule, welcher HIPPOKRATES in seiner Jugend selbst angehört haben soll. Die Mathematik hatte im physischen und metaphysischen System der Pythagoreer eine große Bedeutung; ihre sicher beglaubigten Spekulationen über Zahlengesetze, ihre ebenso gesicherten Flächenuntersuchungen konnten sich naturgemäß zur Erkenntnis des Quadratsatzes zusammenschließen. So weist alles, was wir wissen, auf die älteren Pythagoreer als die Entdecker des Quadratsatzes hin.[1]) Näheres aber ist uns nicht bekannt.

Speziell über PYTHAGORAS' geometrische Leistungen versagen alle Zeugnisse. Selbst das, was PROKLUS und andere von PYTHAGORAS' Geometrie zu wissen glauben, müssen wir als nicht genügend bezeugt ansehen. Ja, ich behaupte weiter: wir werden nie lernen, PYTHAGORAS von seiner Schule zu unterscheiden; denn schon PLATO, ARISTOTELES und ARISTOTELES' Schüler haben das nicht vermocht.

Wenn schon von den frühesten Zeiten an bis PLATO und ARISTOTELES kein einziges Zeugnis für bestimmte wissenschaftliche und speziell geometrische Entdeckungen spricht[2]), so ist ausschlaggebend für mich die negative Rolle, welche PYTHAGORAS bei ARISTOTELES spielt.

„In den erhaltenen echten Schriften von ARISTOTELES kommen die Pythagoreer ungezählte Male, dagegen PYTHAGORAS selbst nur ein- oder zweimal vor. Einmal bei der Aufzählung von Männern, die besonders verehrt werden, heißt es, die Italiker verehren PYTHAGORAS; und das andere Mal an einer Stelle, die vielleicht eingeschoben ist, ALKMÄON sei etwas jünger als PYTHAGORAS. In den Fragmenten des ARISTOTELES wird

1) Deshalb ist die Beibehaltung der Bezeichnung „Pythagoreischer Lehrsatz" für den Quadratsatz angemessen als für eine Glanzleistung der pythagoreischen Schule.

2) JUNGE hat alle in Betracht kommenden Stellen besprochen, a. a. O. S. 26—27. Vgl. DIELS, *Fragmente der Vorsokratiker* unter PYTHAGORAS.

PYTHAGORAS mehrmals erwähnt. Doch von wissenschaftlichen Leistungen ist nicht die Rede."[1]) Im ersten Buche der Metaphysik bespricht ARISTOTELES systematisch die alten Philosophen, welche nach den metaphysischen Gründen des Seins und Geschehens geforscht haben; er zählt jeden einzelnen mit seiner Lehre namentlich auf. So gehen an uns vorüber THALES, ANAXIMENES, HIPPASUS, HERAKLIT, EMPEDOKLES, PARMENIDES, ANAXAGORAS, HERMOTIMUS, LEUKIPPUS, DEMOKRIT. Dann fährt er fort[2]): *ἐν δὲ τούτοις καὶ πρὸ τούτων οἱ καλούμενοι Πυθαγόρειοι τῶν μαθημάτων ἁψάμενοι πρῶτοι ταῦτα προήγαγον* — „zu den Zeiten dieser Männer und vor ihnen haben die sogenannten Pythagoreer sich zuerst mit Mathematik befaßt und sie gefördert". Dies Verschweigen von PYTHAGORAS' Namen in diesem Zusammenhange kann nicht zufällig sein. ZELLER urteilt: „Die Pythagoreer überhaupt werden so bezeichnet, als ob der Berichterstatter nicht wüßte, ob und wieweit ihre wissenschaftlichen Ansichten auf PYTHAGORAS zurückzuführen sind".[3]) Ähnlich ERWIN ROHDE: „Wir können — freilich durch einen Schluß ex silentio, wie es aber wohl nie einen gerechtfertigteren gab — mit Bestimmtheit erkennen, daß die besten Kenner pythagoreischer Lehre, ARISTOTELES und ARISTOXENUS, nichts von physischen und ethischen Doktrinen des PYTHAGORAS selbst wußten: ARISTOTELES redet ausdrücklich immer nur von Ansichten der *Pythagoreer*, und ARISTOXENUS, noch vorsichtiger, referiert sogar nur, was die ihm bekannten letzten Pythagoreer von den ethischen Prinzipien älterer Mitglieder der Schule aussagten".[4])

Früh schon, ja, noch ehe er seine ionische Heimat verließ, hatte die Sage um PYTHAGORAS, die übermächtige und unverstandene Persönlichkeit, den Seher und Wundertäter, ihren Schleier gehüllt[5]); früh schon war das, was er an wissenschaftlichen Leistungen hervorgebracht haben mag, in der Gesamtheit seiner Schule verborgen. Wenn ARISTOTELES und sein Schüler ARISTOXENUS dieses Dunkel nicht haben erhellen können, mit

1) JUNGE, a. a. O. S. 26—27.

2) ARISTOTELES, Metaphysik, Ausg. von BEKKER, Berlin 1831, I, 5, S. 985.

3) ZELLER, a. a. O. S. 280. 310

4) E. ROHDE, *Kleine Schriften* II, S. 103.

5) ZELLER I_1^5, S. 280, 310, 311, 312. ROHDE, *Kleine Schriften* II, S. 105, 106. Derselbe, *Psyche* 2. Aufl. II, S. 99, 160. NESTLE, *Die Vorsokratiker in Auswahl*, Jena 1908, S. 26. So erklärt es sich auch, daß ISOKRATES (um 393) in seiner Lügenrede (BUSIRIS) gerade den PYTHAGORAS nach Ägypten reisen und dort sein Wissen schöpfen läßt. Zu dem famosen König BUSIRIS paßte besser PYTHAGORAS, von dem man schon damals viel fabelte und wenig wußte, als ein im hellen Lichte der Geschichte stehender Mann. Gerade für PYTHAGORAS durfte ISOKRATES die an sich unverfängliche Erzählung vom Aufenthalt in Ägypten in seine Übertreibungen auslaufen lassen, ohne Lügen gestraft zu werden (ZELLER, a. a. O. I_1^5, S. 304, 2; anders urteilt CANTOR, a. a. O. I^3, S. 149).

welchem Rechte dürfen wir erwarten, daß EUDEMUS, ebenfalls Schüler des ARISTOTELES, imstande sein sollte, uns Mitteilungen über geometrische Entdeckungen des PYTHAGORAS zu machen?

EUDEMUS hat mit THEOPHRAST dem ARISTOTELES von allen seinen Schülern am nächsten gestanden. Er hat die Metaphysik des ARISTOTELES herausgegeben[1]), das Werk, in welchem das Nichtwissen um PYTHAGORAS so handgreiflich zutage tritt. Eine Durchmusterung der Fragmente des EUDEMUS[2]), zunächst abgesehen von den durch PROKLUS überlieferten Zitaten, lehrt, daß in sicheren EUDEMUS-Stellen die Pythagoreer viermal erwähnt werden, dreimal der Pythagoreer ARCHYTAS, aber nicht einmal PYTHAGORAS selbst.[3]) Am überzeugendsten wirken die Fragmente der *ἀστρολογικὴ ἱστορία*. Darin werden mit fester Namenzuordnung astronomische Lehren von ÖNOPIDES, THALES, ANAXIMANDER, ANAXIMENES, ANAXAGORAS, EUDOXUS, KALIPPUS, EUKTEMON, METON erwähnt; dann heißt es (ed. SPENGEL 141, 16—18): *ὡς Εὔδημος ἱστορεῖ τὴν τῆς θέσεως τάξιν εἰς τοὺς Πυθαγορείους πρώτους ἀναφέρων* — „so erzählt EUDEMUS, welcher die erste Kenntnis der Reihenfolge (der Planeten) den Pythagoreern zuschreibt“. Es ist deutlich zu erkennen, daß EUDEMUS' Wissen um PYTHAGORAS in keiner Weise über das seines Lehrers hinausgeht. Ebensowenig wie dieser weiß er PYTHAGORAS von seiner Schule zu trennen — natürlich: denn wo die Überlieferung fehlt, können historische Angaben wohl bei Phantasten und Legendenschöpfern, wie die Neupythagoreer waren, aus dem Nichts auftauchen, aber nicht bei einem exakten Forscher wie EUDEMUS. Er hat im Auftrage und unter den Augen ARISTOTELES' seine Geschichte der Geometrie als Teil des großen enzyklopädischen Werkes verfaßt, welches sich die Darstellung der Geschichte aller Wissenschaften zum Ziele setzte.[4]) Derselbe Mann hat unmöglich in dem einen Werk sagen können, wozu ihm die Quellen in dem anderen versagten.

1) ZELLER, a. a. O. II_2^3, S. 84. ROHDE, *Kleine Schriften* II_1, S. 441, 2. PAULY-WISSOWA, *Realenzyklopädie des klassischen Altertums* VI_1, S. 896, 897.

2) *EUDEMI Rhodii Peripatetici Fragmenta* collegit SPENGEL, Berlin 1866, iterum 1870. MULLACH, *Fragmenta philosophorum graecorum* III, Paris 1881, 222—292, 296—297.

3) Eine Bestätigung liefern die Werke THEOPHRASTS, des anderen *ἑταῖρος Ἀριστοτέλους* (herausgeg. von WIMMER, Leipzig 1854—1862 und Paris 1866). Darin werden 76 mal Philosophen zitiert, davon 56 mal vorsokratische, einmal die Pythagoreer (416, 33 in der Verbindung *Πλάτων δὲ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι*), nicht einmal PYTHAGORAS selbst.

4) ZELLER, a. a. O. II_2^3, S. 869, 870. DIELS, Hermes 28, 1893, S. 408, 409. PAULY-WISSOWA, *Realenzyklopädie* VI_1, S. 897. Die Angabe des DIOGENES LAERTIUS (V, 48), daß auch THEOPHRAST eine Geschichte der Geometrie verfaßt habe, beruht nach USENER (*Analecta Theophrastea,* diss. Bonn 1858, S. 17) auf Verwechslung mit EUDEMUS. An USENER schließen sich an ZELLER a. a. O. II_2^3, S. 810, HEIBERG, Philologus 43, S. 346, TANNERY, a. a. O S. 73. Vgl dagegen CANTOR, a. a. O. I^3, S. 118, 257.

Bestätigt sehen wir diesen Schluß durch das verschiedene Verhalten des PROKLUS da, wo es sich um geometrische Leistungen der Pythagoreer, und da, wo es sich um PYTHAGORAS selbst handelt. Dreimal weist er den Pythagoreern geometrische Entdeckungen zu; zweimal davon beruft er sich auf EUDEMUS, das drittemal muß er nach dem ganzen Tone des Berichts eine sichere Quelle vor sich haben, welche wohl keine andere als EUDEMUS' Geschichte der Geometrie sein kann.[1]) Dreimal wird PYTHAGORAS als Geometer erwähnt, aber nicht einmal mit Berufung auf EUDEMUS. Ich erinnere auch an die Zaghaftigkeit, Umständlichkeit, Verklausulierung, mit der PROKLUS in der Besprechung von EUKLID I, 47 den PYTHAGORAS selbst berührt, und im Gegensatz dazu an die Sicherheit und Klarheit, mit der er dicht hinterher von der Mehrzahl der ἐπιστάντες spricht[2]), welches nur die Pythagoreer sein können: man merkt, daß er von dem schwankenden Boden der Legende auf den festen Grund der Geschichte hinübertritt.

Wir sehen: *die Lage der PYTHAGORAS-Frage war für PROKLUS 1000 Jahre nach PYTHAGORAS keine andere wie für uns weitere 1500 Jahre später. Alte Zeugnisse fehlten damals wie heute; junge Nachrichten gab es, aber sie waren schlecht beglaubigt und wenig vertrauenswürdig durch legendarisches Beiwerk; ihnen glauben wir nicht, und auch PROKLUS hat ihnen nicht geglaubt. So wissen wir nichts Gewisses von PYTHAGORAS dem Geometer, und PROKLUS hat ebensowenig gewußt.*

Wenn PROKLUS trotzdem im Geometerverzeichnis dem PYTHAGORAS bestimmte geometrische Entdeckungen, die Proportionen und die regelmäßigen Körper, zuweist, so kann er sich nur auf nacheudemische Schulüberlieferung, nicht auf alte Zeugnisse gestützt haben. *Wir* müssen heute einerseits zurückhaltender sein als PROKLUS, indem wir uns ganz auf den Aristotelischen Standpunkt zurückziehen und nicht das Unmögliche versuchen, PYTHAGORAS' Leistungen von denen seiner Schule zu trennen. Anderseits aber werden die vorhandenen geschichtlichen Überlieferungen und unsere Einsicht in den notwendigen Werdegang einer Wissenschaft es uns ermöglichen, in die gesamte griechische Geometrie die Geometrie der Pythagoreer organisch einzureihen und innerhalb dieser eine Entwickelung vom Einfachen zum Komplizierten zu konstruieren.

Daß freilich PYTHAGORAS in den Augen seiner Zeitgenossen nicht *bloß* Seher und Wundertäter war, daß er nicht *bloß* ethische und theosophische Tendenzen verfolgte, sondern eine starke Richtung auf das Wissenschaftliche hatte, scheint durch die wissenschaftliche Betätigung seiner Schule und durch den ältesten Zeugen, der sich über ihn äußert,

1) Vgl. oben S. 27. 2) Vgl. oben S. 21.

durch Heraklit (um 500) sichergestellt, und zwar um so sicherer, als Heraklit ihm in zwei bissigen Fragmenten[1]) nicht lobend, sondern von seinem Standpunkte aus tadelnd seine *πολυμαθίη* — „Vielwisserei" — vorwirft. Diesen Zeugnissen scheint Junge nicht genügend Rechnung zu tragen.[2]) Wir dürfen an Pythagoras' wissenschaftliche Bestrebungen glauben; aber wir müssen eingestehen, daß wir Einzelnes oder Bestimmtes über diese Bestrebungen oder ihre Ergebnisse auf keinem Gebiete des Wissens erkennen können. Was speziell die Mathematik betrifft, so kann das Ergebnis meiner Untersuchung nicht zutreffender ausgedrückt werden als mit den Worten Zellers[3]): „*So wenig wir aber auch bezweifeln können, daß Pythagoras zu der erfolgreichen Entwickelung der Mathematik in seiner Schule den Anstoß gegeben hat, so unmöglich ist es doch, aus den abgerissenen und durchaus unzuverlässigen Angaben über ihn eine Vorstellung von seinem mathematischen Wissen zu gewinnen, welche auch nur annähernde geschichtliche Sicherheit hätte*".

Die geometrische Pythagoras-Frage ist eben keine andere wie die philologische und philosophische: der Unterschied ist nur, daß die Mathematiker sich immer noch nicht zu den Konsequenzen verstehen können, welche Philologen und Philosophen längst gezogen haben. Zwar macht jeder Geschichtschreiber der alten Geometrie formell den Quellen das Zugeständnis der Unsicherheit und Unzuverlässigkeit, aber keiner kann sich entschließen, den lieben alten Glauben an Pythagoras, den Schöpfer der Geometrie, aus dem Herzen zu reißen. Solche Anhänglichkeit an Altgewohntes hat Hankel[4]), der von allen am weitesten im Zweifel geht, die Worte diktiert: „Doch möchte ich nicht so weit gehen, den Lehrsatz selbst (nämlich den Quadratsatz) dem Pythagoras abzusprechen, obgleich keine einzige, nur einigermaßen glaubwürdige Nachricht darüber vorhanden ist". Tannery[5]) gesteht zu: „L'insuffisance des preuves relatives à l'extension réelle des connaissances géométriques de Pythagore ne peut être niée"; aber statt diese Beweise wegen ihrer Unzulänglichkeit zu verwerfen, findet er, „que ces preuves ont été un peu trop negligées"; und der geistreiche Mann läßt aus ihnen „le premier Ouvrage mathématique", seine „Tradition

1) Diels, *Fragmente der Vorsokratiker*, Berlin 1903; Heraklit fragm. S. 40 u. 129. Wenn fragm. 129, in welchem Pythagoras' *ἱστορίη* „Forschung" als *πολυμαθίη*, *κακοτεχνίη* „Vielwisserei, eine üble Kunst" — („Rabulisterei" Diels, „Spitzfindigkeit" Nestle) — bezeichnet wird, nach Diels (II_1, S. 666) unecht und eine teilweise Wiederholung von fragm. 40 ist, so bleibt doch eben dieses bestehen, in welchem Heraklit in bezug auf Hesiod, Pythagoras, Xenophanes und Hekataeus erklärt: *πολυμαθίη νόον ἔχειν οὐ διδάσκει* — „Vielwisserei lehrt nicht Verstand haben".

2) Junge, a. a. O. S 44

3) a. a. O. I_1^5, S. 320, 2. 321. Vgl. E. Rohde, *Psyche*, 2. Aufl. II, S. 159, 168. Nestle, a. a. O. S. 27. 4) a. a. O. S. 97; vgl. oben S. 18. 5) a. a. O. S. 106.

touchant PYTHAGORE" erstehen. Für derartige Konstruktionen hatte bisher schon die Grundlage gefehlt; sie fehlt erst recht, wenn der Eckstein PROKLUS-EUDEMUS nicht mehr standhält.

Die Geschichtsforschung der Mathematik hat sich in der PYTHAGORAS-Frage im Eifer des Kombinierens, im Glauben an eigene und fremde geniale Inspiration in Gebiete vorgewagt, in denen die Widerlegung aufhört, aber auch der Beweis und sogar die haltbare und fruchtbare Hypothese. Sie wird sich darauf besinnen müssen, daß sie keine anderen Handhaben besitzt, wie gesicherte Überlieferung und das Gesetz der Entwickelung des Schwierigeren aus dem Leichteren. Wo beide versagen, muß sie den Mut haben, ein „ignoramus" auszusprechen.

Zusammenfassung.

I. Von wissenschaftlichen und speziell geometrischen Entdeckungen des PYTHAGORAS hat weder EUDEMUS, der älteste Geschichtschreiber der griechischen Geometrie, noch sein Lehrer ARISTOTELES, noch überhaupt die klassische Zeit etwas gewußt. Alle Angaben über solche Entdeckungen sind späte erfolglose Versuche, PYTHAGORAS' Leistungen von denen seiner Schule zu trennen.

II. Dem Geometerverzeichnis des PROKLUS liegt hauptsächlich EUDEMUS' Geschichte der Geometrie, daneben auch andere Quellen und quellenlose Schulüberlieferung zugrunde. Doch ist es Auszug aus EUDEMUS nur, soweit es Namenverzeichnis ist. Im wesentlichen ist es ein von PROKLUS selbst verfaßtes Räsonnement über die Angaben des EUDEMUS.

III. PROKLUS hat im Geometerverzeichnis PYTHAGORAS nicht die Entdeckung des Irrationalen (τῶν ἀλόγων) und die geometrische Konstruktion der regelmäßigen Körper zuerkannt, sondern höchstens die Handhabung der Proportionen (τῶν ἀναλόγων) und Kenntnis der Zusammensetzung der regelmäßigen Körper. Für den Entdecker des Quadratsatzes hat PROKLUS den PYTHAGORAS nicht gehalten.

IV. Bei dem Versagen aller alten Quellen sind wir außerstande, PYTHAGORAS irgendeine bestimmte geometrische Entdeckung, z. B. die des Quadratsatzes, zuzuschreiben. Wohl aber wissen wir von der Entwickelung der griechischen Geometrie genug, um behaupten zu können, daß er gewisse Entdeckungen, wie die des Irrationalen, Konstruktion der regelmäßigen Körper, allgemeine Flächenanlegung, Konstruktion einer Figur von gegebener Gestalt und Größe, nicht gemacht haben kann.

Le plus ancien traité français d'algorisme.

Par Victor Mortet à Paris.

Le plus ancien traité français d'algorisme a été publié pour la première fois, en 1882, dans le Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche.[1]) Il avait déjà été signalé comme étant à la Bibliothèque Sainte-Geneviève par l'abbé Lebeuf[2]) et par Daunou.[3]) Après avoir porté successivement les cotes BB2, (in-4^0) et R. l. 17, il est désigné actuellement par la notation 2200. A la suite de cet opuscule français sur l'algorisme (150 r^0—151 r^0), se trouve un traité de géométrie, également écrit en français, qui est aussi le plus ancien qui soit connu, et que nous publions ailleurs.

Nous n'entrerons pas ici dans la description du manuscrit 2200 de la Bibliothèque Sainte-Geneviève; nous renverrons à ce sujet aux observations contenues dans la publication faite, en 1882, dans le Bullettino di bibliografia e di storia delle scienze matematiche e fisiche, au Catalogue des mss.[4]) de cette Bibliothèque, et enfin à l'édition que nous donnerons du plus ancien traité français de géométrie qui s'y trouve conservé. Mais nous avons à signaler aussi un autre ms. du XIII^e siècle de l'algorisme en question, celui de la Bibliothèque Nationale, qui porte le no. 2021 (Mazarin) du fonds français (anc. 7929), où ce traité occupe les f^{os} 154 r^0—155 r^0.

Il est d'autant plus nécessaire de publier avec soin le plus ancien traité français d'algorisme que dans l'édition qui en a été donnée, d'après le seul ms. 2200 de la Bibliothèque Sainte-Geneviève, différents passages

1) Il a été édité dans ce recueil par M. Charles Henry.

2) *L'Etat des sciences en France depuis la mort du roy Robert . . . jusqu'à celle de Philippe le Bel . . .*, 1741, p. 93; cf. *Collection Leber* (1838), p. 540: „Le traité anonyme de l'algorisme conservé à Sainte-Geneviève et rédigé au plus tard sous Philippe le Hardi en langue vulgaire, enseigne l'usage de la multiplication selon les chiffres arabes, et les règles pour chercher la racine cube de quel nombre on voudra".

3) *Discours sur l'état des lettres en France au XIII^e siècle*, dans l'*Hist. littéraire de la France*, t. XVI (1824), p. 114.

4) Voy. ce *Catalogue* . . . par M. Ch. Kohler, t. II (1896), p. 283—285.

mal rendus sont incompréhensibles[1]); de plus, la ponctuation y laisse beaucoup à désirer. Enfin il est nécessaire de conférer le texte provenant du ms. 2200 de la Bibliothèque Sainte-Geneviève avec celui du ms. fr. 2021 de la Bibliothèque Nationale. Reconnaissons d'ailleurs sans hésiter que, s'il y a quelques différences de langage entre le texte du ms. fr. 2021 de la Bibliothèque Nationale et celui du ms. 2200 de Sainte-Geneviève, elles ne sont pas considérables: nous sommes dans l'un et l'autre de ces textes, en présence de formes qui appartiennent principalement au dialecte picard. Au point de vue du fond, il y a de part et d'autre les mêmes lacunes dans l'exposé des matières de l'Algorisme. Dans la transcription de ces deux manuscrits, on observe des inadvertances pareilles ou à peu près, de part et d'autre: preuve qu'ils dérivent tous deux d'une même source; ils sont contemporains. Le ms. fr. 2021 de la Bibliothèque Nationale renferme quelques indices phonétiques, tels que l'emploi de *vels* plus fréquent que celui de *veus* (veux) qui pourraient faire incliner à le juger un peu antérieur à celui de la Bibliothèque Sainte-Geneviève. Mais la différence nous paraît minime; quoi qu'il en soit, c'est le texte du ms. fr. 2021 que nous publions, en l'accompagnant des variantes empruntées au ms. 2200 de Sainte-Geneviève, que nous désignons par: „S.-G.“ Nous donnons en fac-similé le texte de deux pages de ce dernier manuscrit. Constatons enfin que Littré[2]) et Godefroy[3]) ont eu connaissance du ms. fr. 2021 de la Bibliothèque Nationale, qu'ils ont inexactement désigné sous le nom de *Comput*, et que s'ils l'ont utilisé, ils l'ont fait d'une façon insuffisante, et n'ont eu aucune connaissance du rapprochement que l'on peut établir entre nos deux manuscrits.

Nous pouvons approcher de très-près de l'original latin qui a pu servir au traducteur anonyme, ou plutôt à l'adaptateur du très-ancien texte français que nous étudions. Tout récemment, M. Gustaf Eneström[4]) a

1) Voy. la question que pose à ce sujet M. G. Eneström, dans la Bibliotheca Mathematica 5_3 (1905), p. 409—410. La transcription du précédent éditeur laisse plus d'une fois à désirer d'une façon notable Ainsi, au lieu de:

dusq.,	il faut corriger: *dusques.*	*planc,*	il faut corriger: *plane.*
greigneur,	„ „ „ : *greignour.*	*anoec,*	„ „ „ : *avoec.*
gradres,	„ „ „ : *graindres.*	*enistra,*	„ „ „ : *en istra.*
duvision,	„ „ „ : *devision.*	*teremaint,*	„ „ „ : *te remaint.*
iasambleras,	„ „ „ : *i asambleras.*	*par,*	„ „ „ : *pour.*
nenaist,	„ „ „ : *en naist.*	*ciss,*	„ „ „ : *cis.*

2) Voy. notamment *Dict. de la langue française,* v° Algorithme (Hist. XIIIe s.). Littré imprime à tort *angorisme;* c'est la forme *augorisme* que donne le ms. fr. 2021, de même que celui de la Bibliothèque Sainte-Geneviève.

3) Voy. *Dict. de l'anc. langue française,* v° Algorisme.

4) Biblioth. Mathem. 5_3 (1905), p. 409—410.

cru retrouver cet original dans le *Carmen de algorismo*, attribué communément à ALEXANDRE DE VILLEDIEU, qui vivait, comme on sait, dans la première moitié du XIII^e^ siècle, et publié par J. O. HALLIWELL dans ses *Rara mathematica.*[1]) Si l'on se réfère, en effet, à ce poème latin, on y trouve un certain nombre de vers qui semblent traduits directement par l'auteur anonyme de l'Algorisme français. Mais il faut bien observer que la traduction n'est pas toujours littérale, qu'elle est loin d'être complète et qu'il s'y trouve parfois des changements sensibles. Il est donc permis de se demander si l'on ne peut se représenter un Algorisme latin que nous ne connaissons pas, qui est peut-être perdu, lequel aura servi de prototype à notre Algorisme français. Il va sans dire qu'étant donné le caractère tout mathématique d'une œuvre de ce genre, les différents traités qu'on en faisait au XIII^e^ siècle devaient offrir les plus grandes ressemblances, que l'exposé arithmétique ne devait guère différer, sauf pour certains détails, ou pour la manière non uniforme, de présenter les opérations de l'arithmétique. Au point de vue de la forme mnémotechnique, la versification semblait offrir



Pl. I. Ms. bibl Sainte-Geneviève 2200 f. 150 r°.

1) Londres 1839, p. 73—83.

certains avantages à des lettrés qui s'exerçaient à renfermer dans un mètre plus ou moins poétique les données assez arides d'un traité d'algorisme. Les manuscrits du moyen âge nous offrent parfois des écrits de ce genre qui ont été autrefois en faveur.

Le *Carmen de algorismo*, de même que le très-ancien texte français débute par l'énumération des figures numérales qui recevront plus tard le nom de chiffres. Elles sont disposées dans l'ordre que nous reproduisons ci-dessous.

„Haec algorismus ars praesens dicitur, in qua
Talibus Indorum fruimur bis quinque figuris:
0. 9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1."

Dans les vers suivants, nous trouvons l'indication du chiffre 0 et de son caractère:

„Primaque significat unum; duo vero secunda;
Tertia significat tria; sic procede sinistra,
Donec ad extremum venias, quae *cifra* vocatur,
Quae nil significat: dat significare sequenti."

„Mais *cyfre* ne fait riens, mais ele fait les autres figures multeplier", dit à son tour le traité français d'algorisme.

Les vers qui viennent ensuite marquent la valeur de position des figures numérales:

„Quaelibet illarum, si primo limite ponas,
Simpliciter se significat; si vero secundo,
Se decies; sursum procedas multiplicando."

Algorisme français:

„Se tu mes cascune de ces figures u premier lieu, ele fera soi simplement; se tu la més u secont lieu, ele fera 10 fois soi..."

Puis vient la distinction déjà ancienne entre les *digiti*, les *articuli* et les *compositi*:

„Post praedicta scias breviter quod tres numerorum
Distinctae species sunt: nam quidam digiti sunt;
Articuli quidam; quidam quoque compositi sunt."

De même lisons-nous dans le texte français:

„Tu dois savoir qu'il sunt 3 manieres de nombres: car li 1 sont degit, li autre, article, li autre, compost."

Un peu plus loin, l'auteur du poème latin sur l'algorisme énumère les opérations d'arithmétique, qui sont pour lui les suivantes, à savoir: 1° l'addition, 2° la soustraction, 3° la duplication, 4° la dimidiation, 5° la multiplication, 6° la division, 7° l'extraction des racines:

„Septem sunt partes, non plures, istius artis:
Addere, subtrahere, duplareque, dimidiare;
Sextaque dividere est, sed quinta est multiplicare;
Radicem extrahere pars septima dicitur esse.“

Notre texte français se sépare ici du texte en vers latins en ce qu'il ne semble reconnaître que six opérations d'algorisme, les six premières que l'on vient de mentionner, à l'exclusion de l'extraction des racines.[1])



Pl. II. Ms. bibl. Sainte-Geneviève 2200 f. 151 r°.

La division n'y figure même pas, au premier abord, par la négligence certaine des copistes des deux manuscrits; mais remarquons bien que cette opération est mentionnée un peu plus loin. Il y a donc lieu de combler cette lacune ainsi qu'il suit:

1) Halliwell cite en note (p. 74), dans son édition du *Carmen de algorismo* quelques vers français tirés du ms. Seld. Arch. B. 26., où nous voyons, au contraire, l'indication des sept opérations spéciales conformes à celles que mentionne ledit *Carmen*:

„En argorisme devon prendre
VII espéces . . .
Adision, subtracion,
Doubloison, mediacion . . .“

„6 parties sont d'augorisme: assambler et abatre, doubler, dimidier, multeplier, [— *deviser*]. Se tu assambles u abas ou dimidies, tu commenceras a destre; se tu doubles ou multeplies ou *devises*, tu commenceras a senestre."

C'est la traduction des vers latins suivants:

Subtrahis aut addis a dextris vel mediabis;
A leva dupla, divide, multiplicaque.

Mais le vers suivant:

Extrahe radicem semper sub parte sinistra.

n'a rien qui lui réponde dans le texte français.

Suit la manière de disposer les figures numérales dans l'opération de l'addition:

„Addere si numero numerum vis, ordine tali
Incipe: scribe duas primo series numerorum,
Primam sub prima recte ponendo figuram,
Et sic de reliquis facias, si sint ibi plures."

C'est ce qu'exprime ainsi l'ancien texte d'algorisme français:

„Se tu vels assambler 1 nombre a autre, tu escriras le grignor deseure et le menor desous, en tele maniere que tu metes la premiere figure desous sor la premiere deseure, la seconde sor la seconde, et les autres ensi en ordene."

Nous n'insisterons pas davantage sur ces rapprochements entre le texte latin du *Carmen* et le texte français d'algorisme; dans certains passages, l'un et l'autre se serrent de très-près, ainsi qu'un examen attentif permet de le constater.

Algorisme.

Chi commence[1]) *a[l]gorisme.*[2])

§ 1. — Ceste senefiance[3]) est apelée[4]) algorisme, de le quele nous usons de tels[5]) figures: .9. 8. 7. 6. 5. 4. 3. 2. 1. Li premiere fait .1., la seconde fait .2., la tierce fait .3., et les autres ausi jusc' à la[6]) darrainne[7]) qui[8]) est apelée[9]) cyfre[10]) 0. Se tu mes cascune[11]) de ces figures u[12]) premier lieu, ele[13]) fera soi simplement; se tu la més u[14]) secont lieu, ele[15]) fera 10 fois soi; et en tant lieu que[16]) tu le[17]) meteras,

1) *commenche*, ms. S.-G. (Sainte-Geneviève). 2) *algorisme*, S.-G.
3) *signifiance*, S.-G. 4) *appellée*, S.-G. 5) *teles*, S.-G 6) *le*, S.-G.
7) *darraine*, S.-G. 8) *ki*, S.-G 9) *appellée*, S.-G. 10) *cifre*, S.-G.
11) *aucune*, S.-G. 12) *ou*, S.-G. 13) *elle*, S.-G. 14) *ou*, S.-G.
15) *elle*, S.-G. 16) *ke*, S.-G. 17) *la*, S.-G.

ele[1]) fera 10, tans plus qu él[2]) lieu devant. Mais cyfre[3]) ne fait riens, mais ele[4]) fait les autres figures multeplier.[5])

§ 2. — Tu dois savoir qu'il[6]) sunt 3 manieres de nombre: car li 1 sont degit, li autre, article, li autre, compost. Li digit sunt dusques à[7]) 9, li article, 10, et li nombre qui[8]) sont multeplié[9]) par 10; li compost sont establi des articles et des digis .11. 12. 13. et les autres. Quant tu escriras, tu dois esgarder le nombre: se c'est digis, tu l'escriras par soi; se c'est articles, tu escriras 0 avant, et aprés l'article; se c'est compost, tu escriras le digit avant, aprés l'article.

§ 3. — 6 parties sont d'augorisme: assambler et abatre, doubler, dimidier, multeplier, [deviser]. Se tu assambles u abas ou dimidies, tu commenceras a destre; se tu doubles[10]) ou multeplie[s] ou devises, tu commenceras a senestre.

§ 4. — Se tu vels[11]) assambler un nombre à autre, tu escriras le grignor[12]) deseure et le menor[13]) desous, en[14]) tele maniere que[15]) tu metes la premiere figure desous sor la premiere deseure, la seconde sor[16]) la seconde, et les autres ensi en ordene. Se il i a plussors[17]) figures aprés, tu assambleras les 2 premiers. S'il en vient digis[17]), tu l'escriras[18]) u[19]) lieu de le figure deseure; s'il en vient articles, tu escriras 0 deseure, et aprés l'article, des figures deseure par ordre.

§ 5. — Tu ne dois deviser d'autre plus de 9 fois: de cele devision te venra 1 nombre par quantes fois tu le devises, saces[20]) tu le dois metre sor la premiere du nombre desous ton nombre; aprés, retrairas les figures du nombre desous tant com li nombres deseure sera graindres du[21]) nombre desous, et deviseras derekief le nombre de celi deseure ausi com tu as fait devant, et escriras le nombre par quantes fois tu le devises sous la premiere del nombre desous; et quant tu averas tot devisé que[22]) li nombres deseure sera menres de celi desous, tu garderas ce[23]) nombre dehors, et le proveras aprés par multiplication. Se tu as bien devisé, multeplie[24]) cele devision, et quant tu l'averas multeplié, tu i asambleras le nombre que[25]) tu gardes par dehors, et lues troveras tem premier nombre, et ensi proveras se tu as bien fait.

§ 6. — Se tu multeplies aucun nombre par soi meismes[26]) ce[27]) nombres ki en istera sera cubes. Se [tu] veus la racine[28]) cube d'aucun

1) *elle*, S.-G. 2) *kel*, S.-G. 3) *cis ciffre*, S.-G. 4) *elle*, S.-G. 5) *multiplier*, S.-G. 6) *ki*, S.-G. 7) *a* manque S.-G. 8) *ki*, S.-G. 9) *multiplié*, S.-G. 10) *dobbles*, S.-G. 11) *veus*, S.-G. 12) *greignour*, S.-G. 13) *menour*, S.-G 14) *et*, S.-G. 15) *ke*, S.-G. 16) *sour*, S.-G. 17) *plusou[r]s*, S.-G. 17bis) *digitz*, S.-G. 18) *escriras*, S.-G. 19) *ou*, S.-G. 20) *saches*, S.-G. 21) *dou*, S.-G. 22) *ke*, S.-G. 23) *che*, S.-G. 24) *multiplie*, S.-G. 25) *ke*, S.-G. 26) *misme*, S.-G. 27) *chil*, S.-G. 28) *rachine*, S.-G.

nombre querre tu le dois escrire aprés, desous le daerrain[1]) lieu de 1000 dois escrire un digit qui multeplié en soi cubement destruis ou regart desous le nombre deseure en tant com il puet; apres, le plane, et si le treble, et si le met 2 poins avant; et si dois metre le soustreble adés desous le treble; aprés, tu dois metre un noel digit devant le treble, li quels[2]) avoec le soustreble multeplie le treble, aprés la somme qui en naist multeplit[3]) par soi, le quele somme soustrera[4]) ou regart de le treble; aprés, li digis soit menés en soi cubelment, et la somme qui en istrera soustrera el regart del digit; aprés, plane le digit, et si le treble, et si le met 2 poins avant; derekief[6]) met un novel digit devant, qui avoec les soustrebles multeplit les trebles, et aprés, par lui seul; la quels[7]) somme soustrai el regart de le daerraine[8]), treble aprés li digis[9]) multeplit[10]) soi meisme[11]) cubement, la somme qui en venra soustrai el regart du digit; ensi dois tu adés faire dusques desous le daerrainne.[12]) Se tu planes tot le nombre deseure, il est cubes; la racine est li soustrebles et li digis daerrains trovés, la quele multeplie par soi cubement: si reveras[13]) le primerain. Se aucune cose remaint[14]), li nombres que[15]) tu proposes n'est pas cubes, mais tu as le plus grant desous. Se tu multeplies[16]) le racine par soi cubelment, aprés ajouste[17]) le remanant: si dois ravoir le primerain. Quant tu trebles le digit, s'il en vent compos[18]) ne articles, [fai ent selonc les rieules][19]) de duplation. Se tu ne pues[20]) ouvrer[21]) par nombre treble, met cyfre[22]) pour digit et puis si retrai avant, et ouvreras[23]) aprés, si com je t'ai dit devant. S'il avient que[24]) cifre[25]) te demeurent seules, met 0[26]) pour[27]) digit, et puis si retrai avant, et aprés met 0.[28]) Tu dois metre desous digit[29]) 0, l'autre 0 en lieu de soustreble. Ce el nombre que tu proposes quart racine n'a ke 2. figures ou 3, met un digit[30]) a destre desous la primeraine qui[31]) multeplié[32]) en soi cubement destruise le nombre deseure, en tant com il[33]) puet, et cis digis est la racine[34]) de cel nombre.

---

1) *darrain,* S.-G. 2) *ques,* S.-G. 3) *multipliet,* S.-G. 4) *soustrai,* S.-G.
5) *soustrai,* S.-G. 6) *derecief,* S.-G. 7) *queus,* S.-G. 8) *derraine,* S.-G.
9) *digist,* S.-G. 10) *multiplist,* S.-G. 11) *misme,* S.-G. 12) *darraine,* S.-G.
13) *raveras,* S.-G. 14) *te remaint,* S.-G. 15) *ke,* S.-G. 16) *multiplies,* S.-G.
17) *rachine,* S.-G. 18) *compost,* S.-G.
19) Nous rétablissons ici le passage placé entre crochets d'après le ms. de S.-G., le copiste ayant omis de le transcrire dans le ms. de la Bibliothèque Nationale.
20) *poes,* S.-G. 21) *ovrer,* S.-G. 22) *ciffre,* S.-G. 23) *overras,* S.-G.
24) *ke,* S.-G. 25) *ciffre,* S.-G.
26) Au lieu de 0, le ms. S.-G. donne le mot *ciffre.* 27) *por,* S.-G.
28) *ciffre* au lieu de 0 S.-G. 29) même variante. 30) même variante.
31) *ki,* S.-G. 32) *multiplie,* S.-G. 33) *le,* S.-G. 34) *rachine,* S.-G.

Deniers.	Saus.	Livres . . .
II	I	
III	II	I
IIII	III	II
V	IIII	III
VI	V	IIII
VII	VI	V
VIII	VII	VI
VIIII	VIII	VII
X	VIIII	VIII
XI	X	VIIII

C liv.	M liv.	M x liv.	M c liv.
I	I	I	I
II	II	II	II
III	III	III	III
IIII	IIII	IIII	IIII
V	V	V	V
VI	VI	VI	VI
VII	VII	VII	VII
VIII	VIII	VIII	VIII
VIIII	VIIII	VIIII	VIIII

Glossaire.

(Les chiffres renvoient aux paragraphes du texte.)

Abatre, soustraire, 3.
Adès, á present, 6.
Ajouster, ajouter, 6.
Apeler, appeler, 1.
Article, dizaine numérique, *passim.*
Asambler, assambler, additionner, 3, 4, 5.
Augorisme, algorisme, 2.
Ausi, aussi, 1, 5.
Averas, auras, 5.
Avient, advient, 6.
Avoec, avec, 6.

Cascun, cascune, chacun, chacune, 1.
Ce, (pour *se*), si, voy. *Se.*
Cel, cele, cet, cette, 5.
Celi, celui, 5.
Cest, ceste, cet, cette, 1.
Che, ce, 5.
Chil, cet, 6.
Cifre, ciffre, cyfre, chiffre, 1, 6.
Cis, ce, 6.
Com, comme, *passim.*
Commenche, commence, 1.
Compos, compost, nombre combiné à l'aide d'unités et de dizaines, *passim.*
Cose, chose, 6
Cube, cubes, 6.
Cubement, cubelment, en forme de cube, 6.

Daerrain, daerraine, daerrainne; darrain, darraine, dernier, dernière, 1, 6.
Degit, voy. Digit.
Del, du, 5.
Derecief, derekief, derechef, 5, 6.
Descure, au-dessus, 4, 5, 6.
Desous, au-dessous, 4, 5, 6.
Destre, droite, 3, 6.
Destruis, détruise, 6.
Devision, diviser, 3, 5.
Deviser, division, 5.
Digit, (c. rég. sing., c. suj. pl.), *digis* (c. suj. sing.); cf. *digitz, digist,* unité numerique, *passim.*
Dimidier, prendre la moitié, 3. — La dimidiation est l'opération d'arithmétique qui consiste à prendre la moitié d'un nombre.

Dobbler, doubler, 3: cf. *Duplation.*
Dou, du, 5.
Duplation, opération d'arithmétique (appelée aujourd'hui duplication), qui consiste à prendre le double d'un nombre, 6.
Dusques, jusqu'à, 2, 6.

El, au, *qu'el, k'el,* qu'au, 1, 6.
Ele, elle, *passim.*
Ensi, ainsi, 4, 5.
Ent, en, 6.
Ert, sera, 6.
Escrire, 2, 4, 5, 6.
Esgarder, avoir égard à, considérer dans le rapport de, 2.
Establir, etablir, former, 2.

Fai, fais (du verbe faire), 6.

Garder un nombre dehors, mettre un nombre à part, 5.
Graindres de (c. suj. sing.), plus grand que, 5.
Grant, grand, 6
Greignour (c. rég. sing.), plus grand, 4.
Grignor (c. rég. sing.), plus grand, 4.

I, y, 6.
Istera, istrera, sortira, 6.

Jusc'à, jusqu'à, 1.

Ke, que, *passim.*
Kel, quel, 1.
Ki, qui, qu'il, *passim.*
Li, le, les, *passim.*
Lues, alors, 5.

Meisme (c. rég. sing.), *meismes* (c. suj. sing.), même, 6.
Mener en soi, multiplier, 1, 3, 6 (cf. lat. *ducere in se*).
Menor, menour (c. rég. sing.), moindre que, *de,* 4.
Menres (c. suj. sing.), moindre, 5.
Més, mets (du verbe *metre*), 1.
Metes, mettes (même verbe), 4.
Meteras, mettras (même verbe), 1.
Metre, mettre, 6.
Misme, même, 6.
Multeplier, multiplier, 1, 3, 5, 6.

Naist, naît (du verbe *naistre*), 6.
Noel, novel, nouveau, 6.

Ordene, ordre, 4. (cf. *par ordre,* 4.)
Overer, opérer, 6. (cf. infra: *ouvrer*).
Overras, opéreras, 6.
Ou, au, 4, 6: *ou regart desous,* placé en dessous d'une façon correspondante.
Ouvrer, opérer, 6.

Planer, planer un nombre, *planer le digit,* 6.
Plusou[r]s, plussors, plusieurs, 4.
Poes, peux, 6.
Poins (c. rég. pl.), points, 5.
Primerain, premier 6.
Prover, prouver, 5.
Pues, peux, *puet,* peut, 6.

Quant, quantes fois, autant, autant de fois que, 5.
Quels, ques, quel; *li quels, li ques,* lequel, 6.
Querre, carré; *nombre querre,* nombre carré, 6.
Rachine, racine, 6.
Raveras, reveras, auras de nouveau (du verbe ravoir), 6.
Regart (El), *de, ou regart desous,* placé en dessous par rapport à, 6.
Remaint, reste (de *remanoir*), 6.
Remanant, restant, reste, 6.
Retraire, retirer; *retrai,* retire, 6; *retrairas,* retireras, 5.
Rieule, règle, 6.

Saces, sache, 5.
Saus, sols, sous, voy. la rubrique de la table des fig. numérales romaines, à la fin de l'Algorisme.
Se, si, *passim.*
Secont, second, 1.
Selonc, selon, 6.
Senefiance, voy. *Signifiance.*
Senestre, gauche, 3.
Signifiance, représentation par signes, 1.
Si, ainsi, *passim.*
Sor, sour, sur, 4.
Soustrai, soustrais, 6; *soustrera,* soustraira, 6.
Soustreble (lat. *subtriplus*), sous-triple, 6.
Sunt, sont, 2.

Tans, tant, autant; *en tant com,* autant que, 1.
Tem, ton, 5.
Tot, tout, 5, 6.
Treble (lat. *triplus*), triple, 6.
Trebler, tripler, 6.
Trover, trouver, 5.

U, ou, au, 1, 4.

Vels, veux, 4.
Venra, viendra, 6; *vent,* vient, 6.
Veus, veux, 4, 6.

Zur Geschichte der Relationen zwischen den Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung und ihren Koeffizienten.

Von L. SAALSCHÜTZ in Königsberg.

Schon in dem Werke *Miscellanea analytica* (1762) von E. WARING[1]) finden sich die beiden Auflösungen der NEWTONschen Formel zwischen den Koeffizienten einer algebraischen Gleichung und den Potenzsummen ihrer Wurzeln, sowohl nach den *Potenzsummen*, als auch nach den *Koeffizienten der Gleichung.* Ist nämlich die algebraische Gleichung

(A) $$x^n - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} \mp \cdots + (-1)^n a_n = 0$$

und bezeichnen wir die Potenzsummen ihrer Wurzeln mit $s_1, s_2, s_3 \ldots,$ so lauten die drei Formeln bekanntlich

(B) $$s_m - a_1 s_{m-1} + a_2 s_{m-2} \mp \cdots + (-1)^m m a_m = 0$$

(1) $$s_m = m \sum_r (-1)^r \frac{(r-1)!}{\lambda!\mu!\nu!\pi!\ldots} a_1^\lambda a_2^\mu a_3^\nu a_4^\pi \ldots$$

(2) $$a_m = \sum \frac{(-1)^{\lambda+\nu+\varrho+\cdots} s_1^\lambda s_2^\mu s_3^\nu s_4^\pi \ldots}{\lambda!\mu!\nu!\pi!\ldots 1^\lambda 2^\mu 3^\nu 4^\pi \ldots},$$

wobei für beide Formeln (1) und (2) die Exponenten als nicht-negative ganze Zahlen der Gleichung

$$\lambda + 2\mu + 3\nu + 4\pi + \cdots = m$$

1) Nämlich in der ersten Abteilung, die den Titel *Meditationes algebraicae* hat. Diese Abteilung schickte WARING schon 1757 an die Royal society zu London, ließ sie 1760 drucken und übermittelte sie einigen Freunden. Dann gab er sie vereint mit den *Proprietates algebraicarum curvarum* als *Miscellanea analytica* („suas in Mathematicis laborum primitias") 1762 heraus. Für spätere Auflagen trennte er wieder (vermutlich wegen des angewachsenen Stoffes) die *Meditationes* von den *Proprietates curvarum;* von den ersteren erschien die nächste Auflage 1770, die folgende 1782; die Vorrede dieser Auflage enthält einen Abriß der Geschichte der Algebra vom Altertum bis auf seine Zeit, worin WARING allerdings seine eigenen Leistungen nicht gerade in den Schatten stellt. Von den *Proprietates curvarum* kam 1772 eine neue Auflage heraus. Als beider Werke erste Auflage durfte WARING also die *Miscellanea* ansehen, was er auch tat.

genügen müssen, und bei (1) noch (von Auflösung zu Auflösung sich ändernd)

$$\lambda + \mu + \nu + \pi + \cdots = r$$

gesetzt ist. Über den Ursprung dieser Formeln (1) und (2) herrschen zurzeit teilweise falsche Ansichten. Als Quelle derselben erscheint mir eine historische Notiz UNFERDINGERS in einer Arbeit[1]), in der er für die Gl. (1) und (2) eigene Beweise gibt. Von da gingen die Beweise und die historischen Irrtümer in das verbreitete MATTHIESSENsche Werk über die literalen Gleichungen[2]) über, von wo sie wahrscheinlich den Weg zum mathematischen Publikum und auch in die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*[3]) fanden. Die historische Notiz bei UNFERDINGER (a. a. O. S. 628) lautet aber wortgetreu:

„Diese Formel [nämlich Gl. (1)] wird ohne Beweis mitgeteilt von WARING in seinen *Meditationes algebraicae* 1782, und wird die Erfindung derselben meist ihm zugeschrieben. Dieselbe kommt schon in der seltenen kleinen Schrift des niederländischen Mathematikers ALBERT GIRARD vor: *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, Amsterdam 1629. Hiermit ist zu vergleichen EULER, Comment. Petrop. Novi Vol. XV" usw. (folgen Zitate späterer Abhandlungen). Darin ist zunächst falsch, daß die Formel in GIRARDS Schrift vorkommt: daselbst sind bekanntlich nur die Werte von s_1, s_2, s_3, s_4 angegeben[4]), sodann daß sie von WARING 1782 veröffentlicht wurde; es geschah bereits in WARINGS *Miscellanea analytica* 1762[5]), so daß WARING auch EULER gegenüber, dessen oben zitierter Aufsatz unter dem Titel *Observationes circa radices aequationum* an der oben bezeichneten Stelle 1771 für 1770 S. 51 erschien, zweifellos die Priorität hat.[6]) Endlich ist es unrichtig, daß die Formel bei WARING ohne Beweis steht: nach Mitteilung derselben *Miscellanea analytica* S. 1 folgt eine vollkommen strenge „Demonstratio", durch den Schluß von n auf $n + 1$, die ich unter Anwendung einer uns geläufigeren Bezeichnungsweise, sonst wortgetreu hierhersetze, wobei die Gleichung (A) mit den Wurzeln α, β, γ, δ ... vorausgesetzt wird.

---

1) Sitzungsber. d. Akad. d. Wissensch. zu Wien **60**, 1869, S. 626 u. folg

2) L. MATTHIESSEN, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen*, Leipzig 1878, S. 64.

3) Band **1**, S. 451 (Artikel von K. TH. VAHLEN).

4) Siehe meinen kleinen Aufsatz *ALBERT GIRARD und die WARINGsche Formel*, Archiv d. Mathem. **12**$_3$, 1907, S. 205.

5) Auf diesen Umstand hat F. CAJORI kürzlich hingewiesen (*Vorles. über Gesch. d. Mathem. herausg. v.* M. CANTOR, Bd. **4**, Leipzig 1907, S. 94).

6) Auf diese Abhandlung deutet WARING hin, wenn er in der praefatio p. IX sagt: „in prima editione hujusce operis datur seriei lex, quae invenit praedictam summam ex coefficientibus datae aequationis; eadem lex ab EULERO postea tradita fuit".

„Sit

$$a_1 = s_1, \quad a_1{}^2 - 2a_2 = s_2, \quad a_1 s_2 - a_2 s_1 + 3a_3 = s_3,$$
$$a_1 s_3 - a_2 s_2 + a_3 s_1 - 4a_4 = s_4, \text{ et sic deinceps.}$$

Et erit s_1 summa radicum, s_2 summa quadratorum ex singulis radicibus, s_3 summa cuborum, s_4 summa quadrato-quadratorum, s_5 summa quadrato-cuborum, s_6 summa cubo-cuborum et sic in reliquis.[1]) Et hac Newtoni regulā satis facile colligitur, coefficientem, seu unciam literalis producti $a_1^\lambda a_2^\mu a_3^\nu a_4^\pi a_5^\varrho$ etc. in summa

$$\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \text{etc.}$$

invenienda aequalem esse aggregato coefficientium seu unciarum literalium productorum:

$$a_1^{\lambda-1} a_2^\mu a_3^\nu a_4^\pi a_5^\varrho \ldots, \quad a_1^\lambda a_2^{\mu-1} a_3^\nu a_4^\pi a_5^\varrho \ldots, \quad a_1^\lambda a_2^\mu a_3^{\nu-1} a_4^\pi a_5^\varrho \ldots,$$
$$a_1^\lambda a_2^\mu a_3^\nu a_4^{\pi-1} a_5^\varrho \ldots, \quad a_1^\lambda a_2^\mu a_3^\nu a_4^\pi a_5^{\varrho-1} \ldots \text{ etc.}$$

in summis respectivis

$$\alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} + \varepsilon^{m-1} + \cdots, \quad \alpha^{m-2} + \cdots,$$
$$\alpha^{m-3} + \cdots, \quad \alpha^{m-4} + \cdots, \quad \alpha^{m-5} + \cdots \text{ etc.}$$

Hae autem unciae vel coefficientes respective sunt[2]):

$$(m-1)\,\lambda\,\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(r-2)}{\mu!\,\nu!\,\pi!\,\varrho!\ldots},$$
$$(m-2)\,\mu\,\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(r-2)}{\mu!\,\nu!\,\pi!\,\varrho!\ldots},$$
$$(m-3)\,\nu\,\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(r-2)}{\mu!\,\nu!\,\pi!\,\varrho!\ldots},$$
$$(m-4)\,\pi\,\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(r-2)}{\mu!\,\nu!\,\pi!\,\varrho!\ldots},$$
$$(m-5)\,\varrho\,\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(r-2)}{\mu!\,\nu!\,\pi!\,\varrho!\ldots},$$
$$\text{etc.}$$

Aggregatum harum unciarum est

$$\left\{m(\lambda+\mu+\nu+\pi+\varrho+\cdots) - (\lambda+2\mu+3\nu+4\pi+5\varrho+\cdots)\right\}\frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(r-2)}{\mu!\,\nu!\,\pi!\,\varrho!\ldots}.$$

---

1) Newton, *Arithm. Univers.* pag. 251. [Anmerkung Warings.]

2) Aus der Aussprache des Satzes selbst geht hervor, daß die Exponenten der Gleichungskoeffizienten als nicht-negative ganze Zahlen der Gleichung

$$\lambda + 2\mu + 3\nu + 4\pi + 5\varrho + \cdots = m$$

zu genügen haben; und der *Beweis* setzt voraus (siehe den Text am Schluß desselben), daß die Formel (1) für die Potenzsummen richtig ist, wenn der Exponent kleiner als m ist.

Die Bezeichnung des Originals

$$2\mu + 3\nu + 4\pi + 5\varrho + \cdots = m - \lambda = u$$

haben wir eliminiert, hingegen führen wir zur Bequemlichkeit die Bezeichnung

$$r = \lambda + \mu + \nu + \pi + \varrho + \cdots$$

ein.

In primo hujus aggregati factore pro $(\lambda + 2\mu + 3\nu + 4\pi + 5\varrho + \cdots)$ substituatur ejus valor m[1]) et fit aggregatum

$$m \cdot (r-1) \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)\ldots(r-2)}{\mu!\,\nu!\,\pi!\,\varrho!\ldots}.$$

Haec vero est coefficiens seu uncia, quae in data serie[2]) pro uncia literalis producti $a_1^\lambda a_2^\mu a_3^\nu a_4^\pi a_5^\varrho \ldots$ in summa $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \cdots$ invenienda substituitur; et consequenter, si series inferiores summas

$$\alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \cdots, \quad \alpha^{m-2} + \cdots, \quad \alpha^{m-3} + \cdots \text{ etc.}$$

recte deducit, patet ex iis, quae jam dicta fuerunt, proxime superiorem summam $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \cdots$ etiam ex illa recte assignatam esse."

Hiermit dürfte das Anrecht Warings als Erfinders und Begründers der Gl. (1) vollkommen festgestellt sein.

Wenn Serret[3]) nach Aufstellung derselben die Bemerkung einfließen läßt, Waring sage nicht, wie er zu ihr gelangt sei, so ist die einfache Antwort fast mit Sicherheit zu geben: *durch Induktion;* d. h. er berechnete die ersten Potenzsummen sukzessive aus der Newtonschen Gleichung (oben Gl. (B)) und schloß daraus auf das allgemeine Gesetz. — Einige Seiten weiter (§ 201) teilt Serret auch die obige Gl. (2) mit. Diese Formel findet sich ebenfalls in den in Betracht kommenden Werken Warings nebst Beweis, nämlich auf S. 9 der *Miscellanea anal.* als Coroll. I und auf S. 15 der *Meditationes* als Corollarium, beidemal an äußerlich wenig hervortretender Stelle. Der Satz ist in beiden Werken derselbe, vielleicht 1782 etwas klarer in der Fassung; ein Beweis ist an der ersten Stelle (1762) nicht direkt gegeben, ist aber, wie aus dem Zusammenhang hervorgeht, mittels der allgemeinen Waringschen Methode zu führen, welche symmetrische Funktionen aus Potenzsummen zusammenzusetzen lehrt.[4]) An der zweiten Stelle (1782) wird dieser Beweis spezieller ausgeführt und ein zweiter hinzugefügt, welcher die Gl. (2) mit Hilfe der Newtonschen Formel in ähnlicher Art begründet, wie es mit Gl. (1) geschehen ist.

In dem schon erwähnten Aufsatz Unferdingers findet sich eine zweite historische Notiz (S. 630), welche bezüglich der Gl. (2) auf Kramp und Hindenburg: *Erste Sammlung kombinatorisch-analytischer Abhandlungen* (1796) S. 110 hinweist. Und in der Tat, in diesem Werke, einer Sammlung von Aufsätzen verschiedener Autoren, steht auf S. 91 als III ein

1) Hier ist der Wortlaut wegen der veränderten Bezeichnung etwas anders.

2) i. e. expressione. 3) *Algèbre supérieure* § 196.

4) An dieser Stelle (p. 10) werden auch Aufgaben folgender Art (auch in allgemeinen Zeichen) gelöst und besprochen:

Seien α, β, γ die Wurzeln der Gl. $x^3 - 7x + 6 = 0$, man soll die Summe $\sum_{x=\alpha,\beta,\gamma} \left(\frac{3x^2+5}{4x+1}\right)$ finden.

Aufsatz von KRAMP unter dem Titel: *Koeffizient des allgemeinen Gliedes jeder willkürlichen Potenz eines Infinitinomiums; Verhalten zwischen den Koeffizienten der Gleichungen und Summen der Produkte und Potenzen ihrer Wurzeln; Transformation und Substitution der Reihen durcheinander.*

Der Aufsatz beginnt mit der Aufstellung der Polynomialkoeffizienten, sodann folgt die Aufgabe, die Potenzsummen der Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch ihre Koeffizienten auszudrücken, welche mittels dieser Polynomialkoeffizienten und einer rekurrenten Reihe (also ohne die NEWTONsche Formel) gelöst wird, und nunmehr wird diese Aufgabe mit der entgegengesetzten, die Koeffizienten der Gleichung durch die Potenzsummen ihrer Wurzeln darzustellen, zusammengefaßt (a. a. O. S. 109f.) und die Gl. (1) und (2) richtig aufgestellt. Von der ersteren gibt KRAMP zu, daß sie schon vor ihm in anderer Art gelöst sei, doch nennt er nur Abhandlungen, welche wenige Jahre zurückliegen (also auch nicht WARING); die Gl. (2) hält er für vollständig neu, merkwürdigerweise gibt er gerade für sie keinen Beweis, welcher also vermutlich demselben Ideenkreise entsprungen sein wird; trotzdem hege ich ebenfalls die Überzeugung, daß KRAMP die Gl. (2) selbständig gefunden hat.

Jedenfalls beweist KRAMP eigene Schaffenskraft durch die angeknüpfte spezielle Aufgabe, welche er als Corollarium[1]) bezeichnet, und die mir auch jetzt noch von Interesse zu sein scheint, indem er nämlich die Frage nach den Koeffizienten derjenigen Gleichung aufwirft, deren Wurzeln die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... $m-1$ sind, d. h. also mit anderen Worten die Frage nach der independenten Darstellung der *Fakultätenkoeffizienten.* Er stellt für dieselben eine Formel auf, welche mit Gl. (2) Ähnlichkeit, aber gegen sie den wesentlichen Unterschied hat, daß ihre Summanden sämtlich dasselbe positive Zeichen haben, was bei (2) nicht der Fall ist.

Suchen wir den Fakultätenkoeffizienten $\overset{m}{\underset{n}{C}}$, d. h. die Summe der Kombinationen n^{ter} Klasse (ohne Wiederholungen) der Elemente $1, 2, 3, \ldots m-1$, so gibt KRAMP dafür folgende Regel: Man bestimme λ, μ, ν, π, ϱ ... als ganze nicht-negative Zahlen, so daß sie den beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \lambda + 2\mu + 3\nu + 4\pi + \cdots = m \\ \lambda + \mu + \nu + \pi + \cdots = m - n \end{cases}$$

1) Diese Bezeichnung ist insofern richtig, als statt der beliebigen Wurzeln der algebraischen Gleichung spezielle Werte für sie angenommen werden, aber nicht insofern, als ob die neue (hier im Text als (3) folgende) Gleichung ein direkter Ausfluß der Gl. (2) wäre.

genügen, und es ist dann

$$\overset{m}{\underset{n}{C}} = m! \sum \frac{1}{\lambda!\mu!\nu!\pi!\ldots 1^{\lambda}.2^{\mu}.3^{\nu}.4^{\pi}\ldots}. \tag{3}$$

Dies Resultat können wir auch in folgender Art aussprechen: *Der Fakultätenkoeffizient* $\overset{m}{\underset{n}{C}}$ *ist gleich* $\frac{m!}{m-n!}$ *mal dem Koeffizienten von* x^n *in der Entwickelung von*

$$\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \cdots + \frac{x^{m-1}}{m}\right)^{m-n}.$$

Leider ist weder ein Beweis noch auch nur eine Andeutung eines solchen gegeben, jedenfalls ist die obige Gl. (3) keine direkte Folge der Gl. (2), sie ist aber *richtig* und liefert, wie gesagt, einen aus lauter positiven Summanden zusammengesetzten Ausdruck, während die sonstige Darstellung (Schlömilch) Summanden verschiedenen Vorzeichens enthält. — Auf den weiteren Inhalt der Krampschen Abhandlung einzugehen, liegt hier keine Veranlassung vor.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1³ : 12, 15, 22, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 61. — **1³ : 33,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 307. — **1³ : 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 61—64. — **1³ : 163—165,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1³ : 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 64—65. — **1³ : 202,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 307—309. — **1³ : 203,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 65, 309. — **1³ : 213, 225, 236, 245, 270, 287, 297, 298, 310,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 65—66. — **1³ : 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 174—176. — **1³ : 351,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 66. — **1³ : 365, 368,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 177. — **1³ : 372, 374, 376,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 411—413. — **1³ : 380,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 66—67. — **1³ : 388, 406, 409, 410,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 177—178. — **1³ : 429, 431,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67. — **1³ : 432,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1³ : 433, 452,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 179. — **1³ : 459,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 309—310. — **1³ : 464,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 179. — **1³ : 470,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 311. — **1³ : 471,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 413.

1³ : 476. Statt $\frac{36 \pm \sqrt{935}}{19} < x < \frac{36 \pm \sqrt{1007}}{17}$ soll es

$$\frac{36 + \sqrt{935}}{19} < x < \frac{36 + \sqrt{1007}}{17} \text{ oder } \frac{36 - \sqrt{935}}{19} > x > \frac{36 - \sqrt{1007}}{17}$$

heißen und ebenso statt $11 \pm \sqrt{61} < x < 12 \pm \sqrt{84}$

$$11 + \sqrt{61} < x < 12 + \sqrt{84} \text{ oder } 11 - \sqrt{61} > x > 12 - \sqrt{84}.$$

Diese Bemerkung kann sehr geringfügig erscheinen, aber in Wirklichkeit deutet sie auf einen Umstand hin, den Herr Cantor offenbar gar nicht beachtet hat, und der seine Schlußfolgerung, daß Diofantos die Lösungen mit negativer Quadratwurzel nicht kannte, sehr unsicher macht. Im ersten Falle kommt es darauf an, die Zahl x so zu bestimmen, daß $\frac{6x}{x^2+1} > \frac{17}{12}$, aber $< \frac{19}{12}$ wird. Nimmt man nun an, daß Diofantos die erste Ungleichung benutzen wollte, um eine *obere*, die zweite aber, um eine *untere* Grenze zu bekommen, so konnte er *nur* die positive Quadratwurzel benutzen. Auf ähnliche Weise konnte er im zweiten Falle *nur* die positive Quadratwurzel benutzen, wenn er aus der Ungleichung $\frac{x^2+60}{2x} > 11$ die *untere*, aus der Ungleichung $\frac{x^2+60}{2x} < 12$

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

die *obere* Grenze berechnen wollte. Aus der Art, wie Diofantos gewisse Ungleichungen behandelt hat, darf man also keine Schlußfolgerungen ziehen in betreff seiner Behandlung der entsprechenden Gleichungen. G. Eneström.

1^3: 488, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1^3: 498,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180. — **1^3: 500, 502,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1^3: 503—504,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180—181. — **1^3: 509, 510, 513, 515, 528, 545, 563—564,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67—69. — **1^3: 576,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 69—70, 181. — **1^3: 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70. — **1^3: 706,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70, 181. — **1^3: 713,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70. — **1^3: 715—716,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^3: 717,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1^3: 718,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 719,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 183—184. — **1^3: 720,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 730,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1^3: 734,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 736—737,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1^3: 738, 743, 748, 750,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72. — **1^3: 764, 770,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 185. — **1^3: 780, 781, 794, 800,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72—73. — **1^3: 801,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 185—186. — **1^3: 802,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1^3: 805—806, 815,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 73. — **1^3: 838,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 415. — **1^3: 855, 857, 859, 862, 863,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1^3: 867,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1^3: 869, 875—876, 877, 878,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 74—76. — **1^3: 881,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 415—416. — **1^3: 882, 889, 893,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 77—78. — **1^3: 900,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1^3: 902,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 78—79. — **1^3: 906,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79, 188—189. — **1^3: 908, 909,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79. — **1^3: 910,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79, 416. — **1^3: 911,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79—80.

2 : 5, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 286; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309. — **2 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 11,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 17,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274. — **2 : 30,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 190. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 39,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80—81.

---

2 : 41. Der „klaffende Zwiespalt" zwischen der Tatsache, daß Kaiser Friedrich zuerst 1226 nach Pisa kam, und dem Berichte der Einleitung des „Liber quadratorum" dürfte nur scheinbar sein. Nach erneuter Lektüre der von Herrn Cantor erwähnten Stellen des „Liber quadratorum" und des „Flos" bin ich geneigt, die Sache auf folgende Weise zu erklären.

Einige Zeit vor 1225 (oder möglicherweise gerade 1225) wurde Leonardo Pisano von Meister Dominicus dem Kaiser *aus* Pisa zugeführt, um vorgestellt zu werden („cum magister Dominicus me pisis duceret presentandum"). Auf dem Wege nach dem kaiserlichen Hofe traf Leonardo zusammen mit Meister Johannes von Palermo („occurens magister Johannes panormitanus"), der ihm eine Frage vorlegte, nämlich eine Quadratzahl zu finden, welche um 5 vermehrt oder vermindert neue Quadratzahlen liefert. Leonardo setzte seine Reise fort, wurde dem Kaiser vorgestellt, überreichte ihm vielleicht die erste Auflage des „Liber abbaci" („cum intellexerim quod dignatur uestra sublimitas maiestas legere super librum quem composui de numero") und kehrte dann nach Pisa zurück. Etwas später wurde ihm von verschiedenen Personen („relationibus pisis positis

et aliorum reddeuntium ab imperiali curia") mitgeteilt, daß der Kaiser etwas mehr über mathematische Gegenstände zu erfahren wünschte („quod placet uobis audire aliquotiens subtilitates ad geometriam et numerum contingentes"), und aus diesem Grunde begann LEONARDO 1225 seinen „Liber quadratorum" zu redigieren. Ob er diese Schrift jemals beendet hat, ist nicht möglich zu ermitteln (vgl. B. BONCOMPAGNI, *Intorno ad alcune opere di LEONARDO PISANO,* Roma 1854, S. 41).

Im Jahre 1226 kam der Kaiser selbst nach Pisa und lud LEONARDO nach dem kaiserlichen Palaste ein; dabei war auch Meister JOHANNES von Palermo zugegen und legte LEONARDO teils die alte Frage (die LEONARDO jetzt sofort beantworten konnte), teils andere Aufgaben vor; die Lösung dieser Aufgaben gab LEONARDO in seinem Traktate: „Flos super solutionibus quarundam questionum", worin er ausdrücklich erwähnt, daß der „Liber quadratorum" begonnen, aber noch nicht beendet sei („incepi componere . . . libellum quadratorum, in quo continebuntur rationes et probationes").

G. ENESTRÖM.

2:46, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 81. — **2:51,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 106. — **2:52,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 190—191. — **2:53,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2:57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2:59,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2:59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2:61,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287. — **2:63,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2:67,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2:70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2:73, 82, 87,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2:88,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S 395. — **2:89, 90,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2:91—92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396; **8**$_3$, 1907/8, S. 191. — **2:97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2:98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107; **7**$_3$, 1906/7, S. 210. — **2:100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **8**$_3$, 1907/8, S. 81.

2:100. Durch die Freundlichkeit des Herrn G. LORIA bin ich in den Besitz einer photographischen Kopie der von Herrn CANTOR in der Fußnote 4 erwähnten Handschrift (Bl. 80^a—83^a der Handschrift Conv. soppr. I. 5. 18 der Nationalbibliothek in Florenz, früher Cod. S. Marc. Florent. 216) gekommen. Auf den ersten Blick sah ich, daß die angebliche Übersetzung des GUGLIELMO DE LUNIS mit der von LIBRI im 1. Bande seiner *Histoire des sciences mathématiques en Italie* (S. 253—289) zum Abdruck gebrachten identisch ist. Nachdem ich die Handschrift mit dem Abdruck näher verglichen habe, kann ich bezeugen, daß jene fast überall wörtlich mit diesem übereinstimmt; indessen enthält die Handschrift wesentlich nur die Seiten 253—274 des Abdruckes bei LIBRI. Vom „Capitulum questionum" sind nur drei Absätze vorhanden, die zusammen die erste Spalte des Bl. 83^a erfüllen, während die zweite Spalte leer ist.

Die Angabe, daß die Übersetzung von GUGLIELMO DE LUNIS verfertigt ist, rührt nicht vom Abschreiber des Textes her. Die erste Spalte des Bl. 80^a enthält zuerst den Schluß des vorangehenden Traktates (27 Zeilen), und dann beginnt ohne weiteres unser Text mit den Worten: „Hic post laudem dei". Dagegen hat eine andere Hand am unteren Rande des Blattes notiert: „Incipit liber GEBRI de numero translatus a mag° GUILELMO DE LUNIS in quadruviali scientia peritissimo", und diese Randnote rührt jedenfalls aus dem Mittelalter her.

Nun geben bekanntlich die meisten Handschriften der von LIBRI veröffentlichten Übersetzung nicht den Namen des Übersetzers an, und nur in einer

Handschrift (siehe A. A. Björnbo, BM **6**$_3$, 1905, S. 241) wird sie dem Gherardo Cremonese zugewiesen. Es ist also an sich nicht unmöglich, daß Guglielmo de Lunis der wirkliche Übersetzer war. Indessen gibt es einen Umstand, der dieser Annahme bestimmt zu widersprechen scheint. In der *Pratica d'arithmetica* (siehe die Auflage Firenze 1548, Bl. 71ª) erwähnt nämlich Ghaligai, daß Guglielmo de Lunis in seiner Übersetzung die sieben Terme Geber [= recuperatione], Elmechel [= assimigliamento], Elchal [= oppositione], Elchelif [= dispositione], Elfazial [= differenza], Buram [= ragione] und Eltermen [= finitione] anwendet, und diese Terme finden sich weder im Librischen Abdrucke, noch in der Florentiner Handschrift (vgl. BM **8**$_3$, 1907/8, S. 416). Aus diesem Grunde bin ich geneigt, die Angabe der Randnote dieser Handschrift vorläufig als unbegründet zu betrachten.

Die bisherigen Untersuchungen über Guglielmo de Lunis haben also wesentlich nur ein negatives Resultat gehabt. Bessere Auskunft bieten vielleicht die ungedruckten Arbeiten von Rafael Canacci und Benedetto da Firenze. Daß Guglielmo de Lunis in Canaccis *Ragionamento di algebra* genannt wird, hat schon Cossali (*Origine, trasporto in Italia, primi progressi in essa dell' algebra* **1**, Parma 1797, S. 7) erwähnt; daß Benedetto da Firenze in seinem *Tractato dabbacho* Aufschlüsse über Guglielmo de Lunis bringt, wird man versucht, aus der oben zitierten Stelle bei Ghaligai zu schließen.

G. Eneström.

---

2 : 101, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325; **6**$_3$, 1905, S. 396. — **2 : 104—105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398. — **2 : 106,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 380. — **2 : 111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S 352. — **2 : 116,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 117—118,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504; **6**$_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406; **6**$_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504; **8**$_3$, 1907/8, S. 191—192. — **2 : 129,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 132,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 144,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 381. — **2 : 145,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 148,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2 : 150—151,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288. — **2 : 155—156,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 410—411; **7**$_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 311—312; **7**$_3$, 1906/7, S. 87—88. — **2 : 163,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504; **6**$_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 382. — **2 : 166,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 178—179,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 192—193. — **2 : 206,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S 313. — **2 : 210,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 397—398. — **2 : 228,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 193. — **2 : 229,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505; **8**$_3$, 1907/8, S. 194. — **2 : 230, 232, 234, 237, 238, 240,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 195—199. — **2 : 242,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **8**$_3$, 1907/8, S. 199—200. — **2 : 243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **6**$_3$, 1905, S. 398; **7**$_3$, 1906/7, S. 382; **8**$_3$, 1907/8, S. 200. — **2 : 245,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 383. — **2 : 246,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 283; **8**$_3$, 1907/8, S. 200. — **2 : 247,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 383—384. — **2 : 249,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 200—201. — **2 : 250,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 253,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S 353. — **2 : 273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S 354. — **2 : 304,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 201. — **2 : 305,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 88. — **2 : 313,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 314,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 319,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S 201—202. — **2 : 320,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88—89. — **2 : 322,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399; **8**$_3$, 1907/8, S. 202—203. — **2 : 325,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S 285. — **2 : 334,**

siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 339,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 351,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87; **8**$_3$, 1907/8, S. 203. — **2 : 360,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314.

---

2 : 375. Über die Protomathesis des Finaeus wäre zu bemerken: der Traktat *De geometria* hat sein eigenes Titelblatt mit dem Druckjahre 1530. Ebenso der *De cosmographia*. Der Traktat *De solaribus horologiis* trägt das Druckjahr 1531. Am Schlusse des Gesamtwerkes ist die Jahreszahl 1532.

A. Sturm.

---

2 : 379, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207; **7**$_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82 — **2 : 395,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 211. — **2 : 398,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 204. — **2 : 399,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108; **8**$_3$, 1907/8, S. 204—205. — **2 : 401, 405,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89. — **2 : 413, 419,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 205—206. — **2 : 420,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 83, 206 — **2 : 421, 422,** siehe **8**$_3$, 1907/8, S. 206. — **2 : 425,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 426,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 427,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315; **8**$_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 428,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 208. — **2 : 429,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S 201—202; **8**$_3$, 1907/8, S. 208—209. — **2 : 430,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 437—438,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 209—210. — **2 : 440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 442,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 444,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140 — **2 : 452,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 474,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141.

---

2 : 476. Tonstalls Buch *De arte supputandi* (London 1522) erschien auch in Paris bei Rob. Stephanus 1529 und 1535 und in Straßburg zum zweitenmal 1551.

A. Sturm.

---

2 : 479—480, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385.

---

2 : 480. Der Herausgeber der Übersetzung des Apollonius von Joannes Bapt. Memus war nicht sein Sohn, sondern sein Neffe Joannes Maria Memus. Maurolycus urteilt in der Vorrede seiner Kosmographie, daß die Übersetzung übel geraten sei, weil der Übersetzer die Mathematik zu wenig verstanden habe. Gleichwohl heißt er auf dem Titel: „Mathematicarum artium in urbe Veneta lector publicus". Und der Herausgeber sagt in der Vorrede: „Jo. Bapt. Memus Patruus meus, vir etsi in omni scientiarum genere eruditissimus, Mathematicarum tamen huius aetatis facile Princeps, uti non ego tantum, qui nepos, non universa modo Italia, verum exterae quoque gentes, et remotissimae consentiunt".

A. Sturm.

---

2 : 481, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **8**$_3$, 1907/8, S. 83. — **2 : 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 483,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 291. — **2 : 484,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2 : 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2 : 503, 505,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2 : 509,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270,

509. — **2:510,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:512,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:514, 516, 517,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:524,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 90. — **2:527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2:529,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91. — **2:530,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:531,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212. — **2:532,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84. — **2:535,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:536,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2:537,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2:539,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 293. — **2:541,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2:547,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84 — **2:548,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510.

---

2 : 548. Die Vorrede zur Euklidausgabe des Camerarius stammt nicht von Rhaeticus, sondern von Camerarius selbst. Der Drucker der Steinmetzschen Ausgabe, Johann Steinmann, sagt nämlich in einem kurzen Vorberichte, daß Camerarius vor 28 Jahren die Vorrede „sub alieno nomine“ gemacht habe.

A. Sturm.

2:549, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401 — **2:550,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355.

---

2 : 550. Außer der italienischen Übersetzung Euklids von Tartaglia aus dem Jahre 1543 (S. 514) gibt es noch eine andere vom Jahre 1545 von Angelo Cajani: *I quindici libri degli elementi di Euclide, di greco tradotti in lingua Thoscana.* Roma MDXXXXV. Freilich enthält diese Übersetzung nur die Sätze, aber nicht die Beweise.

A. Sturm.

2:554, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2:555,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 322.

---

2 : 558. Die hier erwähnten nach Maurolicos Tode 1591 abermals erschienenen euklidischen Phaenomena sind eigentlich nicht als eine Neuausgabe, sondern als eine selbständige Arbeit von Giuseppe Auria zu betrachten. Der Titel lautet:

> Euclidis phaenomena post Zamberti & Maurolyci editionem, nunc tandem de Vaticana Bibliotheca deprompta. Scholiis antiquis: & figuris optimis illustrata: & de Graeca Lingua in latinum conuersa. A Iosepho Auria. Romae 1591. Folio, (24) + 99 S.

G. Eneström.

2:561, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 91. — **2:565,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2:566,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85. — **2:567, 568,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2:569,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510 — **2:572—573,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:576,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2:579,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2:580—581,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85—86. — **2:582,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2:583,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2:585,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2:592,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:593,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2:594,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2:597,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:599—600,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2:602,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2:603—604,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 211. — **2:605,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86. — **2:610,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 388. — **2:611,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2:612,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212. — **2:612—613,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2:613,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2:614,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2:617, 619,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2:620,** siehe BM $\mathbf{3}_3$,

1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 214, 389; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86—87.

---

2 : 621. Die Angabe, daß die Aufgaben des dritten Buches von Bombellis Algebra „zur Einübung des in den beiden ersten Büchern Gelehrten dienen", ist nicht ganz genau, denn die meisten Aufgaben beziehen sich nicht auf die Lehre von Wurzelgrößen und von Gleichungen der vier ersten Grade mit einer Unbekannten. In seinem Vorwort (Bl. d 3^b) bemerkt Bombelli: „Nel terzo [libro] poi hò posto (come per pruoua della scientia) circa trecento Problemi, accioche veggia lo studioso di questa disciplinia (leggendo quelli) quanto soaue sia il frutto della scienza", und in der Einleitung zum dritten Buche hebt er (S. 415) hervor, daß er einen großen Teil seiner Aufgaben aus Diofantos entnommen hat. In Wirklichkeit ist das dritte Buch wesentlich der Lösung von unbestimmten Aufgaben Diofantischer Art gewidmet; besonders kommen solche Aufgaben vor, wo Zahlen gesucht werden, die so beschaffen sind, daß gewisse andere Zahlen Quadratzahlen werden.

Bombelli bemerkt selbst in der oben zitierten Einleitung zum dritten Buche, daß er im Gegensatz zu seinen Vorgängern nur rein arithmetische Aufgaben behandelt, d. h. Aufgaben, wo es sich um *Zahlen*, aber nicht um Geld, Waren usw. handelt.

G. Eneström.

---

2 : 622, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87. — **2 : 623,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147.

---

2 : 639. Wie Herr L. Saalschütz (Arch. der Mathem. $\mathbf{12}_3$, 1907, S. 206) hervorgehoben hat, ist das Zitat der Fußnote 3 nicht ganz genau abgeschrieben; an der betreffenden Stelle bemerkt Viète: „atque haec elegans & perpulchrae speculationis sylloge, tractatui alioquin effuso, finem aliquem & coronida tandem imponito". Viète sagt also gar nicht, er habe anderwärts ausführlich den Satz von der Gleichungskonstante behandelt, sondern: der betreffende Satz solle der Abschluß seiner schon sehr ausführlichen Arbeit sein. Folglich soll auch meine Bemerkung (Biblioth. Mathem. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 409), die Schrift, in der Viète den Zusammenhang zwischen den Wurzeln einer Gleichung und deren Koeffizienten behandelte, sei verloren gegangen, in Fortfall kommen, da sich diese Bemerkung nur auf das unrichtige Zitat bei Herrn Cantor stützt.

G. Eneström.

---

2 : 642, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 666, 667,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 88—89. — **2 : 669,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 687,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 693,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394—395. — **2 : 700, 701,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 703,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—272; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 272—273. — **2 : 712,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212—213. — **2 : 714,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 715,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,**

siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 726**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90. — **2 : 727**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 765**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413 — **2 : 767**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 773**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 213. — **2 : 775**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204.

---

2 : 780. Der Verweis der Fußnote 1) („Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 61—62“) ist ein gutes Beispiel, wie man verfahren sollte, wenn man Fachgenossen und Bibliothekare unnötigerweise belästigen wollte, ohne direkt unrichtige Zitate zu bieten. Einige Seiten vorher (S. 774) hatte Herr Cantor einen Artikel von Tannery im „*Bulletin Darboux*, 2. Serie, T. VII (1883)“ zitiert, und der nicht besonders sachkundige Leser muß wohl glauben, daß es sich S. 780 ebenfalls um die 2. Serie der Bulletin des sciences mathématiques handelt, denn die 1. Serie enthält nur 11 Jahrgänge. Indessen ist dies nicht der Fall, sondern „XXVIII“ bezieht sich auf die Angabe „Tome XXVIII de la collection“, die auf dem Titelblatt mit Petitschriften gedruckt ist, aber auf dem Rücken des Bandumschlages fehlt. Wenn ich nun in einer Bibliothek ganz einfach den 28. Band der Bulletin des sciences mathématiques verlange, so ist es höchst wahrscheinlich, daß der Bibliothekar nur auf die mit fetten Schriften gedruckten Bandziffern Rücksicht nimmt, sofern ich nicht bestimmt die Jahreszahl des Bandes angebe, und gerade die Jahreszahl fehlt dem Cantorschen Verweise. Noch verwickelter wird hier die Sache dadurch, daß es sich nicht um einen Originalartikel von Tannery handelt, sondern um eine Rezension des 2. Bandes der *Vorlesungen*, so daß man nicht z. B. die Fortschritte der Mathematik zu Rate ziehen kann.

Der Verweis sollte also lauten: Tannery im Bullet. d. sc. mathém. $\mathbf{17}_2$, 1893, S. 61—62, eventuell mit dem Zusatze: „Besprechung der 1. Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen*“. G. Eneström.

---

2 : 783, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S 405; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393. — **2 : 791**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S 307. — **2 : 802**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S 211. — **2 : 840**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S 37, 208. — **2 : 901**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511.

2 : 911. In der Abhandlung *Potestatum numericarum summa* lehrt Pascal ausdrücklich, wie man die Summe

$$a^m + (a + r)^m + \cdots + (a + nr)^m$$

durch ein Rekursionsverfahren berechnen kann (in der Auflage Paris 1819 von Pascals *Œuvres* findet sich die betreffende Stelle S. 114 des 5. Bandes). Das von Pascal angegebene Verfahren ist identisch mit dem von Herrn Cantor im 3. Bande (S. 102 der 2. Auflage) der *Vorlesungen* angedeuteten, das J. Prestet 1675 unter ausdrücklicher Berufung auf Pascal auseinandersetzte.

G. Eneström.

---

2 : 919, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298; $\mathbf{8}_3$, 1907/8. S. 91. — **3 : 24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 37,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 63,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299. — **3 : 70,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 360. — **3 : 78,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92. — **3 : 82,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308. — **3 : 97,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 100,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S 318; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 300. — **3 : 112,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 518. — **3 : 118,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3 : 122,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513 — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S 94. — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308 — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319. — **3 : 397,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3 : 408,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 306. — **3 : 447, 455,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 477, 479,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95. — **3 : 497, 498,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72 — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3 : 586,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 593,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 214. — **3 : 609,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408. — **3 : 636—637,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441,

— **3 : 646—647**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901. S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 692**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 695**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3 : 736**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 750, 758**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447. — **3 : 774, 798**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 880**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

137. Über die Brüsseler Ausgabe von Leonhard Eulers Werken. Es dürfte allgemein bekannt sein, daß eine französische Ausgabe von Leonhard Eulers Werken vor etwa 70 Jahren in Angriff genommen wurde, aber merkwürdigerweise scheinen die Bände dieser Ausgabe schon sehr selten zu sein, und nicht einmal die Angaben über die Zahl und den Inhalt dieser Bände stimmen immer überein. Daß wenigstens fünf Bände erschienen sind, ist sicher, denn diese Bände finden sich auf der Königlichen Bibliothek in Brüssel (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 241), und G. Libri war auch im Besitz eines Exemplars derselben (siehe *Catalogue of the mathematical . . . portion of the celebrated library of M. G. Libri* London 1861, S. 288); nach dem Librischen Katalog enthalten diese Bände drei verschiedene Arbeiten Eulers, nämlich: „Lettres à une princesse d'Allemagne", „Arithmétique" und „Nouvelle théorie de la musique" (vgl. Bullet. de bibliogr., d'hist. et de biogr. mathém. **1**, 1855, S. 105). Dagegen behaupten Houzeau und Lancaster ausdrücklich in ihrer *Bibliographie générale de l'astronomie* (**1**, Bruxelles 1887—1889, S. 666) teils, daß es acht Bände (1839—1841) der Brüsseler Ausgabe gibt, teils daß sich der Inhalt dieser Bände nur auf die reine Mathematik bezieht. Es wäre ja sehr auffällig, wenn zwei in Brüssel wohnhafte Verfasser einer Bibliographie in diesem Falle eine unrichtige Angabe gebracht hätten, und schon aus diesem Grunde ist eine genaue Untersuchung der Frage angebracht. Aber es könnte überdies von Interesse sein, eine andere Frage in betreff der Brüsseler Ausgabe zu erörtern, nämlich ob sie wirklich, wie C. G. J. Jacobi 1842 behauptete (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 250, 253), nur „eine Spekulation um ein Rechenbuch herauszugeben" war und von „unwissenden Schulmeistern" herrührte. Gegen diese Behauptung spricht der Umstand, daß der *Catalogue des ouvrages d'astronomie et de météorologie qui se trouvent dans les principales bibliothèques de la Belgique* (Bruxelles 1878) nicht weniger als 65 in Brüssel aufbewahrte handschriftliche Übersetzungen verschiedener Eulerscher Abhandlungen verzeichnet. Der Zweck dieser Übersetzungen, die von Bottin, Dworzecki, T. Joly, B. F. Toussaint und P. C. Truffaet verfertigt sind, kann wohl kein anderer gewesen sein, als für die Brüsseler Ausgabe benutzt zu werden.

Kann man aus den erschienenen Bänden der Ausgabe oder anderweitig nähere Auskunft über das Unternehmen und warum es nicht weiter fortgesetzt wurde, bekommen? G. Eneström.

Risposta alla questione 130 sopra la „Regula pantometra" del Coignet. Sono a me note tre descrizioni diverse della „Regula Pantometra" di MICHELE COIGNET, delle quali due certamente emanarono dall' autore istesso, e che non permetterebbero di confermare la assoluta ed essenziale identità di essa col Compasso geometrico e militare di GALILEO.

Una di esse è costituita dalla scrittura contenuta nel manoscritto della Biblioteca Reale di Bruxelles, fatto conoscere dal P. BOSMANS[1]): in esso „l'usaige des 12 diuisions marquez sur la Reigle platte" (apellee Pantometre). Par lesquels lon resoult tous Problemes Mathematiq. porta la data dell' anno 1610, e con gli altri lavori costituenti il codice medesimo figura regalata nel 1612 „au Capitaine THOMAS FRANCQUIN quartier mre gnrl des Armees de sa Ma^te et de leurs Altezes Sers^mes es Paijs bas". La figura che accompagna la istruzione per l'uso dello strumento rappresenta un regolo di 197 mm. per 46, sul quale da una parte sono segnate sopra rette parallele le seguenti scale: Divisiones aequales. — Divis. Graduum. — Lat. polig. in circulo. — Lat. polig. aequalium. — Divis. Sinuum. — Divis. Tangentium; e dall' altra, pur sopra rette parallele: Divis. planorum — Divis. Solidorum. — Divis. Sect. circuli. — Divis. Sect. Globi. — Corp. 5. regularia. — Divis. Metallorum. E queste sono appunto le dodici divisioni geometriche „per quas (et ope unius circini vulgaris) fere omnia Mathematicorum Problemata facili negotio resolvuntur".

La seconda è costituita dal Ms. Latin 7253 (anc. 4858) della Biblioteca Nazionale di Parigi così intitolato: „MICHAELIS COIGNÊTI Mathem. Antverpiani De Regulae-Pantometrae [iam recens ab eo inventae] fabrica & usu libri septem. In quibus multiplex huius generalissimi instrumenti usus exponitur, continens fere omnia quae in tota Mathesi studiosis non minus fructuosi necessarii atque iucundi. Ad Sereniss. ALBERTUM Austriae Archid. & Belgicarum provinciarum Principem potentiss.^um". Il codice, legato in pergamena con le armi dell' Arciduca, sembra costituire l'esemplare stesso che dall'autore gli fu offerto in omaggio. Ora la „Regula pantometra" quivi descritta è già qualche cosa di diverso da quella illustrata nel manoscritto precedentemente indicato, ed anche nel terzo al quale ho superiormente accennato, e che presentemente si trova nella Biblioteca Vaticana (Fondo Regina di Svezia. n^0. Reg. lat. 1307) e dove, soltanto con diversa disposizione delle varie linee, trovasi descritto lo stesso regolo piatto rispetto al quale siamo già entrati in particolari a proposito del manoscritto della Biblioteca Reale di Bruxelles. In quello della Biblioteca Nazionale di Parigi gli strumenti mediante i quali si esplica la „Regula pantometra" sono due, cioè un gran compasso che può essere montato sopra un treppiedi e munito di bussola, descritto il quale l'Autore aggiunge: „tandem addidimus Regulam plicabilem, quae utrinque signata est, nam hinc habet divisiones graduum ad 90 gradum usque, una cum quantitatibus angulorum figurarum regularum et scalam aequalium partium, illinc vero insculpta sunt puncta ambarum umbrarum ex geometrico quadrato deprompta".

Ora, l'abbinamento di questi due strumenti rappresenta, a parer nostro, una, non vorremmo dire copia, ma reminiscenza od imitazione del „Compasso et riga" di FABRIZIO MORDENTE, strumenti che al COIGNET erano ben noti,

1) Annales de la société scientifique de Bruxelles 25:2, 1901, p. 3—5 dell' estratto.

perchè da lui medesimo illustrati in una stampa d'Anversa dell' anno 1608, della quale un esemplare è posseduto dalla Biblioteca Estense di Modena e contraddistinto con la segnatura „Campori 548", illustrazione della quale fors'anco esisteranno altre edizioni. Questa stampa è intitolata: *Della forma et parti del compasso* di Fabritio Mordente Salernitano. Con gli usi di esso, raccolti da Michele Coignet Mathematico del Serenissimo Archiduca Alberto. Ed il „Compasso et riga" di Fabrizio Mordente erano e sono notissimi, perchè descritti in istampe d'Anversa del 1584, di Parigi del 1585, ancora di Anversa del 1591 e di Roma del 1596 e finalmente di Napoli del 1597; e, quasi questo non bastasse, fatti maggiormente conoscere dai: Jordani Bruni Nolani *Dialogi duo de Fabricii Mordentis Salernitani prope divina adinventione ad perfectam cosmimetriae praxim* (Parisiis, ex typographia Petri Cheuillot, in vico S. Ioannis Lateranensis, sub Rosa rubra, 1586). Al compasso ad otto punte del Mordente corrisponderebbe lo strumento da montarsi ugualmente sopra un treppiedi del Coignet, ed alla „regula plicabilis" di questo, la „riga piegante" del Mordente come trovasi descritta nella illustrazione fattane dal Coignet nella stampa succitata.

Ora, i due strumenti, mediante i quali viene *La Geometrie reduite en une facile et briefve practique* sono appunto il Pantometro del Coignet ed il compasso ad otto punte del Mordente, ma dalla descrizione che del suo strumento ha fatta il Coignet non risulta affatto ch'esso fosse identico col Compasso geometrico e militare di Galileo, e quanto all' asserzione che nella stessa opera si legge che „il y auoit plus de 40 ans qu'il [= Coignet] sçavoit la composition de ce Compas, comme pourront tesmoigner ceux de sa nation qui l'ont cogneu" non abbiamo rinvenuto alcun documento sul quale essa possa appoggiarsi. Tale asserzione è dell' anno 1626, e Michele Coignet era mancato ai vivi in Anversa fin dal 24 dicembre 1623; e noi crediamo sia lecito dubitare della veridicità di tale affermazione, non solo perchè alla stregua dei documenti finora noti la „Regula pantometra", non può farsi risalire più in sù del 1610; ma anche perchè ci pare assai strano che se il Coignet l'avesse ideata, come si pretende, prima del 1578, cioè quando egli non era peranco trentenne, in qualche luogo delle sue scritture in materia egli non lo avesse esplicitamente affermato.

Del resto Michele Coignet ha ben altri e ben superiori meriti che non sia questo della „Regula pantometra", perchè dal non essere questa una *proles sine matre creata* possano essere menzionati i titoli suoi alla reverenza della posterità.

Padova. A. Favaro.

Rezensionen.

Al-Battānī sive Albatenii opus astronomicum. Ad fidem codicis escurialensis arabice editum, latine versum, adnotationibus instructum a Carolo Alphonso Nallino. Pars II. Versio tabularum omnium cum animadversionibus, glossario, indicibus. Mediolani 1907. XXXI + 413 S. 4°. (Pubblicazioni del. R. Osservatorio di Brera in Milano, No. XL. P. II.)

Dieser zweite Teil des nun vollständig vorliegenden Werkes enthält sämtliche Tafeln, die in den Ausgaben von 1537 und 1645 fehlen, mit ausführlichem, für die Geschichte der Astronomie wiederum sehr wichtigem Kommentar, ein arabisches Glossar, einen „Index geographicus" und einen „Index historicus et rerum".

Die lange Pause zwischen dem Erscheinen des ersten und zweiten Teiles dieses Werkes kann man wohl begreifen, wenn man die Größe und die Schwierigkeit der Arbeit zu schätzen vermag, die besonders durch die Nachprüfung der Tafeln, die wegen der großen Menge der Zahlenfehler notwendig war, dem Herausgeber aufgebürdet wurde. Diese Fehler wurden sehr vermehrt durch den Umstand, daß die Zahlen des arabischen Textes nicht durch die arabischen Ziffern, sondern nach der älteren Weise durch die Buchstaben des Alphabetes bezeichnet wurden, die durch das Fehlen oder Verwechseln von diakritischen Punkten oft ganz unrichtig gelesen werden konnten. Auch durch Übertragung der ursprünglich orientalischen Zahlbezeichnung durch Buchstaben in die etwas abweichende okzidentalische (maghrebinische) sind viele Fehler entstanden. Um diese Fehler zu verbessern, mußten in erster Linie die ptolemäischen Tafeln zu Hilfe gezogen werden; da aber bei diesen verschiedene Größen, wie z. B. die Schiefe der Ekliptik, anders angenommen waren als bei Al-Battānī, so mußten, um allfällige Fehler des letzteren verbessern zu können, sämtliche Angaben nach den Formeln der sphärischen Astronomie neu berechnet werden. Ferner fehlen bei Ptolemäus in verschiedenen Tafeln die Sekunden, die Al-Battānī öfters berücksichtigt hat, oder Ptolemäus hatte die Angaben bloß von 3° zu 3° oder 6° zu 6° oder 10° zu 10° berechnet, während Al-Battānī sie von Grad zu Grad machte, da mußte also eine große Zahl von Interpolationen gemacht werden. In dieser mühsamen Verbesserungsarbeit wurde Nallino von seinem Mitarbeiter, dem gelehrten Astronomen G. Schiaparelli in Mailand, aufs kräftigste unterstützt.

Bei dieser Gelegenheit wollen wir darauf aufmerksam machen, daß Al-Battānī sich keineswegs, wie dies schon behauptet worden ist, als bloßen sklavischen Nachschreiber des Ptolemäus erweist, sondern daß er in verschiedenen

Punkten als Korrektor desselben erscheint. Abgesehen davon, daß er, wie wir oben gesehen haben, gewisse Tafeln für kleinere Intervalle als Ptolemäus berechnet und oft auch noch Sekunden hinzufügt, richtet er wieder andere Tafeln praktischer ein, wie z. B. die Planetentafeln (S. 108—137), wo er zwei für sich einzeln unnütze Kolonnen des Ptolemäus zu einer einzigen brauchbaren zusammenzieht; oder er gibt den Tafeln oder Kolonnen verständlichere, ihrem Inhalte entsprechendere Titel (s. S. 238). Auch eigene Tafeln, die im *Almagest* keine Analoga haben, stellt Al-Battānī auf, so (S. 59) für die Längen der Tage unter den verschiedenen Polhöhen von $0^\circ - 60^\circ$ von $30'$ zu $30'$; es ist für jede dieser Polhöhen der Überschuß der halben Tageslänge des längsten Tages über 12^h hinaus in Graden ($15^\circ = 1^h$) gegeben; ferner Tafeln der Zeitgleichung (S. 61—64), Tafeln der ungleichen Bewegungen der Sonne und des Mondes zur Zeit der Konjunktionen und Oppositionen (S. 88) und andere.

Gehen wir nun zur Besprechung einzelner Partien des Buches über.

Im Verzeichnis der von Nallino benutzten orientalischen Quellen erwähnt er (S. XIII—XIV) auch das Buch „Tāǵ el-azyāǵ wa ghunyat al-muḥtāǵ" von Abū ʿAbdallāh Muḥ. b. Abī'sh-Shukr al-Maghrabī (ich folge in der Wiedergabe arabischer Wörter der Nallinoschen Transkription). Ich sprach in meinem Buche *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (S. 156) die Vermutung aus, daß der Autor der bedeutende westarabische Mathematiker Yaḥyā b. Muḥ. b. Abī'sh-Shukr al-Maghrabī sei, indem durch die Schuld der Abschreiber das „Yaḥyā" ausgefallen sein möchte. Nallino kommt, auf Stellen des geographischen Teiles des Buches gestützt, zu der Ansicht, daß dasselbe doch eher dem Vater des Yaḥyā zuzuschreiben sei; oder dann müßte, wenn meine Ansicht richtig wäre, Yaḥyā dasselbe vor seiner Reise nach dem Osten geschrieben haben

In den „Addenda et Emendanda" (S. XVI—XXXI) gibt Nallino einige wertvolle Zusätze und Verbesserungen zu den drei Teilen, woraus wir folgendes erwähnen: S. XVI teilt Nallino nach Fr. Boll mit, daß von der lateinischen Übersetzung des Buches des Shādhān b. Baḥr, betitelt „mudhākarāt" (= colloquia) ein sehr schöner Kodex in München (Clm. 826) und ebenso ein solcher in Brüssel (1464) existiere. Ich muß hier einen Fehler berichtigen, der mir bei der Besprechung des ersten Teiles dieses Werkes (Biblioth. Mathem. $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 79) passiert ist, wo ich dieses Buch dem Abū Maʿshar statt dem Shādhān b. Baḥr zugeschrieben habe, welche Verwechselung dem Umstande zuzuschreiben ist, daß das Buch astrologische Gespräche zwischen Abū Maʿshar und Shādhān enthält. — S. XX vernehmen wir, daß von den für die Geschichte der Astrologie wichtigen Werken, die dem mythischen Hermes zugeschrieben werden, auch das im *Fihrist* und anderen arabischen Quellen genannte „(erste) Buch der Breite des Schlüssels (der Geheimnisse) der Gestirne" [nicht, wie ich im *Mathematiker-Verzeichnis* (Abhandl. z. Gesch. d. Mathem. **6**, 1892, S. 19) übersetzt habe: Über die Breite, erster Schlüssel der Gestirne] arabisch noch vorhanden ist, und zwar im Besitze von Dr. Griffini in Mailand, der über dessen Inhalt nächstens eine Abhandlung veröffentlichen wird. Am Schlusse dieses Buches wird erwähnt, daß dasselbe im Jahre 125 d. H. (743 n. Chr.) ins Arabische übersetzt worden sei; also jedenfalls eine der ältesten Übersetzungen, die, wenn die Angabe richtig ist, zugleich ein Beweis dafür wäre, daß die astrologischen Werke vor den wissenschaftlichen übersetzt worden sind. — Aus S. XXI—XXII ersehen wir, daß merkwürdigerweise bei

griechischen Geometern vom Range eines HERON und PROKLUS die Ansicht bestand, EUKLIDES habe die Teilung eines Kreises in 15 gleiche Teile nur oder hauptsächlich deshalb in sein Werk aufgenommen, weil die Ekliptik vom Äquator um die Fünfzehneckseite abstehe, d. h. mit ihm einen Winkel von 24° bilde! PROKLUS sagt auch noch *(Comment. in primum* EUCL. ed. FRIEDLEIN, S. 268—269), daß der 7. Satz des ersten Buches der Elemente nicht etwa bloß deswegen aufgenommen worden sei, weil er für den Beweis des 8. Satzes (3. Kongruenzsatz) notwendig sei, denn diesen könne man auch ohne jenen beweisen, sondern weil er zum Beweise des Satzes unentbehrlich sei, daß drei Finsternisse nicht in gleichen Zeitintervallen aufeinander folgen können. — S. XXV—XXVII weist NALLINO aus Stellen des Buches „De l'ascension de l'esprit sur la forme du ciel et de la terre" von BAR-HEBRÄUS (herausgegeben und übersetzt von F. NAU, Paris, 1899—1900) und aus dem *Introductorium* des ABŪ MAʿSHAR nach, daß sehr wahrscheinlich die Araber des 9. Jahrhunderts ein Buch gekannt haben, das sie dem PTOLEMÄUS zuschrieben, das den arabischen Titel „kitāb al-manshūrāt" (das Buch der ausgebreiteten [Dinge]) hatte, und das über die Entfernungen und Größen der Himmelskörper gehandelt hat. Wie wir schon bei Besprechung des ersten Teiles bemerkt haben, vermutet NALLINO, es möchten dies die *Hypotyposes* des PROKLOS (herausgegeben mit den *Hypotheses* des PTOLEMÄUS von HALMA, Paris 1820) sein; wir können jetzt dieser Ansicht besser zustimmen als früher.

Die Tafeln (S. 1—188) *und die Erläuterungen dazu* (S. 191—296).

Unter den 36 verschiedenen Tafeln befinden sich 4 chronologische und geographische, 12 trigonometrische und sphärisch-astronomische, 20 rein astronomische, und zwar beziehen sich von diesen 10 auf Sonne und Mond, 7 auf die Planeten, 3 auf die Fixsterne. Wir können nicht alle besprechen, sondern werden nur einige uns von besonderem Interesse scheinende hervorheben.

Über die geographischen Tafeln (S. 33—54) haben wir bereits bei der Besprechung des dritten Teiles (Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 285) kurz berichtet. Könnte Nr. 216 (S. 48) nicht Nasā oder Fasā sein, das irrtümlicherweise in der ersten Silbe mit einem langen a geschrieben worden wäre? Für Fasā (in der Nähe von Shīrāz) würde die Länge ungefähr stimmen.

S. 55 und 56 finden wir die Sinustafeln von 30′ zu 30′ berechnet bis auf die Sekunden genau für den Radius = 60^p (für r = 1 bis auf 5 Stellen nach dem Komma genau). In 180 Minuten- und Sekundenzahlen fand NALLINO im Kodex nicht weniger als 74 Fehler, die natürlich mit Hilfe unserer Tafeln leicht, aber immerhin mit bedeutender Arbeit zu verbessern waren. — S. 60 befindet sich eine Kotangententafel für den Radius (Gnomon) = 12^p, von Grad zu Grad berechnet.

Von den *astronomischen* Tafeln erwähnen wir zunächst die Tafeln der Bewegungen der fünf Planeten (S. 24—28), und zwar der mittleren Bewegungen (d. h. der gleichförmigen Bewegungen im Äquanten) der drei oberen Planeten, und der Anomalien (d. h. der Bewegungen auf dem Epizykel vom Apogeum an gerechnet) der zwei unteren Planeten, beide für je 30 Jahre, dann per Jahr, per Monat, per Tag und sogar per Stunde berechnet.

In den Tafeln der Parallaxen der Sonne (S. 93—94) gibt AL-BATTĀNĪ merkwürdigerweise die PTOLEMÄischen Werte, obgleich er die Distanz der Erde von der Sonne anders annimmt; er fügt dann hinzu, diesen Werten des

Ptolemäus sei jeweilen der 18. Teil derselben hinzuzufügen. Warum Al-Battānī diese Addition nicht selbst ausgeführt hat, ist nicht einzusehen.

In einigen Tafeln, wie z. B. in denjenigen der Rektaszensionen der Tierkreiszeichen (S. 61—64) zeigt sich eine Abweichung vom gewöhnlichen Wege, die auch auf andere arabische Astronomen übergegangen ist, nämlich die Rektaszension von 0^0 des Steinbocks statt von 0^0 des Widders an zu zählen. Dieser Usus läßt sich, wie Nallino (S. XVII) bemerkt, auf Theon von Alexandria zurückführen, dessen Handtafeln den Arabern bekannt gewesen sind.

Für den Herausgeber war wohl die schwierigste Partie des ganzen Buches die Erklärung der Abweichungen der Planeten in der Breite und ihre Berechnungen (die Tafeln der Breite befinden sich S. 140—141, die Erklärungen dazu S. 247—255). Die Ptolemäische Darstellung ist so schwer zu verstehen, daß frühere Geschichtschreiber der Astronomie dieselbe teils unrichtig aufgefaßt (Delambre), teils ganz übergangen haben (Wolf). Nallino hat dieses schwierige Kapitel meisterhaft behandelt und uns damit das Verständnis des *Almagestes*, besonders der sechs ersten Kapitel des 13. Buches, wesentlich erleichtert. Er schlägt für die Ableitung der zur Berechnung notwendigen Formeln selbstverständlich den modernen trigonometrischen Weg ein und findet mit Hilfe von drei Formeln die maximale Breite der drei oberen Planeten, die zusammengesetzt ist aus der Neigung der Ebene des Deferenten zur Ekliptik und der Neigung der Ebene des Epizykels zu der des Deferenten. Für die zwei unteren Planeten ist die Sache komplizierter, die Abweichung in der Breite hängt von drei Faktoren ab: erstens von der Neigung der Ebene des Deferenten zur Ekliptik, welche Neigung hier im Gegensatz zu den oberen Planeten variabel ist; zweitens von der ebenfalls variabeln Neigung der Verbindungslinie des wahren Apogeums und Perigeums des Epizykels zur Ebene des Deferenten; drittens von der Neigung desjenigen Durchmessers des Epizykels, der die Punkte der mittleren Distanzen verbindet (also auf dem vorhin genannten Durchmesser senkrecht steht) zur Ebene des Deferenten. Auch für diese Neigungen stellt Nallino trigonometrische Formeln auf. Dann gibt er noch zwei Berichtigungen von Angaben Delambres und A. Häblers (*Die Lehren des Cl. Ptolemäus von den Bewegungen der Planeten;* Zeitschr. f. Mathem. **45**, 1900, Hist. Abt. S. 171, 192, 198). Der letztere war der Ansicht (S. 198), Ptolemäus habe seine Theorie für die Abweichung der Planeten in der Breite in den *Hypotheses* anders und einfacher dargestellt als im *Almagest*. Nallino weist aber nach, daß Häbler hierin sich geirrt habe, daß Ptolemäus in den *Hypotheses* nur eine summarische Übersicht über seine Planetentheorie gebe und dabei allerdings von drei kleinen epizyklischen Kreisen spreche, von denen aber zwei für die mathematisch-astronomische Begründung gar keine Bedeutung haben, sondern bloß der philosophischen Erklärung halber beigezogen worden seien, so daß also nur der dritte der eigentliche, die Erscheinungen erklärende Epizykel sei.

Der Sternkatalog Al-Battānīs (S. 144—177) enthält 533 Sterne und bildet eine Auswahl aus demjenigen des Ptolemäus, der 1025 Sterne aufzählt. Die Epoche für die angegebenen Örter ist der 1. März des Jahres 880. Im Vorwort (S. VII) bemerkt Nallino, er habe aus der ihm erst nach dem Drucke der Tafeln bekannt gewordenen spanischen Übersetzung noch einige Verbesserungen ziehen und besonders eine Lücke im Sternkatalog (die Sterne des Schiffes [Argo], der Wasserschlange [Hydra] und die ersten Sterne des

Bechers [Crater]) ausfüllen können; die Ergänzung gibt er S. 274—277 der Adnotationes. Er hat auch aus verschiedenen Stellen dieser spanischen Übersetzung schließen können, daß die Übersetzer nach dem arabischen Text, nicht nach der PLATOnischen Übersetzung übersetzt haben müssen. AL-BATTĀNĪ fügt den Sternlängen des PTOLEMÄUS 11° 10′ hinzu, dies war aber zu wenig, er hätte 11° 25′ hinzufügen sollen; er beachtete eigentümlicherweise nicht, daß PTOLEMÄUS beim Vergleiche seiner Beobachtungen mit denjenigen des HIPPARCH und des MENELAUS eine Präzession von 1° in 100 Jahren angenommen hatte, während er selbst eine solche von 1° in 66 Jahren voraussetzte. — Wir müssen hier noch eine wichtige Berichtigung NALLINOS mitteilen. A. BJÖRNBO hatte bekanntlich (Biblioth. Mathem. **2**$_3$, 1901, S. 196—212) auf verschiedene Stellen arabischer und mittelalterlicher Astronomen, sowie auf die schlechte PLATOnische Übersetzung AL-BATTĀNĪS gestützt, den Schluß gezogen, „daß AL-BATTĀNĪ entweder ein astronomisches Werk von MENELAUS, oder wenigstens Nachrichten, die wir nicht kennen, über ein solches besaß". Durch diese Ausgabe NALLINOS und seinen Kommentar verliert diese Ansicht nun völlig ihre Berechtigung. Für einen Fehlschluß, den A. BJÖRNBO beging, ist übrigens auch die PLATOnische Übersetzung nicht verantwortlich zu machen. Auf die Bitte BJÖRNBOS hin hat nämlich Herr Oberbibliothekar AUMER in München die Textausgabe NALLINOS zu Rate gezogen und danach die Übersetzung PLATOS verbessert. Nach dieser „Verbesserung" gab BJÖRNBO an, AL-BATTĀNĪ habe 11° 50′ zu den Längenangaben des PTOLEMÄUS hinzugefügt; so steht es allerdings in der PLATOnischen Übersetzung (11 gradus et dimidium ac tertium $= 11^0 + \frac{1}{2}^0 + \frac{1}{3}^0 = 11^0\ 50'$), aber im arabischen Text von NALLINO steht (S. 188) die richtige Lesart: aḥad ʿashar ǵuz'an wa niṣf al-thulth, d. h. 11° und die Hälfte des Drittels (eines Grades) $= 11^0\ 10'$. NALLINO gibt noch in einer Note die falsche Lesart des Ms. des Escurial, und doch hat Herr AUMER das Richtige übersehen.

Als letzte Tafeln erwähnen wir diejenigen der Elongationen der fünf Planeten von der Sonne in den verschiedenen Zeichen des Tierkreises und für die Polhöhe 36°, welche zur Bestimmung der Zeiten des Verschwindens und Sichtbarwerdens der Planeten beim Auf- und Untergang der Sonne dienen. PTOLEMÄUS (*Almagest* XIII, 10) gibt für die Berechnung dieser Tafeln eine Regel, welche NALLINO (S. 258) in heutiger trigonometrischer Form ausgedrückt hat; in derselben kommt die Breite der Planeten vor, aber herauszufinden, wie diese berechnet worden ist, wollte dem so außerordentlichen Erfindungs- und Darstellungstalent NALLINOS und SCHIAPARELLIS auf dem Gebiete der rechnenden Astronomie nicht gelingen. Die Tafeln AL-BATTĀNĪS weichen auch wesentlich von denen des PTOLEMÄUS ab, stimmen aber mit denen des arabischen Astronomen ḤABASH und mit denen der ALPHONSinischen Tafeln ziemlich überein. Erst nach den mühsamen Studien, die NALLINO dieser Frage gewidmet hatte, fand er, daß sich die gleichen Werte, wie sie AL-BATTĀNĪ hat, in den Tafeln THEONS (III, S. 16—29 der Ausgabe HALMAS) finden. Aber auch THEON sagt nichts über die Art und Weise, wie er bei der Berechnung dieser Tafeln vorgegangen sei; diese Frage ist also bis jetzt eine ungelöste.

NALLINO fügt (S. 299—307) noch einige Tafeln bei, die sich im Ms. des Escurial befinden, aber nach seiner Ansicht unecht sind. Unter diesen befindet sich eine sogenannte astrologische Rose, welche in konzentrischen Kreisen die Regenten (Domini) der Grenzen (Termini), der Triplizitäten für Tag und Nacht,

der Dekane (Facies), der Häuser des Tierkreises und der Erhöhungen (exaltationes) verzeichnet. Für diejenigen, die sich für die Astrologie interessieren, sind die von NALLINO hierzu gegebenen Erklärungen (S. 309—314) recht orientierend.

Den Schluß des Werkes bilden ein arabisches Glossar (S. 319—358), ein Index geographicus (S. 359—372) und ein Index historicus et rerum (oder Namen- und Sachregister, S. 373—413). In das Glossar hat NALLINO im allgemeinen nur diejenigen Wörter und Bedeutungen aufgenommen, die man in den großen Lexika von FREYTAG, DOZY und LANE nicht findet; es bildet daher einen wertvollen Beitrag zur arabischen Lexikographie und ist für jeden unentbehrlich, der sich mit Studien über arabische Mathematik und Astronomie beschäftigt.

Es mögen schließlich einige Auslassungen und Druckfehler verzeichnet werden, die mir beim Studium des Werkes zu Gesicht gekommen sind. Im „Index historicus" sind von den in den beiden „Conspectus librorum orientalium etc." vorkommenden Namen nicht alle Seitenangaben berücksichtigt worden; so fehlt unter NAU die Seitenangabe LXV, unter SACHAU LXV, unter RUDLOFF LXV, unter DE GOEJE LXVI und II, XII, unter SÉDILLOT junior LXVII, unter WÜSTENFELD II, XII, unter DIETERICI II, XIII etc. MEHREN II, XII, der Herausgeber von AD-DIMASHQĪ, ist ganz vergessen. — Von Druckfehlern habe ich zu nennen: S. XIX, Z. 5 v. u. lies 338 statt 339; S. XX, Z. 2 lies Einteilung statt Einleitung; S. 269, Z. 12 lies 880 statt 888; S. 322, Z. 4 lies Der statt Das; S. 398, 2. Kol. unter NAU lies 14 statt 13.

Unser Endurteil fassen wir in folgende Worte zusammen: eine ungeheure Arbeit liegt in den drei Bänden dieser Ausgabe aufgehäuft, eine Arbeit, die die gerechte Bewunderung eines jeden erregen muß, der dieses Werk genauer studiert. Wir lernen mit seiner Hilfe den größten arabischen Astronomen gründlich kennen und damit auch richtig schätzen; durch dasselbe ist uns aber auch der *Almagest* des PTOLEMÄUS wesentlich näher gerückt; wir begreifen erst jetzt recht, daß den arabischen Astronomen und denjenigen des christlichen Mittelalters das Studium des *Almagestes* als das letzte und höchste gelten mußte. Die Araber haben dieses Buch gründlich studiert, und sie verdienen es, daß der Name, den sie ihm gegeben, bis heute geblieben ist und weiter bleiben werde. Mit dieser Ausgabe ist eine notwendige Vorarbeit für eine höchst wünschenswerte neue Übersetzung und Kommentierung des PTOLEMÄischen Werkes in eine oder mehrere der vier Hauptsprachen geleistet.

H. SUTER.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [1
8_3 (1907/8): 4.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [2
36 (1905): 3.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. — 1^3 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 411—416. (G. Eneström.) [3

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Herausgegeben von M. Cantor. Vierter Band. Von 1759 bis 1799. Vierte Lieferung. Infinitesimalrechnung. Von G. Vivanti. — Fünfte Lieferung. Totale und partielle Differentialgleichungen. Differenzen- und Summenrechnung. Variationsrechnung. Von C. R. Wallner. Überblick über die Zeit von 1758 bis 1799. Von M. Cantor. Leipzig, Teubner 1907—1908. [4
8°, VI S. + S. 643—1113. — [13.80 Mk.]

Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. Traduit de l'espagnol, revu et très augmenté. Tome I. Coimbra 1908. [5
4°, IX + 401 + (1) S. — Obras sobre mathematica do F. G. Teixeira. Volume quarto.

La Cour, P. und Appel, J., Die Physik auf Grund ihrer geschichtlichen Entwickelung dargestellt. Übersetzung von G. Siebert (1906). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 177—180. (A. Rotth.) [6

***Dreyer, J. L. E.**, History of the planetary systems from Thales to Kepler. Cambridge 1906. [7
8°, XII + 432 S.

Oppenheim, S., Das astronomische Weltbild im Wandel der Zeit (1906). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 182—183. (H. Samter.) [8

Arrhenius, S., Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft 1908. [9
8°, XI + 191 S.

***Repsold, J. A.**, Zur Geschichte der astronomischen Meßwerkzeuge von Purbach bis Reichenbach, 1450 bis 1830. Leipzig, Engelmann 1908. [10
4°, VIII + 132 S. + 1 Taf. — [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 255—256. (A. Berberich.)

Halsted, G. B., Pi in Asia. [11
The americ. mathem. monthly 15, 1908, 84.

b) **Geschichte des Altertums.**

***Schiaparelli, G.,** Astronomy in the Old Testament. Authorised english translation with many corrections and additions by the author. Oxford 1905. [12
8°, VIII + 178 S.

Heiberg, J. L. und Zeuthen, H. G., Eine neue Schrift des Archimedes (1907). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 189. (TROPFKE.) [13

Slichter, Ch. S., The recently discovered manuscript of Archimedes. [14
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 382—383.

Lorey, W., Archimedes und unsere Zeit. [15
Zeitschr. für lateinlose höhere Schulen 19, 1908, 236—245.

***Claudii Ptolemaei** Opera quae exstant omnia. Volumen II. Opera astronomica minora. Edidit J. L. HEIBERG. Leipzig, Teubner 1907. [16
8°, CCIII + 282 S. — [9 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 1147—1150. (K. MANITIUS.)

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates (1907). [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, *34—35*. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 97—111. (J.T.) [17

***Wohlwill, E.,** Ein Vorgänger Galileis im VI. Jahrhundert. [18
Physikal. Zeitschr. 7, 1906, 23—32.

c) **Geschichte des Mittelalters.**

Eneström, G., Über eine im Mittelalter übersetzte arabische Schrift algebraischen Inhalts. [19
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 416.

Wiedemann, E., Zur Geschichte des Kompasses bei den Arabern. [20
Berlin, Deutsche physik. Ges., Verhandl. 9, 1907, 764—773.

Wiedemann, E., Über das al Berunische Gefäß zur specifischen Gewichtsbestimmung. [21
Berlin, Deutsche physik. Ges., Verhandl. 10, 1908, 339—343.

Wiedemann, E., Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. XII. Über Lampen und Uhren. XIII. Über eine Schrift von Ibn al Haitam „Über die Beschaffenheit der Schatten". [22
Erlangen, Physik.-mediz. Soz., Sitzungsber 39, 1907, 200—248.

***Boffito, G.,** „De excentricis et epicyclis" di Cecco d'Ascoli nuovamente scoperto ed illustrato. Firenze 1906. [23
4°, 19 S.

d) **Geschichte der neueren Zeit.**

***Müller, F. J.,** Alt-Nürnberg und die praktische Geometrie. [24
Zeitschr. der Bayer. Geometer-Vereinigung 10, 1906, 85—105.

***Klee, Fr.,** Die Geschichte der Physik an der Universität Altdorf bis zum Jahre 1650. Erlangen, Mencke 1908. [25
8°, VIII + 180 S. — [2 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 1497—1498. (E. GERLAND.)

Björnbo, A. A., Ioannis Verneri de triangulis sphaericis (1907). [Selbstbericht:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, *14—15*. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 13_3, 1908, 596—602. (H. BOSMANS.) — Deutsche Literaturz. 29, 1908, 1660—1661. (F. MÜLLER.) [26

Friis, F. R., Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ex anno 1588 et sequentibus annis. Nunc primum collectae et editae. Fasc. X. Hauniae, Gad 1908. [27
4°, S. 289—320. — [1.60 Mk.]

***Petit, M.,** Essais de Jean Rey. Edition nouvelle avec commentaires. Paris, Hermann 1907. [28
8°, XXX + 200 S. — [7 fr.] — [Rezension:] La revue du mois 3, 1908, 103—104. (D.)

***Merczyng, H.,** Joachimi Stegmani Institutionum mathematicarum libri II, Racoviae 1630. [29
Krakow, Akad. d. Wiss., Anzeiger (Math. Kl.) 1907.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio in vergleichender Bearbeitung (1907). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 337—338. (F. CAJORI.) [30

Geer, P. van, Christiaan Huygens' laatste levensjaren. [31
Tijdspiegel 1908. 29 S.

***Gray, J. G.,** A bibliography of the works of sir Isaac Newton. Second edition. Cambridge, Bowes 1907. [32
8°. — [Rezension:] L'intermèd. d. mathém. 15, 1908; Suppl. n° 1, IV.

Gerland, E., Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts (1906). [Rezension:] Arch. der Mathem. 13_3, 1908, 188—189. (P. JOHANNESSON.) [33

Hering, K., Das 200jährige Jubiläum der Dampfmaschine (1907). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 453—454. (F. CAJORI.) [34

***Croce, B.,** Per la storia delle matematiche al principio del secolo XVIII. [35
Raccolta di scritti storici in onore di G. Romano (Pavia 1906), 31—43. — Zwei Briefe von Antonio Conti 1710—1712.

Rudio, F., Der Plan einer Gesamtausgabe von Eulers Werken. [36
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 52, 1907, 512—516.

Stäckel, P. und **Ahrens, W.**, Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fuss'schen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. Leipzig, Teubner 1908. [37
8°, XI + (1) + 184 S. — [8 Mk.] — Die Seiten 1—76 sind aus der Biblioth. Mathem. (8_3, 1907/8, S. 234—306) abgedruckt.

Segre, C., Monge e le congruenze generali di rette. [38
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 321—324.

Cajori, F., On the transformation of algebraic equations by E. S. Bring (1907). — [Rezension:] Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 417—420. (G. Eneström.) [39

Darboux, G., Les origines, les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale. [40
Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 106—128. — Conférence lue le 7 avril 1908 devant le 4e congrès des mathématiciens.

Burkhardt, H., Entwicklungen nach oscillierenden Functionen. 6. Lieferung. [41
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10 : 2, 1908. XII S. + S. 1393—1804.

Müller, Felix, Karl Schellbach (1905). [Rezension:] Arch. der Mathem. 13_3, 1908, 167. (H. Samter.) [42

***Königsberger, L.**, Hermann von Helmholtz. Translated by Frances A. Welby, with a preface by Lord Kelvin. Oxford, University press 1906. [43
8°, XVII + 440 S.

Macfarlane, A., Titles for supplement to bibliography of quaternions, etc. [44
International association for promoting the study of quaternions, march 1908 (Lancaster 1908), 16—38.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik, Naturwissenschaften und Technik nebst Grenzwissenschaften. Mit einem Gedenktagebuche für Mathematiker und den Bildnissen von G. Galilei, H. Bruns, M. Cantor, F. R. Helmert, F. Klein, Fr. Kohlrausch, K. Kraepelien, C. Neumann, A. Penck, A. Wüllner. Leipzig, Teubner 1908. [45
8°, CXXXI + 392 + 92 S. + 10 Porträts. — Die letzten Seiten 53—92 enthalten Anzeigen. — Das Gedenktagebuch ist von Felix Müller neu bearbeitet. — Die Seiten XI—XXX enthalten eine Einführung in die mathematische Abteilung des Teubnerschen Verlags.

e) Nekrologe.

Ernst **Abbe** (1840—1905). [46
Leipzig, Sächs. Ges. d. Wiss., Berichte (Math. Kl.) 58, 1906, 629—646. (O. Wiener.) — Physikal. Zeitschr. 6, 1905, 65—66. (F. Auerbach.)

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [47
Berlin, Deutsche physik. Ges., Verhandl. 9, 1906, 206—238. (H. A. Lorentz.) — Leopoldina 42, 1906, 128—129. — Mathem.-naturw. Blätter 3, 1906, 205—209. (P. Ehrenfest.) — Nature 73, 1906, 569—570. (G. H. Bryan.) — Physikal. Zeitschr. 7, 1906, 649—650. (W. Voigt.) — Zeitschr. für den physik. Unterr. 19, 1906, 357—359. (A. Höfler.)

Paul **Drude** (1863—1906). [48
Berlin, Deutsche physik. Ges., Verhandl. 8, 1906, 599—630. (M. Planck.) — Annalen der Physik 20_4, 1906, I—IV. (M. Planck.) — Elektrotechn. Zeitschr. 27, 1906, 680. — Il nuovo cimento 12_5, 1906, 273—278. (F. Pockels.) — Mathem. naturw. Blätter 3, 1906, 174—175. (M Laue.) — Nature 74, 1. 06, 277. — Physikal. Zeitschr. 7, 1906, 481—482. (W. Voigt.) — Zeitschr. für den physik. Unterr. 19, 1906, 277—279 (Bühring.)

Adrien **Féraud** (1866—1905). [49
Bordeaux, Soc. d. sc., Procès-verbaux 1906, 155—156. (E. Esclangon.)

Victorino **Garcia de la Cruz** (1850—1906). [50
Madrid, Acad. de ciencias, Anuario 1908, 152—158.

Friedrich **Hultsch** (1833—1906). [51
Biblioth. Mathem. 8_3, 1908, 325—402 + Porträt [mit Schriftverzeichnis]. (F. Rudio.) — Versamml. der deutschen Philologen und Schulmänner, Verhandl. 49 (1907), 1908, 181—182. (F. Rudio.)

Charles Jasper **Joly** (1864—1906). [52
International association for promoting the study of quaternions, March 1908, 46—51. (A. Macfarlane.)

Enno **Jürgens** (1849—1907). [53
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 163—170 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (M. Krause.)

Samuel Pierpont **Langley** (1834—1906). [54
Americ. journ. of science 21_4, 1906, 321—323. (Cl. Abbe.) — Astrophys. journ. 23, 1906, 271—283. (C. G. Abbot.)

Aimé **Laussedat** (1819—1907). [55
Madrid, Acad. de ciencias, Anuario 1908, 185—192. — Internationales Archiv für Photogrammetrie (Wien) 1, 1908, 3—15 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (E. Doležal.)

Miguel **Martinez de Campos** (?—1906). [56
Madrid, Acad. de ciencias, Anuario 1908, 146—151.

Ludwig **Matthiessen** (1830—1906). [57
Leopoldina 42, 1906, 158.

Diego **Ollero y Carmona** (?—1907). [58
Madrid, Acad. de ciencias, Anuario 1908, 158—164.

Carl Maximilian **von Orff** (1828—1905). [59
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 41, 1906, 3—13. (K. Oertel.)

Alfred **Potier** (1840—1905). [60
Journ. de physique 4_4, 1905, 393—396.

Georges Antoine **Rayet** (1839—1906). [61
Astron. Nachr. 172, 1906, 111. (E. Esclangon.) — Nature 74, 1906, 382. (W. E. Plummer.)

Karl Johann Konrad **Reinhertz** (1859—1906). [62
Leopoldina 42, 1906, 159.

Otto **Stolz** (1842—1905). [63
Leopoldina 42, 1906, 71—72.

Walter Friedrich **Wislicenus** (1859—1905). [64
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 41, 1906, 13—21. (H. Kobold.)

Charles Augustus **Young** (1834—1908). [65
Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 207. (A. Berberich.)

Gustav **Zeuner** (1828—1907). [66
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr 52, 1907, 553—558

f) Aktuelle Fragen.

***Gebhardt, M.,** Das Geschichtliche im mathematischen Unterricht, mit besonderer Berücksichtigung des humanistischen Gymnasiums. Dresden 1908. [67
4°, 23 S. — Schulprogramm.

Amodeo, F., Sul corso di storia delle matematiche fatto nell' università di Napoli nel biennio 1905/6—1906/7. [68
Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, 403—410.

Rudio, F., Der zweihundertjährige Geburtstag von Leonhard Euler. [69
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 52, 1907, 537—542.

[Internationaler Mathematikerkongreß in Rom 1908.] [70
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 64—72. (G.) — L'enseignement mathém. 10, 1908, 226—265. (H Fehr.) — Periodico di matem. 23, 1908, 241—272.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor M. Abraham in Göttingen zum Professor der Physik an der Universität von Illinois in Urbana.

— Privatdozent G. Boggio in Turin zum Professor der Mechanik an der Universität in Messina.

— Professor W. H. Bragg in Adelaide zum Professor der Physik an der Universität in Leeds.

— Ingenieur R. Bricard in Paris zum Professor der angewandten Geometrie am „Conservatoire des arts et métiers" daselbst.

— Professor P. Burgatti in Messina zum Professor der Mechanik an der Universität in Bologna.

— Professor H. Burkhardt in Zürich zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in München.

— W. H. Butts in Ann Arbor zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan daselbst.

— „Instructor" E. H. Comstock in Minneapolis zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota daselbst.

— Dr. J. L. Coolidge in Cambridge, Mass. zum Professor der Mathematik an der „Harvard university" daselbst.

— Professor E. Cosserat in Toulouse zum Direktor der Sternwarte daselbst.

— H. Deslandres in Meudon zum Direktor des Observatoriums daselbst.

— Professor Jules Drach in Poitiers zum Professor der höheren Analysis an der Universität in Toulouse.

— Privatdozent P. Epstein in Straßburg zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor M. de Franchis in Parma zum Professor der Geometrie an der Universität in Catania.

— Professor F. Gerbaldi in Palermo zum Professor der Mathematik an der Universität in Pavia.

— „Instructor" C. Gundersen in East Lansing zum Professor der Mathematik am „Michigan agricultural college" daselbst

— Professor A. G. Hall in Oxford, Ohio zum Professor der Mathematik an der Universität von Michigan in Ann Arbor.

— Professor G. Herglotz in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Universität in Wien.

— „Instructor" J. G. Hun in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— „Instructor" L. R. Ingersoll in Madison zum Professor der Mathematik an der Universität von Wisconsin daselbst.

— Dr. H. Kobold in Kiel zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— Privatdozent G. Kučera in Prag zum Professor der Physik an der böhmischen Universität daselbst.

— Privatdozent F. von Lerch in Wien zum Professor der Physik an der Universität in Innsbruck.

— Observator G. Lüdeling in Potsdam zum Abteilungsvorsteher des meteorologisch-magnetischen Observatoriums daselbst.

— „Instructor" J. H. Mc Donald in Berkeley zum Professor der Mathematik an der Universität von California daselbst.

— Dr. C. R. MacInnes in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Professor M. Mason in New Haven zum Professor der Mathematik an der Universität von Wisconsin in Madison.

— J. W. Miller an der „Lehigh university“ zum Professor der Mathematik daselbst.

— B. F. Morrell zum Professor der Mathematik an der Universität in Fort Worth, Tex.

— D. K. Picken in Glasgow zum Professor der Mathematik am „Victoria college“ in Wellington, New Zealand.

— Professor M. Pieri in Catania zum Professor der Geometrie an der Universität in Parma.

— G. E. Ramsdell zum Professor der Mathematik am „Bates college“ in Lewiston, Maine.

— Dr. R. G. D. Richardson in New Haven zum Professor der Mathematik an der „Brown university“.

— Privatdozent R. Rothe in Berlin zum Professor der Mathematik an der Bergakademie in Klaustal.

— „Instructor“ W. P. Russell in Claremont, Calif. zum Professor der Mathematik am „Pomona college“ daselbst.

— Privatdozent Willy Schmidt in Gießen zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor F. Schur in Karlsruhe zum Professor der Mathematik an der Universität in Straßburg.

— J. E. Stockler an der „Lehigh university“ zum Professor der Mathematik und Astronomie daselbst.

— Dr. C. E. Stromquist in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent A. Tauber in Wien zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Privatdozent M. N. Vaneček in Prag zum Professor der Mathematik an der böhmischen Technischen Hochschule daselbst.

— Miss Roxana Vivian zum Professor der Mathematik am „Wellesley college“, Mass.

— W. W. Wallace zum Professor der Mechanik an der Universität in Liverpool.

— Dr. W. D. A. Westfall in Columbia zum Professor der Mathematik an der Universität von Missouri daselbst.

— Professor E. J. Wilczynski in Berkeley zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana.

— H. R. Willard an der Universität von Maine zum Professor der Mathematik daselbst.

— Dr. S. R. Williams in New York zum Professor der Physik am „Oberlin college“.

— Professor B. F. Yanney zum Professor der Mathematik am „Mount union college“ in Alliance, Ohio.

— „Instructor“ A. E. Young in Lafayette zum Professor der Mathematik am „Miami college“ in Oxford, Ohio.

— Professor J. W. Young in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität von Illinois in Urbana.

Todesfälle.

— William Arnold Anthony, Professor der Physik und Elektrotechnik an der „Cooper union“ in New York, gestorben den 29. Mai 1908, 73 Jahre alt.

— Ulrich Behn, Privatdozent der Physik an der Universität in Berlin, geboren in Hamburg den 28. Mai 1868, gestorben den 2. Mai 1908.

— John Eliot, Generaldirektor der Observatorien in Indien, geboren zu Lamesley (Durham) 1849, gestorben 1908.

— Michel Frolow, General, gestorben in Genf den 2. April 1908.

— Richard Greiner, Doktor, geboren in Mannheim den 4. April 1878, gestorben zu Davos den 6. Februar 1908.

— Henri Joly, Professor der Geometrie an der Universität in Lausanne, gestorben 1908, 48 Jahre alt.

— Stanislaus Kepiński, Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Lemberg, geboren in Bochnia den 11. November 1867, gestorben den 27. März 1908.

— Paul La Cour, Professor an der Volkshochschule zu Askov, geboren zu Skjersö (Jütland) den 13. April 1846, gestorben zu Askov den 24. April 1908.

— Erich Ladenburg, Privatdozent der Physik an der Universität in Berlin, geboren in Kiel den 15. Oktober 1878, gestorben den 14. Juni 1908.

— Heinrich Maschke, Professor der Mathematik an der Universität in Chicago, geboren in Breslau den 24. Oktober 1853, gestorben den 2. März 1908.

— Adolf Mayer, Professor der Mathematik an der Universität in Leipzig, geboren in Leipzig den 15. Februar 1839, gestorben zu Gries bei Bozen den 11. April 1908.

— Karl Pelz, Professor der darstellenden Geometrie an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag, geboren zu Běleč bei Pürglitz (Böhmen) den 2. Oktober 1845, gestorben den 16. Juni 1908.

— Giuseppe Picciati, Professor der Mechanik an der Universität in Bologna, geboren in Piombino den 30. Oktober 1868, gestorben in Venedig den 11. März 1908.

— Laura Pisati, Lehrerin an der technischen Schule „Marianna Dionigi" in Rom, geboren in Ancona, gestorben in Rom den 30. März 1908.

— Otto Pund, Oberlehrer in Charlottenburg, geboren zu Müggenhall (Vorpommern) den 2. Mai 1867, gestorben in Charlottenburg den 2. April 1908.

— John Holmes Rand, Professor der Mathematik am „Bates college" in Lewiston, Maine, gestorben den 7. November 1907.

— Wilhelm Scheibner, Professor der Mathematik an der Universität in Leipzig, geboren in Gotha den 8. Januar 1826, gestorben in Leipzig den 9. April 1908.

— Maurits Snellen, Direktor des meteorologischen Instituts in Utrecht, geboren in Zeyst den 1. April 1840, gestorben 1907.

— Iwan Stožir, früher Direktor des meteorologischen Observatoriums in Agram, gestorben den 12. Februar 1908.

— William Edward Wilson, Astrophysiker, geboren zu Daramona den 19. Juli 1851, gestorben zu Westmeath den 6. März 1908.

— Wenzl Karl Friedrich Zenger, früher Professor der Physik an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag, geboren in Komotau, Böhmen, den 17. Dezember 1830, gestorben 1908.

Demnächst erscheinende mathematisch-literarische Arbeiten.

— Auf Anregung der Euler-Kommission der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat G. Eneström ein Verzeichnis von L. Eulers Schriften bearbeitet. Die Hauptabteilung dieser Bibliographie ist chronologisch nach den Druckjahren geordnet und bringt vollständige bibliographische Angaben sowie gewisse andere Aufschlüsse. In der folgenden Abteilung sind die Schriften auch chronologisch geordnet, aber nach den Jahren, in denen sie verfaßt wurden, und in betreff der bibliographischen Angaben wird auf die Hauptabteilung verwiesen. Die dritte Abteilung (mit kurzen bibliographischen Angaben) ist systematisch nach dem Inhalte geordnet und entspricht also zunächst den Verzeichnissen von P. H. Fuss und J. G. Hagen. Zum Schluß ist ein Sachregister beigefügt, etwa wie das Sachregister des Inhaltsverzeichnisses eines Bandes der 3. Folge der Bibliotheca Mathematica.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— At the Columbia university (New York) Professor D. E. Smith will deliver during the academic year 1908—1909 a course (two lectures each week) on the history of mathematics.

— At the Indiana university Professor R. J. Aley will deliver during the summer session a course (three lectures each week) on the history of mathematics.

— An der Universität in Neapel hat Professor F. Amodeo für das Wintersemester 1908—1909 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik im 18. Jahrhundert angekündigt.

— An der Universität in Padua hat Professor A. Favaro für das Wintersemester 1908—1909 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Optik, insbesondere die Entdeckung des Teleskopes angekündigt.

Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1908.

— *Internationaler Mathematiker-Kongreß in Rom.* Der vierte internationale Mathematiker-Kongreß wurde vom 5. bis 12. April

1908 in Rom gehalten, und die Zahl der Teilnehmer betrug etwa 550. Nach einem Begrüßungsabend am 5. April fanden am 6., 7., 8., 10. und 11. April allgemeine Sitzungen unter dem Vorsitze des Herrn P. Blaserna und seiner Stellvertreter statt. Den Eröffnungsvortrag hielt V. Volterra (Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX), und andere Vorträge (zum großen Teil historischen Inhalts) wurden von den Herren G. Mittag-Leffler, A. R. Forsyth, G. Darboux, W. von Dyck, S. Newcomb, H. A. Lorentz, H. Poincaré, E. Picard und C. Störmer gehalten. Die Sektionssitzungen fanden am 7., 8., 9., 10. und 11. April statt; es gab vier Sektionen (Arithmetik, Algebra, Analysis; Geometrie; Mechanik, Mathematische Physik, Geodäsie, Anwendungen der Mathematik; Philosophische, historische und didaktische Fragen), und in denselben wurden bzw. 37, 17, 43 und 39 Vorträge gehalten. Von den letzteren waren viele wesentlich philosophischen oder pädagogischen Inhalts; mathematisch-historische Vorträge wurden gehalten von den Herren G. Loria (Le tradizioni matematiche dell' Italia; Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques), H. G. Zeuthen (Sur les rapports entre les anciens et les modernes principes de la géométrie), D. E. Smith (The Ganita-Sāra-Sangraha of Mahāvirācārya), P. Duhem (Sur la découverte de la loi de la chute des graves), F. Giacomelli (I risultati di alcune ricerche sull' opera meccanica di Galileo), G. Pittarelli (Luca Pacioli usurpò per se stesso qualche libro di Piero de Franceschi?; Due lettere inedite di Lagrange all' abate di Caluso), R. Marcolongo (Un trattato inedito di meccanica di Vincenzo di Filippis anteriore alla „Mécanique analytique" di Lagrange), F. Amodeo (Appunti su Biagio Pelicani da Parma; Sulla necessità di formare un archivio delle scienze matematiche). Von den fünf Resolutionen bezog sich die letzte auf die Herausgabe von Eulers sämtlichen Werken.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Academia de ciencias de Madrid.* Concours de l'année 1909. Exposición clara y sencilla del cálculo de las probabilidades.

Vermischtes.

— Am Polytechnikum in Zürich hat sich der frühere Oberrealschuldirektor E. Cherbuliez als Privatdozent für Geschichte der Physik und theoretische Physik habilitiert.

— Die Begründung einer italienischen Mathematiker-Vereinigung ist in Aussicht genommen. Der Zweck der Vereinigung scheint in erster Linie zu werden, eine Verbesserung des mathematischen Unterrichts in Italien anzuregen.

Osservazioni e congetture sopra la geometria degli indiani.

Di Beppo Levi a Cagliari.

La fonte d'ogni nostra conoscenza sopra la geometria — e, in generale, sopra la matematica — degli antichi indiani sono i *Sulbasutra*. Sono codici di regole per la costruzione degli altari, non libri determinatamente scientifici; in essi non definizioni, nè teoremi, nemmeno tracce di dimostrazioni; onde le nostre induzioni si fondano necessariamente sopra un lavoro interpretativo. Appunto congetture intorno all'origine e all'estensione delle conoscenze geometriche degl'indiani dobbiamo al Cantor, al Thibaut, al Bürk, al Zeuthen, al Vogt.[1]) Mi pare però che alla premessa che a causa

1) Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 1^3, Leipzig 1907, p. 643—657. V. pure, *Über die älteste indische Mathematik;* Archiv der Mathem. 8_3, 1905, p. 63—72. — Thibaut, *On the Sulvasutras;* Journal of the asiatic society of Bengal 44:1, 1875. — Bürk, *Das Apastamba-Sulbasutra;* Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft 55, 1901, p. 543—591. — Zeuthen, *Théorème de Pythagore. Origine de la géométrie scientifique;* Comptes rendus du II Congrès intern. de Philosophie (Genève, septembre 1904), 1905, p. 833—854. — Vogt, *Haben die alten Inder den Pythagoreischen Lehrsatz und das Irrationale gekannt?* Bibliotheca mathematica 7_3, 1907, p. 6—23. L'antica ipotesi del Cantor che gl'indiani possano aver ricevuto le cognizioni geometriche dai greci e precisamente da Erone è contraddetta dalla cronologia fondata su ragioni filologiche e storiche che assegna i *Sulbasutra* a un'epoca non posteriore al V e IV secolo a. C. e parecchie delle costruzioni in essi tramandate a secoli anteriori. Il Zeuthen, accettando queste risultanze, espone una congettura per cui gl'indiani avrebbero conosciuto una vera dimostrazione del teorema di Pitagora almeno pel caso di cateti razionali. Quantunque il Zeuthen appoggi la sua ipotesi riferendosi alle tradizioni chinesi ed indiane, non pare che queste considerazioni portino un contributo decisivo, mentre pare poco verossimile di attribuire agl'indiani la costruzione di un ragionamento deduttivo generale, mentre i loro testi non ci offrono nessun esempio di simili procedimenti

Il Thibaut e il Bürk ammettono che gl'indiani avessero una forma di ragionamento più sperimentale e per casi particolari. Ma quando essi ritengono che il teorema di Pitagora abbia potuto essere enunciato per induzione sopra una constatazione numerica fatta pel triangolo di lati 3, 4, 5, e verificato poi per altri casi, mi pare facciamo un'ipotesi troppo poco giustificata. Mi pare che l'induzione sarebbe stata ben poco

dello scopo pratico dei *Sulbasutra* si tacessero in questi deliberatamente i particolari scientifici che non servivano direttamente alle costruzioni, si sia dato, in generale troppa importanza, e troppo questi storici si siano quindi allontanati colle loro ipotesi dallo stretto necessario per intendere il contenuto dei testi. Perchè il supposto silenzio volontario non può giungere a nascondere, in quanto esistano, le nozioni teoriche fondamentali che son anima e veste di qualsiasi esposizione. Anche oggi chi esaminasse con leggera critica i vari nostri trattati di disegno geometrico vi scoprirebbe agevolmente tutta la cultura geometrica di artieri e artisti; e se si spingesse a considerare fra i suoi testi anche quelli in cui si espongono costruzioni semplificate o con strumenti limitati, vi troverebbe la traccia delle nostre idee sui fondamenti della geometria.

Nè è vero che non si scorga nei *Sulbasutra* medesimi l'embrione d'un ordinamento scientifico: essi incominciano con costruzioni e proposizioni d'indole generale e propedeutica e contengono alquante considerazioni che dovevano avere più di teoria che di pratica. La stessa moltiplicità delle costruzioni ad un unico ed identico scopo ha grande sapore di ricerca scientifica, commisurata alla capacità e alle tendenze degli autori.

*

La nozione geometrica più completa che i *Sulbasutra* ci presentano dopo quelle indispensabili di retta e cerchio è forse quella di *perpendicolare*. Io cercherò di mostrare come, senza allontanarsi dal fedele esame dei testi, si possa analizzarla nella sua evoluzione. E partendo da questo esame presenterò una congettura sul modo onde potè esser conosciuto dagl'Indiani il teorema di PITAGORA — la più notevole proposizione geometrica dei *Sulbasutra* — che mi pare accordarsi coi documenti meglio di quelle esposte fin qui.

*

Sono noti tre testi dei *Sulbasutra*, che si attribuiscono rispettivamente ad APASTAMBA, a BAUDHAYANA e a KATYAYANA. Dei primi due hanno pubblicato complete traduzioni con commenti il BÜRK[1]) e il THIBAUT[2]): dell'ultimo ci dà soltanto il THIBAUT alcune notizie.[3]) Io considererò quindi soltanto

plausibile e poco naturale. Per il modo in cui si sarebbero determinati i triangoli pitagorici su cui le verifiche sarebbero state tentate fu già rilevato (BÜRK, VOGT) che le varie congetture aritmeticamente sistematiche sono insostenibili. Il VOGT ritiene sperimentale ed induttiva l'origine della proposizione, ma sul modo come abbia potuto formarsi l'esperienza e l'induzione non avanza nuove ipotesi.

1) Zeitschrift der deutschen morgenländischen Gesellschaft **55, 56**.

2) *Sulvasutra of BAUDHAYANA with the commentary of DVARAKANA THANAJVA, transl. into English;* The Pandit **9—10** (Benares 1875).

3) Journal of the asiat. soc., l. c.

i primi due. Avrò occasione a rilevare ripetutamente che BAUDHAYANA rappresenta uno stadio della concezione alquanto più avanzato di APASTAMBA.[1])

Non troviamo nei *Sulbasutra* alcun accenno ad una chiara nozione dell'angolo. Ed io direi che tanto per APASTAMBA quanto per BAUDHAYANA il concetto di perpendicolare è indissolubile da quello di simmetria. Ma v'ha fra i due autori una differenza essenziale.

APASTAMBA considera il semipiano che sta da una parte di una retta r. L'asse di simmetria di una figura simmetrica (triangolo isoscele, rettangolo, trapezio) avente una base su questa retta e appartenente a quel semipiano dà la nozione della perpendicolare alla retta r (o forse, più precisamente, dell'asse di quel segmento base) *in quel semipiano*. Io direi che APASTAMBA vede chiaramente la *semiretta* perpendicolare ad una retta data, piuttostochè la *retta* perpendicolare. Ecco invero i luoghi principali ove APASTAMBA descrive la costruzione della perpendicolare ad una retta in un suo punto (— come asse di simmetria —; di altre costruzioni che debbono interpretarsi diversamente si dirà in seguito). — Si tratta sempre della costruzione di un quadrato.

(APASTAMBA — Cap. I prop. 7.)[2]) (Fig. 1.) Si divida il segmento WE per metà in O: si segnino i punti medi di OE e OW: siano A e B. Si fissino in A e in B le estremità d'una corda di lunghezza WE e la si tenda pel punto medio: il punto medio venga così a cadere in F. Sulla semiretta OF si porti $OS = OE = OW$. Si fissino le estremità della corda di lunghezza WE in W e in S e la si tenda pel suo punto medio: la posizione che questo assume è un vertice del quadrato: portando in E l'estremità della corda che s'era fissata in W si costruirà analogamente un altro vertice del quadrato. Operando similmente dall'altra banda di WE si costruiscono gli altri due vertici.

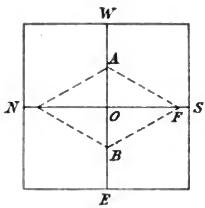


Fig. 1.

1) Il primato di BAUDHAYANA fra i geometri indiani fu già rilevato dal THIBAUT (Journal of the asiat. soc. of Bengal 44: 1, p. 228).

Il BÜHLER *(Sacred books of the east)* pensava che BAUDHAYANA preceda APASTAMBA di almeno 200 anni: ma il BÜRK osserva che tale opinione non è sufficientemente fondata su dati di fatto, mentre egli, da varie considerazioni sul contenuto dei *Sulbasutra,* è condotto all'opinione contraria.

La maggior maturità geometrica di BAUDHAYANA, che mi pare di poter affermare, aggiungerebbe un argomento a sostegno della tesi del BÜRK.

2) BÜRK, l. c. Bd. 56 — Nel riferire queste costruzioni mi attengo ad una libera esposizione; una traduzione fedele non avrebbe maggiore interesse.

(APASTAMBA — Cap. VIII, prop. 5—IX, 1.) (Fig 2.) Con centri in W e in E, raggio WE, si descrivano due archi (1), (2) che si taglino in F. Sia O il punto medio di WE: sulla semiretta OF si porti $OP = WE$: si disponga un segmento (un bambù) di lunghezza WE col suo punto medio in P e cogli estremi rispettivamente sui cerchi (1), (2). Siano R, S le posizioni che assumono questi estremi. $WERS$ sono i vertici del quadrato.

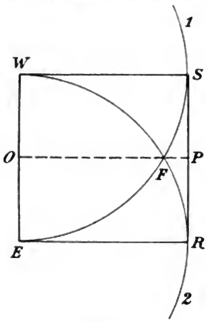


Fig. 2.

In entrambe le costruzioni OF, mediana di un triangolo isoscele avente per base WE, asse di simmetria per tutte le rimanenti costruzioni che si fanno da quella banda della WE, è bene la semiretta perpendicolare secondo il concetto che ho indicato più sopra.

Nella prima costruzione occorre ad APASTAMBA di far uso anche della semiretta perpendicolare dall'altra banda della retta WE: egli non ci dice di prolungare la prima, ma di ripetere la costruzione dall'altra banda. Dobbiamo concludere che APASTAMBA non le ritenesse appartenere ad una sola retta? Sarebbe troppo; molto probabilmante la domanda non si poneva, e non aveva quindi risposta APASTAMBA si proponeva di costruire una figura doppiamente simmetrica, e ciò non poteva assicurar meglio che col ripetere simmetricamente le costruzioni. Fors'anche questo procedimento era maggior garanzia d'esattezza: ma nulla ci autorizza ad affermare che APASTAMBA facesse distinzione fra una convenienza pratica di ripetere le costruzioni e una possibilità teorica di esimersene. Al contrario mostreremo che BAUDHAYANA, che giunge all'affermazione teorica dell'allineamento delle due semirette perpendicolari, trova modo di farlo risultare anche dalla descrizione delle costruzioni.

Anche in BAUDHAYANA ritroviamo la costruzione della semiretta perpendicolare ad una retta in un punto, come mediana di un triangolo isoscele che ancora ottiene tendendo una corda (prop. 37—38). Ma in queste proposizioni due cose meritano di esser rilevate, perchè mostrano la maggior maturità del pensiero geometrico di BAUDHAYANA. Si osserva anzitutto che, mentre APASTAMBA (prop. 7, 1) per fissare la base AB del triangolo isoscele indica di dividere per metà i segmenti OW, OE, BAUDHAYANA dice soltanto di portare dalle due parti del punto in cui si vuol condurre la perpendicolare segmenti uguali. — Inoltre ci par di vedere qui un vero progresso del concetto di perpendicolare: qui infatti per la prima volta, troviamo una costruzione della perpendicolare nell'estremità di un segmento. BAUDHAYANA costruisce la perpendicolare in quel punto alla retta cui il segmento appartiene.

Più interessante è la costruzione della perpendicolare che risulta da quest'altro passo di Baudhayana. Si tratta ancora della costruzione di un quadrato.

(Baudhayana — prop. 23—28.) (Fig. 3.) Si divida il segmento WE per metà in O: centro in O e raggio $OE = OW$ si descriva un cerchio (1): centri in W e in E e raggio WE si descrivano i cerchi (2) e (3): si congiungano i punti d'intersezione di questi due cerchi: la congiungente taglia (1) in due punti N, S. Centri in W, E, N, S si descrivano i cerchi (4), (5), (6), (7) di raggio OE: i punti d'intersezione di questi cerchi a due a due (diversi da O) sono i vertici del quadrato.

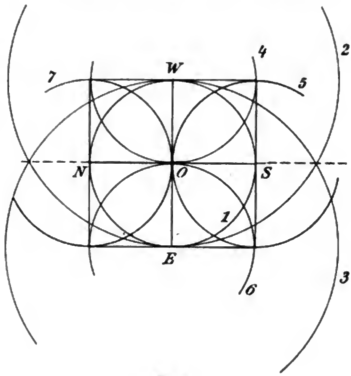


Fig. 3.

Qui Baudhayana non costruisce più precisamente la mediana del triangolo isoscele; egli costruisce l'asse del segmento WE come usiamo noi, congiungendo le intersezioni dei cerchi (2) e (3). Che per Baudhayana il punto medio di WE dovesse trovarsi su tal congiungente nessun dubbio, perchè tal condizione era nella posizione medesima del problema: eppure — residuo evidente delle costruzioni tradizionali in cui mancava il concetto della *retta* asse del segmento, che qui compare per la prima volta — Baudhayana incomincia col dividere il segmento WE per metà: mai nei *Sulbasutra* un segmento è bisecato mediante una costruzione geometrica.

*

Il Thibaut, a proposito della costruzione del quadrato or ricordata, osserva che essa si trova solo in Baudhayana, ed afferma dover essere la più antica costruzione del quadrato che si conosca. Le osservazioni che io ho fatto or ora farebbero pensare invece che essa si presenti solo in Baudhayana, perchè sia produzione propria di lui, del suo pensiero geometrico più sviluppato. Ed è da notare d'altronde che questa proposizione si trova per l'appunto fra le prime del testo, quelle d'indole più teorica, meno soggette quindi alle imposizioni della tradizione.

Il Burk poi, accettando l'affermazione del Thibaut della grande antichità di questa costruzione, crede di trovarne in Apastamba una più

antica che a questa avrebbe dato origine. Sarebbe, secondo lui, quella già citata contenuta nelle proposizioni dalla prop. 8 Cap. VIII alla prop. 1 Cap. IX. Egli osserva infatti che al Cap. IX prop. 2 APASTAMBA prescrive che per costruire l'*atman* dell'*agni* a forma di falco si formino quattro quadrati come è insegnato nelle nominate proposizioni (8 VIII — 1 IX): la costruzione assumeva verossimilmente la disposizione della fig. 4, la quale ha invero qualche somiglianza d'insieme colla fig. 3. Ma mi pare che esse siano essenzialmente diverse di significato. Manca nella figura del BÜRK (fig. 4) la costruzione della NS come asse del segmento WE, mentre in essa hanno ufficio fondamentale i punti O', O'', P_1', P_2', P_1'', P_2'', che mancano alla costruzione di BAUDHAYANA. (Si noti che la determinazione dei punti O', O'', che sarebbe superflua per noi, ha invece importanza fondamentale nell'antico pensiero indiano. Nè nelle prop. 8 VIII — 1 IX, nè nelle seguenti APASTAMBA fa cenno che la costruzione del quadrato possa farsi senza segnare dapprima il punto medio del lato come nella prop. 8 VIII è detto; e d'altronde è stato già osservato che non abbiamo esempio nei *Sulbasutra* in cui il segmento sia dimezzato colla costruzione dell'asse di esso.)

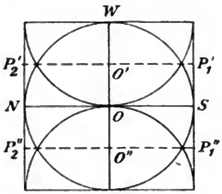


Fig. 4.

Mi pare che le citate proposizioni 23 — 28 di BAUDHAYANA debbano piuttosto raffrontarsi colla prop. 7, Cap. I di APASTÁMBA: invero le due costruzioni differiscono solo in ciò che nella seconda si tendono corde dove nella prima si determinano intersezioni di cerchi, con vantaggio dell'esattezza a favore di quest'ultima.

*

Le precedenti considerazioni portano a pensare che APASTAMBA e gli antichi geometri indiani non riconoscessero la reciprocità della relazione di perpendicolarità di due rette: in questa lacuna mi par di vedere il primo incentivo alla scoperta del teorema di PITAGORA, come ora dirò brevemente.

Gli altari indiani avevano generalmente forma simmetrica (di rettangolo, di quadrato, di trapezio isoscele) intorno ad un asse di direzione WE. Era prescrizione di fissare prima la posizione di questo asse. Le basi dovevano poi costruirsi alle sue estremità in modo che esso si comportasse rispetto ad esse come la semiretta perpendicolare nel punto medio. Sorse quindi il problema di invertire la costruzione della mediana del triangolo isoscele; mentre cioè si costruiva originariamente un triangolo isoscele sopra una data base, per ottenerne la mediana, fu necessario costruire la base del triangolo isoscele conoscendo la direzione e il piede della mediana. Si osservò

che la mediana divideva il triangolo isoscele in due parti simmetriche, e si pensò quindi di costruire separatamente le due metà, triangoli rettangoli aventi un cateto sulla mediana; ma fu necessario che i lati di questi triangoli avessero lunghezze esprimibili in numeri interi, perchè fosse facilmente enunciabile la regola che ne risultava.

Nella determinazione di questi triangoli un altro fatto ebbe certamente un'influenza preponderante. Nei *Sulbasutra* di Apastamba si dà un posto speciale alla costruzione del *vedi* (altare) pei sacrifizi *soma*. Questo aveva la forma di un trapezio isoscele coll'asse della lunghezza di 36 piedi (diretto da W a E) e le due basi delle lunghezze rispettive di 24 e di 30 piedi. Che questo altare fosse oggetto di particolare venerazione ci è provato dal fatto che lo si trova già ricordato nei libri di Taittiriya-Samhita e di Satapatha-Brahmana precedenti di 3 o 4 secoli Apastamba. Se dunque alla costruzione di esso si portò in primo luogo l'attenzione di quei popoli (forse dopo la costruzione dell'altare quadrato di cui abbiamo visto già le costruzioni), è ben naturale che quei triangoli rettangoli che dovevano servire a collocare le basi dovessero esser proprio la metà di quei triangoli isosceli che avrebbero servito a costruire la semiretta perpendicolare nei punti medi dei segmenti di lunghezza 24 e 30. Determinata questa semiretta col tendere, come si vide, una corda sufficientemente lunga le cui estremità erano fissate alle estremità di uno di quei segmenti tirandola nel suo punto medio, è naturale che si siano potuti ottenere in tal modo[1]) i diversi triangoli rettangoli a lati interi di cui un cateto è 12 o 15, e di cui tutti i lati abbiano lunghezza praticabile. Questi triangoli sono quelli di lati 12, 5, 13 — 12, 9, 15 — 12, 16, 20 — 12, 35, 37 — 15, 8, 17 — 15, 20, 25 — 15, 36, 39; il triangolo 15, 112, 113 che con questi completa

1) Non intendo di avventurare una precisa ipotesi sui particolari pratici del modo seguito per determinare queste lunghezze, perchè i documenti non ci danno norma a tale ricostruzione. È possibile che, fissate tre corde alle estremità e al punto medio della base del triangolo isoscele, si siano tese tenendole in mano riunite in modo che le due estreme risultassero uguali e facendo scorrere lungo esse il punto in cui erano trattenute fino a verificare che i segmenti compresi fra questo punto e le estremità fisse avessero misure intere. Vi sarebbe in tal procedimento una notevole sovrabbondanza; è chiaro che, costruita la perpendicolare nel punto medio con un primo triangolo isoscele, due corde sole, l'una rappresentante un lato, l'altra la mediana sarebbero state sufficienti: ma mi pare che il procedimento simmetrico, conducente ad una continua verifica del triangolo isoscele e che non richiedeva un effettivo *tracciamento* e *prolungamento* d'una prima perpendicolare sia più conforme alla mentalità che traspare dai *Sulbasutra*. D'altronde nello sviluppo d'una produzione scientifica comunque rudimentale non si può dimenticare l'influenza delle iniziative personali: è ben probabile che la scoperta sia avvenuta per tentativi replicati e variabili nei loro particolari.

i triangoli rettangoli a lati interi di cui un cateto è 12 o 15 ha i rimanenti due lati troppo lunghi per essere praticabile.

Orbene, precisamente tutti questi triangoli, fatta eccezione per quello 9, 12, 15 si trovano in APASTAMBA per la costruzione dell'altare pei sacrifizi *soma:* e questo triangolo escluso si trova invece in BAUDHAYANA (prop. 29—35). Par dunque plausibile il supporre che precisamente nel modo descritto sia stata trovata questa serie di triangoli rettangoli.

Una constatazione aritmetica — fatta pure a scopo mnemonico[1]) — può aver portato per essi all'enunciazione del teorema di PITAGORA; nè forse esso ebbe dapprincipio altro significato che questo: che esso si verificava in questi triangoli rettangoli. Confortano tale ipotesi la collocazione della proposizione in APASTAMBA e in BAUDHAYANA, le parole con cui essa finisce in APASTAMBA: „Per mezzo di questi (i lati del triangolo) e precisamente di quelli conoscibili è stata insegnata la costruzione", e la proposizione (49) che BAUDHAYANA fa seguire all'enunciato del teorema di PITAGORA: „Ciò si vede nei triangoli rettangoli di lati 3 e 4, 5 e 12, 8 e 15, 7 e 24[2]), 12 e 35, 15 e 36".

Pare rafforzare la predetta congettura l'osservazione che nelle più antiche descrizioni dell'altare pei sacrifizi *soma* la costruzione non era ancora indicata: la ricerca di essa era un problema che s'imponeva.[3])

Si deve cionondimeno osservare che si trovano nei *Sulbasutra* applicazioni del teorema di PITAGORA che farebbero supporre la conoscenza di esso

1) I commentatori indiani posteriori, a proposito del teorema di PITAGORA, si avvicinano a questa interpretazione, che esso servisse a calcolare l'ipotenusa mediante i cateti. Il THIBAUT e il BÜRK oppongono che la pratica del calcolo è caratteristica precisamente di questi tempi posteriori, ma che alla primitiva matematica indiana compete principalmente il carattere geometrico. Si può osservare che (qualunque mezzo potessero poi adoperare per aiutarsi nei calcoli, — pietre, mattoni, ecc. —) anche i primitivi geometri indiani potevano ben valersi di questa regola mnemonica, se poterono trovare e valersi delle lunghezze approssimate della diagonale del quadrato, del raggio del cerchio equivalente al quadrato ecc. che troviamo nei *Sulbasutra.*

2) Il triangolo 7, 24, 25 che BAUDHAYANA nomina, non si trova fra quelli di cui sopra si è parlato. A spiegarne in qualche modo la conoscenza per parte di BAUDHAYANA può servire l'osservazione che 24 è precisamente il doppio di 12 e che, il teorema di PITAGORA essendo noto, BAUDHAYANA può averne cercata la verifica o l'applicazione in altri triangoli la cui considerazione gli sia venuta spontanea. Ma non troviamo nei *Sulbasutra* indicazioni sufficienti per completare la congettura.

3) Lo ZEUTHEN (l. c.) pensa invece che la costruzione in quelle prime descrizioni sia soltanto taciuta. Anche egli rileva di sfuggita la coincidenza dei triangoli pitagorici conosciuti agl'indiani con quelli che hanno per cateti 12 o 15, ma pare supporre che il procedimento sia stato inverso di quello descritto da noi: mediante la conoscenza del teorema di PITAGORA si sarebbero cercati i triangoli che avevano quei cateti.

con completa generalità: ma si deve notare che le proposizioni relative sono quelle in cui sono maggiori le difficoltà di traduzione, e che non si può escludere che la generalità dell'enunciato (dovuta forse al fatto che non si aveva nozione sicura di altri triangoli rettangoli) possa aver condotto, senza alcuna miglior ragione, alla interpretazione generale della proposizione.

Per rafforzare l'ipotesi con un paragone, ricorderò che nella geometria egiziana, in quella indiana e presso gli agrimensori romani si trova calcolata l'area di un quadrilatero di lati a, b, c, d mediante la formula $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ [1]), per nessuna miglior ragione che essa è una estensione spontanea della regola per l'area del rettangolo.

*

Finirò rilevando ancora un particolare della ricordata proposizione (49) di Baudhayana: in essa in luogo dei tre triangoli rettangoli 9, 12, 15—12, 16, 20—15, 20, 25 si nomina l'unico triangolo 3, 4, 5: invece si nominano entrambi i triangoli 5, 12, 13 e 15, 36, 39. Nasce il sospetto di cogliere in formazione la nozione della similitudine: l'identità teorica dei primi tre triangoli col triangolo 3, 4, 5 si è scorta più facilmente per la forma più regolare di quei triangoli: non si è invece ancora affermata pei due ultimi. Ed a conforto di questa osservazione è il caso di ricordare che Apastamba non ci dà invece sicura ragione per indurre ch'egli avesse avvertita la similitudine anche solo dei primi triangoli, mentre Apastamba medesimo, dovendo ingrandire una figura composta di quadrati e rettangoli (l'altare a forma di falco), trascura di ingrandire i lati minori di questi ultimi. L'errore è corretto in Baudhayana.

1) Zeuthen, l. c. p. 836.

The Ganita-Sara-Sangraha of Mahaviracarya.

By David Eugene Smith in New York.[1])

We have so long been accustomed to think of Pataliputra on the Ganges and of Ujjain over towards the western coast of India as the ancient habitats of Hindu mathematics, that we experience a kind of surprise at the idea that other centers equally as important existed among the multitude of cities of that great empire. In the same way we have known for a century, thanks chiefly to the labors of such scholars as Colebrooke and Taylor, the works of Aryabhata, Brahmagupta and Bhaskara, and have come to feel that to these men alone are due the noteworthy contributions to native Hindu mathematics. Of course a little reflection shows this conclusion to be an incorrect one. Other great schools, particularly of astronomy, did exist, and other scholars taught and wrote and added their quota, small or otherwise, to make up the sum total. It has, however, been a little discouraging that native scholars under the English supremacy have done so little to bring to light the ancient material known to exist and to make it known to the Western world. This neglect has not been owing to the absence of material, for Sanskrit manuscripts are known, as are also Persian and Arabic and Chinese and Japanese, that are well worth translating, from the historical standpoint. It has rather been owing to the fact that it is hard to find a man with the requisite scholarship, who can afford to give his time to what is necessarily a labor of love.

It is a pleasure to be permitted to announce the fact that such a man has been found[2]), and that through his labors we are in due time to have new light upon the subject of Oriental mathematics, as known in another part of India and at a time about midway between that of Aryabhata and Bhaskara, and two centuries later than Brahmagupta. The learned pandit, M. Rangacharya, at Madras, some time ago become interested in the work of Mahāvīrācārya, and has now completed about two thirds of its trans-

1) Read at the IV. International Congress of Mathematicians, Rome, April 8, 1908.

2) Another scholar in India, G. B. Kaye (Simla), has recently made a careful study of Aryabhata (Journal of the asiatic society of Bengal [Calcutta] 4_2, 1908, p. 111—141).

lation. Having given some attention to the works of the Hindu scholars in my search for mathematical material in the East, I have Mr. RANGACHARYA's permission to make this treatise known at this time, perhaps a year or two in advance of its publication.

MAHĀVĪRĀCĀRYA probably lived in the court of one of the old Rāshṭrakūta monarchs who ruled over what is now the kingdom of Mysore, and whose name is given as AMOGHAVARSHA NRIPATUNGA. He ascended the throne in the first half of the ninth century A. D., so that we may roughly fix the date of the treatise in question as about 850.

There are four or five manuscripts of this author's work known, three of the oldest being in Madras. Two transcripts of old manuscripts are in other cities, one of them being in Mysore. All of these are in Sanskrit, but all are written in the Kanarese characters used in Mysore in MAHĀVĪRĀCĀRYA's time. One has annotations in Devanagari characters, although the Mysore copy which I have seen has them in Kanarese. In the edition that Mr. RANGACHARYA is preparing the Sanskrit will be given in Devanagari characters, with variant readings from the different manuscripts, and there will be a carefully annotated English translation.

The work itself, entitled Ganita - Sara - Sangraha, consists of nine chapters, of which six have been translated. The first is introductory, and contains seventy stanzas on Terminology. It opens, as is usual with Oriental treatises, with an invocation, in this case apparently to the author's patron deity: „Salutation to MAHAVIRA, the Lord of the Jinas, the protector (of the faithful), whose four infinite attributes, worthy to be esteemed in (all) the three worlds, are unsurpassable (in excellence). I bow to that highly glorious Lord of the Jinas, by whom, as forming the shining lamp of the knowledge of numbers, the whole of the universe has been made to shine". This is followed by „An appreciation of the Science of Calculation" of which I venture to quote three stanzas: „In all those transactions which relate to worldly, Vedic or (other) similar religious affairs, calculation is of use. In the science of love, in the science of wealth, in music and in the drama, in the art of cooking, and similarly in medicine and in things like the knowledge of architecture: In prosody, in poetics and poetry, in logic and grammar and such other things, and in relation to all that constitutes the peculiar value of (all) the (various) arts; the science of computation is held in high esteem". The terminology relates chiefly to the measures used, the names of the operations, numeration, and negatives and zero. Of the operations with numbers, eight are given, addition (except in series) and subtraction (even with fractions) being omitted as if presupposed. One interesting feature is the law relating to zero, which is stated thus: „A number multiplied by zero is zero, and that (number) remains unchanged when it

is divided by, combined with, (or) diminished by zero": That is, the law known to Bhaskara, of dividing by zero, is not here recognized, division by zero being looked upon as of no effect. The laws of multiplication by negatives is stated, and the imaginary number is thus disposed of: „As in the nature of things a negative (quantity) is not a square (quantity); it has therefore no square root".

The second chapter treats of arithmetical operations the first being multiplication, and this being followed by division, squaring, square root, cubing, cube root, summation (of series, in which is included some treatment of arithmetical and geometrical progressions), and „Vyutkalita" (that is, the summation of a series after a certain number of initial terms, „ista", have been cut off).

Chapter III treats of fractions, following the same order as Chapter II. The most noteworthy feature is that relating to the inverted divisor, which is set forth as follows: „After making the denominator of the divisor its numerator (and vice versa), the operation to be conducted then is as in the multiplication (of fractions)". It is curious that this device, which from another source we know to have been used in the East, became as it were a lost art until rediscovered in Europe in the sixteenth century.[1])

Chapter IV consists of miscellaneous problems in fractions which, however, include certain questions involving quadratic equations. For example:

„One-fourth of a herd of camels was seen in the forest; twice the square root (of that herd) had gone on to mountain slopes; and three times five camels (were), however, (found) to remain on the bank of a river. What is the (numerical) measure of that herd of camels?" This evidently requires the finding of the positive root of the equation

$$\frac{x}{4} + 2\sqrt{x} + 15 = x.$$

or, in general, the solution of an equation of the type $x-(bx+c\sqrt{x}+a)=0$, the rule for which is given. The chapter also contains various other types of equations involving some knowledge of radical quantities.

Chapter V relates to the Rule of Three, simple and compound, direct and inverse, with applications to interest, barter, and mensuration.

Chapter VI is entitled „Mixed Problems", and is interesting from the considerable use made of rules that would now be expressed in algebraic formulas, particularly with reference to the various computations of interest and to the solution of indeterminate equations.

Of the latter a single example may suffice to show the nature of the problems: „Into the bright and refreshing outskirts of a forest, which were

1) See the writer's *Rara Arithmetica*, Boston, 1908, p. 233.

full of numerous trees with their branches bent down with the weigth of flowers and fruits, trees such as *jambu* trees, lime trees, plantains, areca palms, jack trees, date palms, *hintala* trees, palmyras, *punnāga* trees, and mango trees — (into the outskirts), the various quarters whereof were filled with the many sounds of crowds of parrots and cuckoos found near springs containing lotuses with bees roaming about them — (into such forest outskirts) a number of weary travellers entered with joy. (There were) sixty-three (numerically equal) heaps of plantain fruits put together and combined with seven (more) of those same fruits, and these were equally distributed among twenty-three travellers so as to have no remainder. You tell me now the numerical measure of a heap of plantains." Problems of this sort are solved by a process of calculation known as „Vallikā-kuttīkāra", a kind of division or distribution employing a creeper-like chain of figures, and the patience shown by Mr. Rangacharya in interpreting the long and complicated rule will strike the reader of this work as worthy of the highest praise.

A complex „kuttīkāra" known as „sakala-kuttīkāra", is also given, an example of which is as follows: „A certain quantity multiplied by six, then increased by ten, and then divided by nine, leaves no remainder. Similarly, a certain other quantity multiplied by six, then diminished by ten, and then divided by nine, leaves no remainder. Tell me quickly what these two quantities are which are to be multiplied (by the given multiplier here)." The case has no new interest however, since it resolves itself into two simple problems, $\frac{6x+10}{9}$ = integer, and $\frac{6x-10}{9}$ = integer, instead of the problem $\frac{ax+by}{c}$ = integer. Cases, however, of the type

$$ax + by + cz + dw = p, \quad x + y + z + w = n$$

are given, and others involving several variables.

A single example will suffice to show their general nature: „Four merchants who had invested their money in common were asked, each separately, by the customs officer what the value of the commodities was; and indeed one eminent merchant among them, deducting his own investment, said that it was twenty-two; then another said that it was twenty-three; then another, twenty-four; and the fourth said that it was twenty-seven each of them deducting his own invested amount. O friend, tell me separately the value of the commodity owned by each."

Chapter VII, not yet translated, treats of geometric problems, both with relation to practical applications and approximate results, and also from the accurate scientific standpoint.

Chapter VIII deals with mensuration, and principally with the common Hindu topic of „excavations", and the final chapter (IX) treats of the primitive trigonometry known in India by the name of „shadow problems".

Such is a brief outline of the work. It is sufficient, however, to show that we shall have, in Mr. Rangacharya's labors, the most noteworthy single contribution to the history of Hindu mathematics that has been made for nearly a century. What light it shall throw upon the relation of Bhaskara's *Lilavati* to works of his predecessors, upon the relation of the schools of Pataliputra and Ujjain to each other and to that of Mysore, upon the knowledge of Greek mathematics in the East, and upon the state of algebra in India at about the time that Al-Khowarazmi was writing his *Al-jebr w'al-muqabala* in Bagdad, it is impossible as yet to say.

It is on these accounts quite as much as for the details of the work itself that its appearance, perhaps in 1909 or 1910, will be awaited with interest. If its publication shall also have the effect of stimulating other Oriental scholars, such as India continues to produce, to make known to the West the sealed books of the East, the world will be still more Mr. Rangacharya's debtor.

Die Abhandlung Qosṭā ben Lūqās und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Wir haben in dieser Zeitschrift (Bd. 8_3, 1907, p. 24—27) die Übersetzung einer Abhandlung veröffentlicht, die den Titel trägt: „Verdeutlichung des Beweises zur Rechnung der beiden Fehler in der Verbesserung des Abū Sa'īd Gābir b. Ibrāhīm el-Ṣābī“, und haben daselbst (p. 24) darauf hingewiesen, daß diese „Verbesserung“ sich vielleicht auf die ältere Arbeit von Qosṭā b. Lūqā beziehen möchte, die uns damals noch nicht vorgelegen hatte. Jetzt ist es uns durch das liebenswürdige Entgegenkommen des Herrn Prof. E. Wiedemann in Erlangen, des hervorragenden Kenners der Geschichte der arabischen Naturwissenschaften, möglich geworden, auch die Arbeit des Qosṭā b. Lūqā kennen zu lernen. Herr Wiedemann hat uns von den Blättern 191—195 des Manuskriptes 1043 der Bibliothek des India Office von ihm selbst nach dem Weiß-schwarz-Verfahren hergestellte Photographien zur Benutzung überlassen; für diese Freundlichkeit sprechen wir ihm hier unseren verbindlichsten Dank aus.[1]) Der Kodex 1043 (nach dem Katalog von O. Loth, London, 1877) enthält eine Reihe von Abhandlungen in arabischer und persischer Sprache, von einem gewissen Mollā Aḥmed b. Soleimān um die Mitte des 17. Jahrhunderts zusammengestellt und in Sūrat in Indien abgeschrieben im Jahre 1722; sie sind meist mathematischen, astronomischen und philosophischen Inhaltes. Auf Seite 191ᵃ bis 193ᵇ befindet sich die Abhandlung des Qosṭā b. Lūqā über die Regel der beiden Fehler (bis jetzt Unicum); Seite 193ᵇ bis 194ᵃ steht ein kurzes Bruchstück einer astronomischen Abhandlung über die Bestimmung der Qibla; dann folgt 194ᵃ bis 194ᵇ eine ebenfalls kurze anonyme Darstellung des Verfahrens mit den beiden

1) Auch für die Überlassung des Kodex 1043 für längere Zeit an Prof. E. Wiedemann sei ebenfalls von unserer Seite dem Oberbibliothekar des India Office in London, Herrn Prof. F. W. Arnold, bestens gedankt.

Fehlern ohne Beweis und endlich 194ᵇ bis 195ᵇ eine Abhandlung in persischer Sprache über die „Regel mit *einem* Fehler" oder das Verfahren mit der angenommenen Zahl. Wir geben im folgenden die drei über diese Regeln handelnden Arbeiten in so gut als möglich wörtlicher Übersetzung wieder, wobei wir aber bemerken müssen, daß alle drei ziemlich fehlerhaft sind und es deshalb oft nicht leicht war, genau zu übersetzen, ja bisweilen sogar schwer, den richtigen Sinn herauszufinden. Die Figuren zur Abhandlung Qosṭās fehlen im Manuskript, sie sind von uns nach den Angaben des Textes gezeichnet.

I.

Abhandlung von Qosṭā b. Lūqā über den Beweis zum Verfahren der Rechnung der beiden Fehler.[1]) Es ist dies das umfassende (allgemeine)[2]) Kapitel, mit dessen Hilfe alle Aufgaben der Rechenkunst, in denen keine Wurzeln vorkommen[3]), gelöst werden können. Wisse, daß bei allen Aufgaben der Rechenkunst die Antwort entweder die gesuchte Zahl selbst, oder größer als sie, oder kleiner als sie sein kann. Als nun aber die Vertreter der Wissenschaft die Schwierigkeit[4]) sahen, die den meisten Leuten das Auffinden der genauen Lösung bereitete, . . .[5]) und sie verfaßten hierüber ein (besonderes) Kapitel und nannten es das umfassende (allgemeine). Wenn nun irgendeine Aufgabe der Rechenkunst gestellt und nach der richtigen Lösung derselben gefragt wurde, so bediente man sich dieses allgemeinen Kapitels, und mit seiner Hilfe wurde die richtige Lösung aufgefunden. Dasselbe besteht nun darin, daß zwei beliebige verschiedene Zahlen angenommen werden und die Aufgabe mit jeder derselben auf ihre Richtigkeit geprüft wird; ergibt nun die Prüfung Fehler, so müssen dieselben notwendig entweder beide überschießend oder beide mangelhaft oder der eine überschießend, der andere mangelhaft sein. Wenn nun beide überschießend oder beide mangelhaft sind, so subtrahiere den einen vom anderen[6]), der Rest sei der Divisor; wenn aber der eine

1) Arabisch: Maqāla li-Qosṭā b. Lūqā fī'l-burhān 'alā 'amal ḥisāb el-chaṭa'ain

2) Das arabische Wort für diesen Ausdruck ist ǵāmiᶜ; was hier und im folgenden in runden Klammern steht, ist von mir zur näheren Erläuterung hinzugefügt.

3) Dies ist unvollständig, es sollten doch wenigstens noch Quadrate und Kuben erwähnt sein.

4) Der Text hat istisāb statt istis'āb.

5) Hier scheint im Text eine Lücke zu sein, vielleicht sollte da etwa folgendes stehen: „so dachten sie über diese Sache nach".

6) Besser wäre: den kleineren vom größeren.

überschießend und der andere mangelhaft ist, so addiere beide, dann hast du wieder den Divisor. Dann wird der Fehler der ersten Zahl mit der zweiten (angenommenen) Zahl und der Fehler der zweiten Zahl mit der ersten Zahl multipliziert und das kleinere Produkt vom größeren subtrahiert, oder beide Produkte werden addiert, gleichwie dies im Kapitel über die beiden Fehler gemacht wird[1]); hierauf teilt man die Differenz oder Summe durch die Zahl, die wir vorher als Divisor bezeichnet haben, so ist das Resultat die genaue Antwort auf die Aufgabe. Beispiel: Wenn gesagt wird, welche Zahl[2]) ist es, deren Hälfte und Viertel zusammen 10 ausmachen, so setzen wir die eine der beiden angenommenen Zahlen 4 und die andere 8, dann ist der erste Fehler 7 und der zweite 4; das weitere Verfahren ist bekannt, und wir lassen es daher weg.

Der Grund der Multiplikation des ersten Fehlers mit der zweiten (angenommenen) Zahl und des zweiten Fehlers mit der ersten Zahl ist folgender[3]): Wenn wir die Aufgabe mit den beiden Zahlen, nämlich 4 und 8 geprüft haben, deren beide Fehler mangelhaft waren, und zwar 7 und 4, ihr Unterschied also 3, und der Unterschied der beiden (angenommenen) Zahlen 4, so finden wir leicht, daß mit jedem 4, um das die angenommene Zahl sich vergrößert, wir uns dem richtigen Resultate (d. h. der Zahl 10) um 3 nähern; wir erkennen hieraus, daß bei einer Vergrößerung der angenommenen Zahl um 1 wir uns dem Resultate um $^3/_4$ nähern, und umgekehrt, wenn wir uns um 1 dem Resultate nähern sollen, wir die angenommene Zahl um $1^1/_3$ vergrößern müssen; da wir uns nun von dem Resultate (6) der größeren Zahl (8) aus noch um 4 dem wahren Resultate (10) zu nähern haben, so müssen wir diese größere Zahl (8) noch um $4 \cdot 1^1/_3 = 5^1/_3$ vermehren, die gesuchte Zahl ist also $13^1/_3$. Wenn wir nun das 7, d. h. den ersten Fehler, mit 8, d. h. der zweiten (angenommenen) Zahl, multiplizieren, erhalten wir 56, und dividieren wir dies durch 3 (die Differenz der beiden Fehler), so erhalten wir 8 plus zweimal $5^1/_3$ $(= 18\frac{2}{3})$; jetzt haben wir aber zu viel, wir sollten nur 8 plus einmal $5^1/_3$ $(= 13\frac{1}{3})$ haben; wenn wir nun den zweiten Fehler, nämlich 4, mit der ersten (angenommenen) Zahl, nämlich 4, multiplizieren und das Resultat durch 3 teilen, erhalten wir 4 plus einmal $1^1/_3$ $(= 5\frac{1}{3})$[4]);

1) Qosṭā b. Lūqā setzt also das Verfahren der Regel der beiden Fehler bereits als bekannt voraus.

2) Im Text māl = Vermögen.

3) Hier und im folgenden ist der Text etwas verdorben und die Übersetzung ziemlich frei.

4) Hier fehlt wahrscheinlich: dieses von $8 + 2 \cdot 5\frac{1}{3}$ abgezogen, bleibt $8 + 5\frac{1}{3} = 13\frac{1}{3}$, d. h. die gesuchte Zahl

wenn wir aber jenes Produkt, nämlich 4 mal 4, d. h. der zweite Fehler mal der ersten (angenommenen) Zahl, von 56 subtrahieren, so verschwindet (ebenfalls) der Überschuß, der von (der zu großen Zahl) 56 herrührte, und es bleibt die Größe (40), die durch 3 dividiert die gesuchte Zahl ($13\frac{1}{3}$) ergibt. — Das ist der Grund, weshalb man den ersten Fehler mit der zweiten Zahl und den zweiten Fehler mit der ersten Zahl multipliziert, indem eben durch Ausgleichung (d. h. wohl durch die hierauf folgende Subtraktion der beiden Produkte die richtige Zahl erhalten wird. — Wir haben jetzt die Begründung dieser Regel gegeben und dieselbe an einem Beispiel gezeigt, bei dem beide Fehler mangelhaft waren; auf analoge Weise wird der Einsichtige leicht die Begründung finden für den Fall zweier überschießender Fehler und für den Fall, wo der eine Fehler überschießend, der andere mangelhaft ist. Was nun den allgemeinen Beweis für alle Fälle dieses Kapitels betrifft, so wird er unten folgen; aber wisse, daß bei jeder Aufgabe der Rechenkunst, bei der das Endresultat als bekannte Zahl gegeben ist (wie in der vorhergehenden Aufgabe die Zahl 10), die gesuchte Größe nur diejenige Zahl sein kann, welche (eingesetzt in die Gleichung) jenes Endresultat ergibt.[1]) Im vorhergehenden haben wir nun erklärt, wie mit Hilfe dieser Methode die Rechnungsaufgaben gelöst werden, in denen keine Wurzeln vorkommen, jetzt aber wollen wir alles, was erwähnt wurde über die Anwendung dieser Regel[2]), auf geometrischem Wege mit Hilfe von Figuren erläutern und beweisen.

Wir ziehen zu diesem Zwecke zuerst eine gerade Linie, unbestimmt in ihrer Länge[3]), sie stelle die gesuchte Zahl dar, es sei dies die Linie *ad* [Fig. 1], und das Resultat der angenommenen Linie (d. h. was sich ergibt, wenn mit dem x die vorgeschriebenen Operationen vorgenommen werden) sei *od*, das wir im Punkte *d* senkrecht auf *ad* errichten; dann ziehen wir *ao*; wenn wir nun die gesuchte Zahl, welche die Linie *ad* ist, kennen wollen, so müssen wir mit zwei verschiedenen Zahlen (die Aufgabe) erproben; hierbei können nun die beiden Zahlen entweder beide kleiner oder beide größer oder die eine größer und die andere kleiner als die gesuchte Zahl sein, wie wir oben schon auseinandergesetzt haben. Es seien

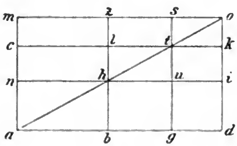


Fig. 1.

1) Dieser Satz scheint eingeschoben, er ist wenigstens hier recht überflüssig.

2) Hier folgt wieder die ganze Darstellung des Verfahrens, die wir auch als eingeschoben betrachten und daher weglassen.

3) Wörtlich: „unbekannt in bezug auf die Zahl".

nun zuerst beide kleiner als die Unbekannte, es seien dies die Linien *ab* und *ag;* wir errichten in *b* und *g* zwei Senkrechte, die die Linie *ao* in den Punkten *h* und *t* treffen mögen, dann hat man die gleichen Verhältnisse

$$ad : do = ag : gt = ab : bh,$$

und *bh* ist das Resultat von *ab* und *gt* das Resultat von *ag*[1]); wir vervollständigen nun das Rechteck[2]) *md* und ziehen durch die Punkte *t* und *h* Parallele zu *ad*, es seien diese *ni* und *ck*, und verlängern ferner *bh* und *gt* bis *z* und *s;* nun ist die erste angenommene Zahl *ab* bekannt, ebenso ihr Resultat *bh*, und ihr Fehler bis zum zuerst gegebenen Resultat *(od)* ist *hz* und auch bekannt; die zweite angenommene Zahl *ag* ist ebenfalls bekannt, und ihr Resultat *gt* auch, also ebenso ihr Fehler *ts;* multiplizieren wir nun den Fehler der ersten Zahl mit der zweiten Zahl, so erhalten wir das Rechteck *mu*, und wenn wir den Fehler der zweiten Zahl mit der ersten multiplizieren, so erhalten wir das Rechteck *ml*, und wenn wir das kleinere Rechteck *ml* vom größeren *mu* abziehen, bleibt der Gnomon *nuszlc;* weil aber das Rechteck *zt* gleich dem Rechteck *ti* ist, das Komplement gleich dem Komplement, wie Euklides im 1. Buch bewiesen hat (Satz 43, Edit Heiberg), so ist Rechteck *ci* = dem Gnomon *nuszlc;* es ist also bekannt, seine Breite *cn* ist ebenfalls bekannt, sie ist gleich *tu*, dem Unterschied der beiden Fehler, und wenn wir das Rechteck *ci* durch seine Breite teilen, so erhalten wir *ni*, das also auch bekannt ist, und dies ist gleich *ad*, also ist *ad*, d. h. die gesuchte Größe, bekannt.

Wenn nun jede der beiden Zahlen, mit denen die Aufgabe geprüft wird, größer als die gesuchte Zahl ist, wie wir z. B. in folgender Figur [Fig. 2] die beiden Linien *ae* und *aw* angenommen haben, von denen jede also bekannt und größer als *ad* ist, so verlängern wir zuerst die Linie *ao* bis *f* und vervollständigen die Figur *wx*, dann ist die erste (angenommene) Zahl *ae* bekannt, und ihr Resultat *eq* ist bekannt, und ihr Fehler, überschießend und gleich *pq*, ist bekannt;

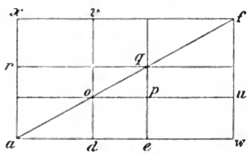


Fig. 2.

die zweite (angenommene) Zahl ist *aw* und bekannt, ihr Resultat *wf* ist bekannt, und ihr Fehler *uf* ist überschießend und bekannt. Wird nun der Fehler der ersten Zahl mit der zweiten Zahl multipliziert, so erhält

1) D. h. das, was man erhält, wenn man die Werte von *ab* und *ag* in die Gleichung einsetzt.

2) Im Text saṭḥ = Fläche.

man das Rechteck *ru*, und die Multiplikation des Fehlers der zweiten Zahl mit der ersten Zahl gibt das Rechteck *px*, und wenn das kleinere Rechteck vom größeren abgezogen wird, so bleibt das Rechteck *rv*, weil das Rechteck *qv* gleich dem Rechteck *qu* ist, das Komplement gleich dem Komplement, und wenn das bekannte Rechteck *rv* durch die Linie *rx*, die bekannte Differenz der beiden Fehler, geteilt wird, so ergibt sich hieraus die Linie *xv*, die also bekannt ist und gleich der Linie *ad*, also ist auch diese bekannt, und sie ist die gesuchte Zahl

Wenn endlich eine der angenommenen Zahlen, mit denen die Aufgabe geprüft wird, überschießend und die andere mangelhaft ist, wie wir es in der folgenden Figur [Fig. 3] angenommen haben, wo *ag* und *ae* diese beiden Zahlen seien, so ist also *ag* bekannt, und ihr Resultat sei die Linie *gt*, also auch bekannt, und ihr Fehler sei *ts*, mangelhaft und auch bekannt; ferner sei das Resultat von *ae* die Linie *eq*, und ihr Fehler sei *fq*, überschießend und bekannt. Wenn wir nun den Fehler der ersten Zahl mit der zweiten Zahl multiplizieren, so erhalten wir das Rechteck *fc*, und wenn wir den Fehler der zweiten Zahl mit der ersten Zahl multiplizieren, so erhalten wir das Rechteck *rs*, und wenn wir diese beiden Rechtecke addieren, so ergibt sich das Rechteck *kr*, weil das Rechteck *no* gleich dem Rechteck *fk* ist, das Komplement gleich dem Komplement; also ist das Rechteck *kr* bekannt, und wenn wir es teilen durch die Linie *cr*, welche gleich der Summe beider Fehler ist, erhalten wir die Linie *ck* als bekannt, und diese ist gleich der Linie *ad*, also ist auch *ad* bekannt, und diese ist die gesuchte Zahl; das ist, was wir beweisen wollten.

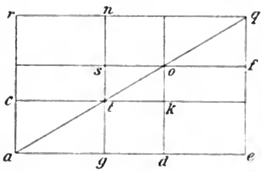


Fig. 3.

II.

Über die Auffindung der Unbekannten mit der Regel der beiden Fehler. Der Weg ist der, daß wir für die Unbekannte annehmen, was wir wollen, und damit ausführen, was die Aufgabe verlangt; entspricht es (das Angenommene) der Aufgabe, so ist es die gesuchte Zahl; ist es im Widerspruch mit ihr, so nennen wir den Unterschied zwischen ihm und der gesuchten Zahl[1]) den ersten Fehler. Dann nehmen wir eine zweite Zahl an und machen mit ihr wieder, was die Aufgabe verlangt; ist sie im Widerspruch mit ihr, so nennen wir den Unterschied den zweiten Fehler. Dann multiplizieren wir die erste angenommene Zahl mit dem zweiten

1) Dies ist unrichtig, es sollte heißen: zwischen dem Resultate der Einsetzung und dem richtigen Resultate (d. h. der rechten Seite der Gleichung).

Fehler und nennen dies das erste zu Behaltende; hierauf die zweite angenommene Zahl mit dem ersten Fehler und nennen dies das zweite zu Behaltende. Wenn nun die beiden Fehler überschießend oder beide mangelhaft sind, so teilen wir den Unterschied der beiden zu Behaltenden durch den Unterschied der beiden Fehler; wenn aber der eine Fehler überschießend und der andere mangelhaft ist, so teilen wir die Summe der beiden zu Behaltenden durch die Summe der beiden Fehler und erhalten so (in beiden Fällen) die unbekannte Zahl. Beispiel: Wenn gesagt wird, welches ist die Zahl, die, wenn zu ihr 3 gezählt und die Summe mit 4 multipliziert wird, 20 hervorbringt[1]), so nehmen wir zuerst die Zahl 6 an und machen mit ihr, was vorgeschrieben ist, so erhalten wir 36, der Fehler ist also 16 überschießend; dann nehmen wir die Zahl 3 an und machen, was vorgeschrieben ist, so erhalten wir 24, der Fehler ist 4 überschießend[2]); hierauf multiplizieren wir die erste Annahme 6 mit dem zweiten Fehler 4 und erhalten 24, das ist das erste zu Behaltende; dann multiplizieren wir die zweite Annahme 3 mit dem ersten Fehler 16 und erhalten 48, das zweite zu Behaltende; dann teilen wir den Unterschied der beiden zu Behaltenden, 24, durch den Unterschied der beiden Fehler, 12, so erhalten wir 2, und dies ist die gesuchte Zahl. — Wisse, daß es auf diesem Wege nicht möglich ist, eine Aufgabe zu lösen, in der Quadrat- oder Kubikwurzeln vorkommen[3]); dagegen sind die Fälle möglich, in denen nur die Operationen Verdoppelung, Halbierung, Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division vorkommen. Beispiel: Wenn gesagt wird, welche Zahl ergibt, wenn zu ihr 3 addiert und die Summe mit sich selbst multipliziert und vom Resultate 5 subtrahiert wird, die Zahl 20[4]), so ist die Antwort auf diese Frage mittels dieser Regel nicht möglich; ebenso wenn gesagt wird, welche Zahl ist es, die, wenn 3 von ihr subtrahiert, aus der Differenz die Quadratwurzel gezogen und das Resultat mit 2 multipliziert wird, die Hälfte jener Zahl ergibt.[5]) Das Geheimnis dieser Sache ist das, daß die Operation mit der angenommenen Zahl in diesen Fällen nicht entsprechend den Forderungen der Aufgabe ist, und dies deswegen, weil der Fragesteller die Summe $(x + 3)$[6]) mit der Summe aus der *unbekannten* Zahl und dem Addenden (3) multipliziert

1) Also $4\ (x + 3) = 20$.

2) Der Satz mit der zweiten Annahme (3) fehlt ganz im Text.

3) Dieser Satz ist unvollständig, man würde doch nach den Beispielen, die folgen, auch „Quadrate und Kuben" erwarten.

4) Es ist also die Gleichung zu lösen: $(x + 3)^2 - 5 = 20$.

5) Hier heißt die Gleichung: $2\sqrt{x - 3} = \frac{x}{2}$.

6) Dieses $x + 3$ steht nicht im Text.

in der ersten Aufgabe, in der zweiten mit der Wurzel aus dem Reste[1]), dagegen der Antwortende mit der Summe aus der *angenommenen* Zahl und dem Addenden (3) die Multiplikation ausführt (in der ersten Aufgabe), und da diese beiden (d. h. die unbekannte Zahl und die angenommene) verschieden sind, führt die Operation nicht das aus, was in der Aufgabe eigentlich verlangt wird.[2]) Überlege dies und präge es dir ein!

III.

Zusatz[3]): *Über den Beweis des Verfahrens der Auffindung der Unbekannten vermittelst* **eines** *Fehlers.* Wenn jemand die Frage stellt, welche Zahl ist es, die, wenn sie verdoppelt oder halbiert wird, oder deren Drittel zu ihr addiert oder ihr Viertel von ihr subtrahiert wird, dann (das Ergebnis) mit einer anderen Zahl multipliziert wird, und das (neue) Resultat durch eine Zahl dividiert wird, irgendeine Zahl ergibt, so ist der Weg des Verfahrens der: Zuerst nimm eine Zahl, welche du willst, an und nenne sie die angenommene und operiere mit ihr entsprechend der Aufgabe; wenn das Ergebnis mit dem Resultat der Multiplikation und Teilung übereinstimmt, so ist es gut; wenn nicht, so behalte jene Zahl im Gedächtnis; nachher multipliziere das, was der Fragesteller als Ergebnis der Multiplikation und Teilung angegeben hat, mit der angenommenen Zahl und teile das Ergebnis, wenn es größer ist, durch das im Gedächtnis behaltene, wenn es aber kleiner ist, so setze es zu ihm ins Verhältnis, das Ergebnis der Teilung oder der Verhältnissetzung ist die gesuchte Zahl. — Ein anderer Weg ist der, daß du die behaltene Zahl durch das Ergebnis der Teilung und Multiplikation, wie es der Fragesteller angegeben hat, teilst, wenn jene größer ist, oder zu ihr ins Verhältnis setzest, wenn jene kleiner ist, und dann die angenommene Zahl durch das Ergebnis dieser Teilung oder Verhältnissetzung teilst oder zu ihr ins Verhältnis setzest; das Resultat der (letzteren) Teilung oder Verhältnissetzung ist die gesuchte Zahl. — Oder, wenn du willst, so teile die behaltene Zahl durch die angenommene, und durch das Ergebnis dieser Teilung teile das Resultat, das der Fragesteller angegeben hat, das Resultat dieser Teilung ist die gesuchte Zahl; dies ist der dritte Weg.[4]) — Beispiel: Jemand sagt: welche Zahl ist es, die, wenn man sie verdoppelt, dann (das Produkt) mit 6 multipliziert und (das Resultat) durch 8 teilt, 3 ergibt.[5]) Wir nehmen an, daß jene Zahl 4 sei, und nehmen mit ihr die Operationen

1) Dies ist jedenfalls unrichtig oder unklar ausgedrückt.

2) Vgl. über diese etwas dunkle Auseinandersetzung den folgenden Kommentar.

3) Fā'ide = porisma = corollarium

4) Über diese drei Wege siehe den Kommentar.

5) Dies gibt die Gleichung $\frac{12x}{8} = 3$.

vor, die der Fragesteller genannt hat, so ist das Resultat der Teilung[1]) 6, dieses behalten wir im Gedächtnis; dann multiplizieren wir das Ergebnis der Teilung, das der Fragesteller genannt hat (d. i. 3), mit der angenommenen Zahl (4), das gibt 12; da es größer ist als 6, d. h. die behaltene Zahl, so teilen wir (es durch diese), das Resultat der Teilung ist 2, und dies ist die gesuchte Zahl. Dies ist der erste Weg. Wollen wir nach dem zweiten Weg vorgehen, so teilen wir die behaltene Zahl, die 6 ist, durch das Ergebnis des Fragestellers, das 3 ist, wir erhalten 2; hierauf teilen wir die angenommene Zahl, die 4 ist, durch (das erhaltene) 2, so ist das Resultat auch 2, die gesuchte Zahl. Die Operation nach dem dritten Weg ist ebenfalls einleuchtend. [Anders verhält es sich in den Fällen, wo dieses Verfahren auf (den Fall) der Addition einer bestimmten (bekannten) Zahl zu der Unbekannten oder der Subtraktion einer solchen von derselben oder auf Quadrat- und Kubikwurzeln angewandt werden soll; hier hat es keine Gültigkeit; aber bei den vier Operationen der Verdoppelung, der Halbierung, der Multiplikation und der Division, ebenso bei der Addition und Subtraktion (von Teilen der Unbekannten), wie z. B. ein Viertel und ein Zweitel und ein Drittel und ein Fünftel usw. der unbekannten Zahl, hat es Gültigkeit][2]), weil (in diesen Fällen) das Verhältnis der angenommenen Zahl zu der im Sinn behaltenen gleich ist dem Verhältnis der gesuchten Zahl zu der vom Fragesteller gegebenen; wenn man also das vom Fragesteller Gegebene mit der angenommenen Zahl, welche (Zahlen) die beiden Enden (der Proportion) sind, multipliziert und (das Produkt) durch die im Sinn behaltene Zahl, welche die bekannte mittlere (innere) Zahl ist, teilt, wird man als Resultat die unbekannte Zahl erhalten, welche das unbekannte innere (Glied) ist. Oder auch: wenn man die eine der mittleren Zahlen, nämlich die gegebene, durch eine der äußeren teilt und das Resultat der Division zum Teiler der anderen äußeren macht, so ist das Resultat dieser (letzteren) Division das unbekannte mittlere Glied.

Kommentar.

Zu I. Wir haben in der oben zitierten Abhandlung über die Rechnung der beiden Fehler gezeigt, wie Abū Sa'īd el-Sābī in seinem Beweise den Irrtum beging, an Stelle des allgemeinen Falles nur einen ganz speziellen zu behandeln, nämlich den Fall, wo $f(\alpha_1) + f(\alpha_2) = \alpha_2 - \alpha_1$ ist. In diesen Irrtum verfiel allerdings Qosṭā nicht, aber er vermochte sich doch auch nicht auf den allgemeinsten Standpunkt zu stellen; er nimmt,

---

1) Es wird also hier nur die letzte Operation genannt, die ausgeführt worden ist.

2) Was in eckigen Klammern steht, ist ziemlich frei von mir übersetzt; der Text scheint hier etwas verdorben zu sein.

wie sich aus der im Text (p. 4) gegebenen Proportion ergibt, die Resultate der Substitutionen diesen selbst proportional an (Beispiel $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 10$; Substitutionen 4 und 8, Resultate 3 und 6); dies ist allerdings ganz richtig für Gleichungen von der Form $ax + bx + \ldots = m$, aber nicht für solche von der Form $\frac{a(x \pm b)}{c} = d$, oder einfach $ax \pm b = c$. Für Gleichungen der ersten Art ist aber die Regula falsi und der ganze Apparat ihres Beweises gar nicht notwendig, da genügt eine einzige Substitution oder eine Proportion; nimmt man in dem oben angeführten Beispiele QOSṬĀS $x = 4$ an, so ist das Resultat 3, und man hat die Proportion: $4:x = 3:10$ und hieraus $x = 13\frac{1}{3}$. Daß dies von QOSṬĀ nicht erkannt worden ist, der doch die Proportion $ad:do = ag:gt = ab:bh$ aufstellt, scheint mir sehr sonderbar und könnte wohl den Gedanken aufkommen lassen, diese Arbeit sei eine bloß untergeschobene. Der Beweis würde sich übrigens für den Fall von Gleichungen von der Form $ax \pm b = c$ gar nicht ändern, nur die Figuren würden sich etwas anders gestalten; so müßte in der ersten Figur die Linie *ao* eine in *h* gebrochene statt eine gerade sein. — Es ist übrigens wohl möglich, daß erst die späteren Mathematiker der Araber (vom 12. Jahrh. an) erkannt haben, daß für Gleichungen von der Form $ax = b$ das „Verfahren mit der angenommenen Zahl" oder, wie IBN EL-BENNĀ und EL-QALAṢĀDĪ es nennen, „das Proportionsverfahren" zur Auflösung ausreicht. Auseinandersetzungen darüber, in welchen Fällen *eine* Substitution genügt, und in welchen *zwei* angenommen werden müssen, haben wir bis jetzt bei keinem der uns bekannten arabischen Mathematiker gefunden, auch IBN EL-BENNĀ und EL-QALAṢĀDĪ sprechen sich hierüber nicht aus; erst der persische Verfasser der Abhandlung III scheint darüber ziemlich im klaren gewesen zu sein (vgl. unten Komm. zu III).

Immerhin steht die Abhandlung QOSṬĀS wesentlich höher als diejenige ABŪ SA'ĪDS, und des letzteren „Verbesserung" kann sich kaum auf die Arbeit QOSṬĀS beziehen, die ABŪ SA'ĪD wahrscheinlich nicht gekannt hat. QOSṬĀ versucht übrigens auch, die Richtigkeit der Regel der beiden Fehler rein arithmetisch zu begründen, was ihm allerdings nicht ganz gelungen ist; vielleicht ist aber auch das Manuskript an dieser Stelle verdorben. Der Gedankengang des arithmetischen Beweises scheint folgender zu sein.

Zuerst wird auf leichtverständliche Weise gezeigt, daß man zu der zweiten angenommenen Zahl 8 noch $5\frac{1}{3}$ addieren muß, um die richtige Lösung zu bekommen, dann werden folgende Schlüsse gemacht: Wenn man den ersten Fehler 7 mit der zweiten angenommenen Zahl 8 multipliziert, so erhält man 56, und teilt man dies durch 3 (Differenz der

beiden Fehler), so bekommt man $18\frac{2}{3}$, d. h. $8 + 2 \cdot 5\frac{1}{3}$ [1]), das richtige Resultat soll aber $13\frac{1}{3}$, d. h. $8 + 5\frac{1}{3}$ sein, wir haben also $5\frac{1}{3}$ zuviel; dieses zuviel verschwindet nun, wenn man das Produkt aus dem zweiten Fehler 4 mit der ersten angenommenen Zahl 4, geteilt durch die Differenz 3 der beiden Fehler, d. h. $5\frac{1}{3}$, von $18\frac{2}{3}$ abzieht; dies kann aber auch dadurch erhalten werden, daß man von dem Produkte $7 \cdot 8$ das Produkt $4 \cdot 4$ abzieht, und die Differenz durch 3, d. h. die Differenz der beiden Fehler dividiert. Es treten also hier, um uns der heutigen Bezeichnungsweise zu bedienen, folgende identische Ausdrücke für die gesuchte Größe x auf:

$$\alpha_2 + \frac{(\alpha_2 - \alpha_1) f(\alpha_2)}{f(\alpha_1) - f(\alpha_2)} = \frac{\alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_1) - f(\alpha_2)} - \frac{\alpha_1 f(\alpha_2)}{f(\alpha_1) - f(\alpha_2)} = \frac{\alpha_2 f(\alpha_1) - \alpha_1 f(\alpha_2)}{f(\alpha_1) - f(\alpha_2)},$$

in unserem speziellen Falle also:

$$8 + \frac{4 \cdot 4}{3} = \frac{8 \cdot 7}{3} - \frac{4 \cdot 4}{3} = \frac{8 \cdot 7 - 4 \cdot 4}{3}.$$

Zu II. Diese Abhandlung über die Regel der beiden Fehler bietet nur insofern ein Interesse dar, als sie versucht, die Fälle auseinanderzuhalten, in denen die Regel zum Ziele führt, oder in denen sie nicht angewandt werden kann. Aber die Unterscheidung ist keine vollkommene, und die Begründung, warum sie in Gleichungen von der Form $(x + a)^2 = b$ nicht zum Ziele führt, ist nach unseren Begriffen mißlungen. Algebraische Beweise kannten eben die Araber noch nicht, und solche mit Worten zu umschreiben, war besonders in diesem Falle nicht leicht. Was der Verfasser sagen wollte, ist nach unserer modernen Ausdrucksweise etwa folgendes: Die gesuchte Zahl darf nur mit konstanten Größen multipliziert werden, nicht mit Ausdrücken, in denen sie selbst wieder vorkommt; aber dies richtig zu begründen, ging über seine Kräfte; er meint, der Fragesteller multipliziere in dem Beispiel $(x + 3)^2 - 5 = 20$ das $x + 3$ wieder mit $x + 3$, der Antwortende aber, der irgendeine Zahl α für x angenommen habe, multipliziere es mit $\alpha + 3$. Er hätte hier natürlich, wenn er sich richtig ausdrücken wollte, sagen sollen, der Antwortende multipliziere $\alpha + 3$ mit $\alpha + 3$, aber auch damit wäre selbstverständlich noch nichts begründet gewesen.

Zu III. Diese persische Abhandlung über die Regel mit der angenommenen Zahl oder mit *einem* Fehler bildet einen Zusatz zu den beiden vorhergehenden und ist wahrscheinlich von dem Veranstalter der ganzen Sammlung, dem MOLLÂ AḤMED B. SOLEIMAN selbst verfaßt, da sein Name am Anfang und am Ende der Abhandlung steht. Der Verfasser gibt die Fälle richtig an, in denen *eine* angenommene Zahl genügt; doch läßt seine

1) Aus dieser Schreibweise könnte man den Schluß ziehen, daß der Verfasser der Ansicht gewesen sei, der Überschuß über α_2 sei immer das Doppelte der noch abzuziehenden Größe, was ja natürlich nur der Fall ist, wenn $\alpha_2 = 2\alpha_1$ ist.

Ausdrucksweise auch an Klarheit zu wünschen übrig; es mag freilich der Text an einigen Stellen verdorben sein. Die Unbekannte wird auf drei verschiedenen Wegen erhalten: heißt die Gleichung $mx = n$ und nennen wir die für x angenommene Zahl α, so sind die drei Wege folgende:

$$1)\ x = \frac{n \cdot \alpha}{m\alpha} \qquad 2)\ x = \frac{\alpha}{m\alpha : n} \qquad 3)\ x = \frac{n}{m\alpha : \alpha}.$$

Aus dem Schlusse der Arbeit ersieht man, daß der Verfasser das Verfahren mit der angenommenen Zahl als identisch mit dem Proportionsverfahren erkannt hat. — Wir haben noch zu bemerken, daß die Benennung, die der Verfasser dieser Abhandlung dem Verfahren mit der angenommenen Zahl gibt, nämlich „Regel der Auffindung der Unbekannten mittelst *eines* Fehlers", eigentlich eine unrichtige ist; es wird nicht mit dem Fehler $n - m\alpha$, sondern nur mit dem Resultate der Einsetzung $m\alpha$ operiert.

Bis jetzt haben wir noch keine arabische Abhandlung über die Regel der beiden Fehler und das Verfahren mit der angenommenen Zahl getroffen, die uns in allen Teilen, namentlich in bezug auf den Beweis und die Unterscheidung der Fälle, in denen das eine oder das andere angewandt werden kann, ganz befriedigt hätte.

Il trattato delle coniche di Francesco Maurolico.

Di F. Amodeo a Napoli.

In una conferenza fatta due anni or sono intorno ai progressi della teoria delle sezioni coniche dai tempi di Apollonio fino a Simson[1]) avemmo l'occasione di rilevare l'importanza che aveva il piccolo trattato delle coniche che Francesco Maurolìco scrisse nel 1553 e pubblicò nel 1575. Esso è in ordine di data il secondo embrione di una trattazione delle sezioni coniche che si fece in Europa, e che segna nello stesso tempo un indirizzo nuovo in un'epoca in cui tutti erano entusiasti del trattato di Apollonio, che proprio in quel tempo si cominciava a tradurre direttamente dall'originale greco. La prima trattazione fu quella che Werner pubblicò nel 1522 in 34 pagine della raccolta degli scritti suoi, di cui il famoso Luca Alantsee volle essere l'editore, e che ora è divenuta una rarità bibliografica.[2]) La seconda è questa di Maurolìco. Il primo trattò in 22 proposizioni sole quelle proprietà della parabola e dell'iperbole che gli occorrevano per dilucidare le soluzioni da lui riunite del problema della duplicazione del cubo, e finiva col dimostrare la proposizione riguardante l'equivalenza di tutti i parallelogrammi inscritti fra l'iperbole e i suoi asintoti. Il secondo trattato, originato anch'esso da un bisogno pratico, quello di applicare le coniche alla *gnomonica*, sebbene anch'esso ristretto in piccolissimo numero di pagine (23 soltanto), è molto più ricco e più completo di quello di Werner ed ha avuta una non piccola influenza sulle ulteriori pubblicazioni. Nel tempo scorso fra le due pubblicazioni di questi minuscoli trattatini appariva l'opera di Dürer[3]), nella quale si mostrava la possibilità di ricavare la costruzione piana delle tre coniche dalla intersezione di un cono circolare retto con un piano mediante il metodo della

1) F. Amodeo, *I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson;* Annali del r. istituto tecnico di Napoli 1905, p. 19—69.

2) *Libellus super viginti duobis elementis conicis.* Per essa ci rimettiamo a quanto ne dice il Cantor a p. 456 delle *Vorlesungen über Gesch. der Mathem.* II².

3) A. Dürer, *Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt*... (1525).

Geometria descrittiva, che egli allora per la prima volta delineava.[1]) Ma questo metodo non fu compreso o fu dimenticato e non influì per allora sul progresso della teoria delle coniche. Invece il trattato di Maurolìco segnò un nuovo indirizzo per la rapida costruzione diretta delle coniche, indipendentemente dal cono, e ricavata come applicazione della teoria da lui ideata, indirizzo che fu subito seguìto e migliorato, e quindi si può ritenere che fu l'origine della spinta a tutta la trasformazione che in breve questa trattazione ebbe in Italia e in Francia. Uno di quegli che più mise in evidenza il merito di Maurolìco fu Giov. Alfonso Borelli, poiché nella introduzione al suo trattato, *Elementa conica Apollonii Pergaei nova et breviori methodo demonstrata*[2]), egli dice che Maurolìco escogitò *egregie dimostrazioni sulle linee tangenti e sugli asintoti delle coniche*, ed alla fine della prop. 32ª aggiunge che: „*Le proprietà delle tangenti delle sezioni coniche che Apollonio dimostrò con metodi astrusi e prolissi, con mirabile facilità Maurolico distese*"; e che egli ha cercato di imitare nella sua trattazione il genio di tanto uomo.

*

Il trattato di Maurolìco si può considerare come una raccolta delle varianti che egli ha apportate alla trattazione di Apollonio. Esso è contenuto nelle pagine 263—285 degli *Opuscula mathematica* dell'autore, che furono pubblicati a Venezia nel 1575, nello stesso anno della sua morte, che avvenne il 21 luglio 1575. Gli errori tipografici, le numerose abbreviazioni, le lettere mancanti o equivocate nelle figure ne rendono la lettura oltre ognimodo difficoltosa. È probabile che l'autore non abbia avuto il tempo o la possibilità di guardar le bozze e che l'incisore e il compositore non abbiano potuto comprendere e decifrare il manoscritto.

Il suo titolo è *De lineis horariis liber tertius*, poiché fa parte dell'opera *De lineis horariis*, della quale il 1° libro è dedicato a *D. Franciscum Santapacium Buterae Principem & Marchionem Lycodiae, Messanensium strategum*, ed i libri 2° e 3° sono dedicati ad *Joannem Vegam, Siciliae Proregem.* Alla fine dell'opera cioè del 3° libro, si trova la seguente notazione

In monasterio S. Maria
à parte 19. Julij die,
☿ 11. Indictionis,
1553

sulla quale già è stato fatto notare che lo stampatore avrebbe dovuto scrivere: *S. Maria à Partu* perché è nel convento di *S. Maria del*

1) F. Amodeo, *Albrecht Dürer precursore di Monge;* Atti della r accad. d. sc. di Napoli 13_2, 1907, n. 16 (16 p

2) Roma 1679, cfr. p. 3.

Parto che l'autore soggiornava quando si occupava della redazione di quest'opera.

* * *

Nella prefazione (p. 263—265) l'autore deplora che quelli che hanno scritto di gnomonica non conoscevano la dottrina delle sezioni coniche, e dice che avendo già egli avuta occasione nei due libri precedenti in riguardo alla descrizione delle linee orarie di dire qualche cosa intorno alle specie delle coniche, ai loro assi ed alle loro descrizioni, ora si propone di esporre quanto occorre a dilucidare quelle cose, cioè le proprietà dei diametri e degli asintoti e la costruzione delle diverse coniche, alcune cose citando dall'Apollonio, altre dimostrandole lui nel più facile modo che gli possa riuscire. Indi comincia con un paragrafo di definizioni e di elementi.

Dà la solita definizione di *superficie conica* e di *cono*, del *vertice*, dell'*asse*, della *base*; distingue il cono *retto* dallo *scaleno*; osserva che la sezione del cono con ogni piano condotto pel vertice è un triangolo; che ogni piano parallelo alla base lo sega secondo un cerchio, e dice a quale condizione deve soddisfare un piano non parallelo alla base perché possa segare il cono anche secondo circonferenze, *sezioni succontrarie;* (tutto ciò egli afferma in base alle proposizioni 3ª, 4ª, 5ª del libro I di Apollonio). Indi osserva che il triangolo per l'asse nel cono retto è sempre perpendicolare alla base, nello scaleno non sempre; ma in ogni caso la sua base è sempre diametro del cerchio base del cono. E che ogni piano che sezioni un triangolo per l'asse e determini sulla base del cono una corda o diametro perpendicolare alla base del triangolo, e non produca una sezione succontraria, o un triangolo, produce nel cono tre specie di curve che egli chiama con nome generico *Flexae;* e in ispecie *parabola* se l'intersezione del piano segante col triangolo per l'asse è parallela ad una generatrice del cono, *ellisse* se la detta sezione incontra tutti i lati del cono, *iperbole* se la detta sezione non è parallela né sega tutti i lati del cono.

Dopo di ciò accenna che la sezione del piano della curva col triangolo è sempre un diametro della curva *flexa;* poi definisce le *ordinate* del diametro, gli *assi*, i *vertici*, i *diametri coniugati* e conchiude che questo è in genere l'argomento del trattato delle coniche, e che egli passa ad esporre dei diametri e della descrizione delle coniche.

Segue quindi:

De Paraboles diametris & lineatione.

Caput 1. (p. 265—267.)

Egli conduce nel cono retto o scaleno un triangolo per l'asse abc (Fig. 1), e per un punto d della sua base tira df perpendicolare alla base ac nel piano della base del cono e de parallela ad ab nel piano del triangolo; seziona

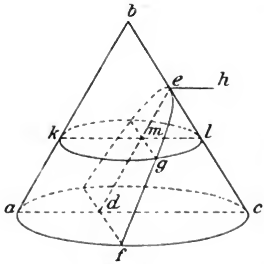


Fig. 1.

col piano edf il cono ed ottiene la parabola egf, di cui ed è un diametro ed fd è una ordinata di esso. E qui chiama in appoggio della sua asserzione la 11ª prop. del I libro di Apollonio. Conduce poi per un punto m del diametro la retta kml parallela ad ac, ed mg parallela a df, e qui risalta la gran diversità fra il metodo da lui escogitato e quello di Apollonio; poichè egli comincia col mostrare una costruzione semplicissima del *lato retto* (poi detto *parametro* da Mydorge) corrispondente al diametro ed, che egli chiama *retto diametro.*

La sua *regola 1ª* dice che il *retto diametro è il quarto segmento proporzionale in ordine ad* ed, dc, ad, e lo indica con eh. Sicché si ha[1])

$$ed : dc = ad : eh. \qquad (1$$

Indubbiamente questo è il primo passo felice da lui fatto verso una semplificazione della teoria delle coniche, e chi tiene presente il modo che Apollonio usò per introdurre il concetto di *parametro* (e che pure fu seguìto per 16 secoli) può rilevare tutto il vantaggio che presentava la regola data da Maurolìco per trovarlo.

Dopo di ciò dimostra la proprietà fondamentale della parabola che da Apollonio era stata dimostrata nella 11ª del I lib. E procede in questo modo:

Per il cerchio di base del cono si ha $fd^2 = ad \cdot dc$, e quindi per la (1, $fd^2 = ed \cdot eh$.

Per il triangolo edc si ha $ed : dc = em : ml$, e per la (1, $em : ml = ad : eh$, o anche $em : ml = km : eh$; ma pel cerchio kgl, $mg^2 = km \cdot ml$; dunque è pure $mg^2 = em \cdot eh$.

E bene che si sappia che noi seguiamo in questa esposizione per quanto è possibile fedelmente il pensiero dell'autore, facendo però uso delle nostre notazioni abituali, per risparmiare al lettore la fatica dell'interpretazione; e che le figure corrispondono perfettamente a quelle del testo, ma sono fatte con accuratezza un poco maggiore che nel testo.

Sol chi tiene presente la dimostrazione di Apollonio, e il giro tortuoso di essa, può apprezzare la grande semplicità racchiusa nella dimostrazione di Maurolìco, che nonpertanto mi è stata per molto tempo difficile di capire, tanto bisognava indovinarne il pensiero nelle abbreviazioni da lui usate.

1) Egli scrive la proporzione nel seguente modo: *sicut* $ed - dc$ *sic* $da - eh$.

Come corollario deduce che $fd^2 : mg^2 = ad : em$ (20ª del I lib. di Ap.), cioè che *i quadrati delle ordinate della parabola stanno come le ascisse.*

Dopo ciò enuncia la *regola 2ª* per trovare il *retto diametro* di un diametro qualunque di una parabola di cui si conosca un ordinata ed un'ascissa *fd*, *de;* e consiste nel trovare il terzo segmento proporzionale in ordine ad *ed* ed *fd.*

Poi con la *regola 3ª* insegna a trovare un diametro di una conica qualunque già disegnata, congiungendo i punti medii di due corde parallele.

Indi con la *regola 4ª* insegna a trovare l'asse di una parabola (già descritta), col cercare prima un diametro, eppoi tirando pel punto medio di una corda ad esso perpendicolare la parallela al diametro. Da questa regola deduce che nella parabola l'asse e i diametri sono fra loro paralleli, appoggiandosi alla 46ª del I lib. di Ap.

Infine insegna colla *regola 5ª* a descrivere una parabola di cui si conosca un diametro *ac* e il suo parametro *ab* (e non cura di avvertire espressamente che quando si tratti di un diametro qualunque, e non dell'asse, occorre indicare la direzione della ordinata).

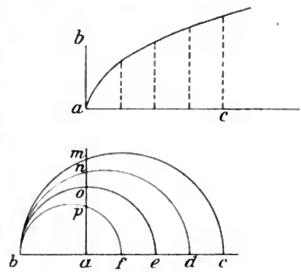


Fig. 2.

La sua regola consiste (Fig. 2) nel cercare le ordinate corrispondenti alle diverse ascisse della parabola, mediante la media proporzionale fra il parametro *ab* e l'ascissa voluta, e tutta la costruzione è riassunta nella descrizione delle semicirconferenze dei diametri *bc*, *bd*, *be*, *bf* tutte fra loro tangenti in *b*, ciascuna delle quali, avendo per diametro la somma del parametro e dell'ascissa, sega sulla perpendicolare elevata in *a* al diametro l'ordinata corrispondente all'ascissa. Così le ordinate corrispondenti alle ascisse *ac*, *ad*, *ae*, *af*, sono ordinatamente *am*, *an*, *ao*, *ap*. Osserva infine che i semicerchi sono tutti fra loro tangenti; e che in tal modo si ha il mezzo di costruire le parabole negli orologi solari.

De Ellipseos diametris & lineatione.
Caput 2. (p. 267—270.)

Per l'ellisse, supposto essere *abc* un triangolo per l'asse (Fig. 3), e *cq* la tangente in *c* alla circonferenza della base e *d* un punto qualunque del lato *ab*, egli conduce il piano *cdq* e dichiara che, per la 13ª del I lib. di Ap., ottiene per sezione l'ellisse, che ha per diametro *cd*, e per centro il punto *h* medio di *cd*, qualora la sezione *cdq* non sia una sezione succontraria.

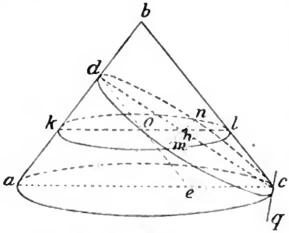


Fig. 3.

La parallela condotta per h a cq è il diametro coniugato a cd, e qualora il cono sia retto, oppure qualora, essendo scaleno il cono, sia il triangolo abc perpendicolare alla base, cd sarà perpendicolare ad mn e perciò sarà l'asse primario dell'ellisse.

Ciò premesso egli si propone di trovare con la *regola 1ª* la lunghezza del secondo diametro mn, cioè si propone di dimostrare che se per d si conduce de parallela a bc e si cerca il segmento medio proporzionale fra ac e ce, questo sarà eguale al diametro mn coniugato a cd. Conduce a tal uopo per h la retta kl parallela ad ac e per le due rette perpendicolari kl, mn conduce il piano ed ottiene con esso per sezione del cono una circonferenza che passa per m ed n e quindi $mh^2 = kh \cdot hl$, da cui si deduce che $(2mh)^2 = 2kh \cdot 2hl$. Ma $2mh = mn$, $2kh = ac$, $2hl = ec$, quindi $mn^2 = ac \cdot ce$.

Osserva pure che se o è il punto $de \cdot kl$, si può trovare il semidiametro mh, cercando il medio segmento proporzionale fra hk ed ho.

Passa poi alla *regola 2ª*, colla quale si propone di trovare di un'ellisse, di cui sia dato un diametro cd ed un'ordinata rs, il diametro coniugato al primo ed il parametro. Anche qui egli mostra quanta semplificazione era stato capace di trovare nella trattazione delle coniche col far vedere con quanta maggiore semplicità (rispetto al metodo di Apollonio) egli propone di determinare il parametro relativo ad un qualunque diametro dell'ellisse. Ma qui addirittura è stato necessario indovinare tutto, poiché la figura non contiene che tre lettere esatte e le altre o mancanti o sbagliate.

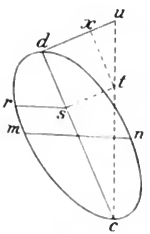


Fig. 4.

In ordine a ds ed sr trova la terza proporzionale st (Fig. 4) sicché $rs^2 = ds \cdot st$; e questa st la tira in s perpendicolarmente a cd. Indi congiunge ct e trova il punto u in cui essa incontra la perpendicolare condotta in d alla cd. Sarà du il parametro cercato, perché conducendo per t la parallela a ds, e sia tx, i triangoli txu, cdu risultano simili, e la relazione $rs^2 = ds \cdot st$, dice appunto che il quadrato dell'ordinata è equivalente al rettangolo sx applicato all'ascissa sd e contenuto nel triangolo cdu. Quindi per la 13ª del I lib. di Ap. du è il parametro. Da ciò deduce che posto

$$cd : mn = mn : du$$

sarà mn il secondo diametro dell'ellisse.

La *regola 3ª* riguarda il problema: *Trovare il centro di una ellisse descritta.* Si cerchino della ellisse due diametri con la regola 3ª del cap. precedente, se h è il loro punto d'incontro esso sarà il centro della curva (conformemente alla 45ª del II lib. di Ap.).

La *regola 4ª* riguarda il problema: *Data l'ellisse (descritta) cercarne gli assi.* Prima fa cercare il centro h, indi col centro h e con un raggio adatto fa costruire una circonferenza che seghi in r, t l'ellisse, poi fa tirare la corda rt, e fa congiungere il punto medio di essa s con h, sarà sh un asse perché divide perpendicolarmente per metà la corda rt (e cita la prop. 47ª del II lib. di Ap.). Indi annunzia che la stessa regola serve egualmente per l'iperbole. Aggiunge poi che la perpendicolare condotta in h a ed è il secondo asse dell'ellisse.

La *regola 5ª* riguarda la costruzione dell'ellisse. Si propone di *costruire l'ellisse di cui si conosca un diametro* ab *ed il parametro* af *relativo ad esso* (Fig. 5).

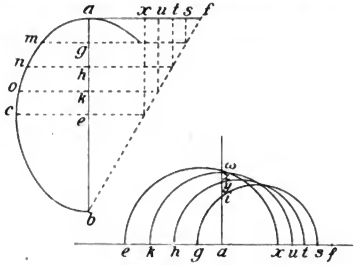


Fig. 5.

Sia e il punto medio di ab (centro dell'ellisse), x punto medio di af, divide ae ed xf in egual numero di parti eguali. Indi cerca con una costruzione concentrata nella fig. 5, in basso, le medie proporzionali fra ae ed as, fra ak ed au, fra ah ed at, fra ag ed as e queste le ottiene nei segmenti $a\omega$, az, ay, ai. Questi segmenti sono le ordinate rispondenti alle ascisse ae, ak, ah, ag e con ciò egli ottiene i punti c, o, n, m. Fatta passare per questi punti una curva si ha un quarto dell' ellisse, e questo sarà tanto più esatto per quante più numerose sono state le divisioni fatte. Ed egli nota che infatti il quadrato di ciascuna delle ordinate ec, ko, hn, gm, è equivalente al rettangolo corrispondente applicato fra il diametro e il parametro. Osserva che i semicerchi da costruire sono tutti ineguali e ciascuno sega tutti gli altri; ed infine che si ha in tal modo il mezzo da costruire l'ellisse negli orologi solari.

De Hyperboles diametris & lineatione.

Caput 3. (p. 271—273.)

Come sempre sia abc il cono di cui la base circolare sia ac e b il vertice (Fig. 6), e sia de la retta del piano di questo triangolo per cui si conduce il piano segante, che incontri in f il prolungamento del lato ab,

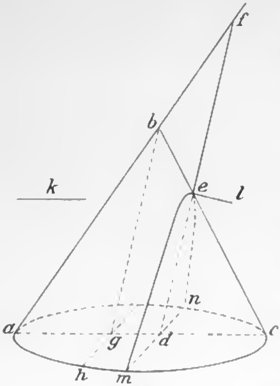


Fig. 6.

ed in mn la base ac perpendicolarmente al diametro ac. Sia men l'iperbole ottenuta. Di esso ef è il diametro trasverso. Nel caso che mn e de siano fra loro perpendicolari sarà df l'asse dell'iperbole.

Ciò premesso espone la *regola 1ª* con la quale vuol *cercare il parametro relativo al diametro ef.*

Egli dice: per b si conduca la parallela bg ad ed e per g la perpendicolare gh ad ac, si avrà $gh^2 = ag \cdot gc$, e se trovasi il terzo segmento proporzionale k in ordine a bg e gh, si avrà $bg : gh = gh : k$. Ora si ponga $bg : k = ef : el$ sarà el il parametro di ef, e ciò egli dice per la 12ª del I lib. di Ap.

Il che è evidente, perché se si elimina k fra le due ultime proporzioni si ha $bg^2 : gh^2 = ef : el$, ovvero $bg^2 : ag \cdot gc = ef : el$.

Non si può mettere in dubbio che questo modo semplicissimo di ricercare il parametro dava la spinta ad una brillante trasformazione della teoria.

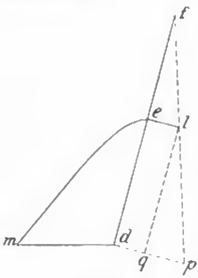


Fig. 7.

Con la *regola 2ª* si propone di: *Ricercare una costruzione piana del parametro relativo al diametro ef* dell'iperbole me di cui un'ordinata è md (Fig. 7).

Egli dice: si cerchi il terzo segmento proporzionale in ordine ad ed e dm, $ed : dm = dm : dp$, si avrà $dm^2 = ed \cdot dp$. Su una perpendicolare al diametro ed in d, taglia il segmento dp, congiunge f con p e cerca il punto l ove questa fp incontra la perp. condotta in e ad fd. Sarà el il parametro cercato per la 12ª del I lib. di Apollonio, perché md^2 è equivalente al rettangolo edp applicato all' ascissa ed e ad el.

Con la *regola 3ª* trova, in modo analogo a quello usato per le altre due curve, il centro dell'iperbole, ed osserva che nella parabola i diametri sono paralleli, nell'ellisse si segano nell'interno, nell'iperbole si segano all' esterno della curva.

Con la *regola 4ª* trova gli assi dell'iperbole in modo analogo a quelle usato per l'ellisse.

Con la *regola* 5ª si propone di: *Costruire una iperbole di cui sia dato un diametro* ab *e il suo parametro* af. (Fig. 8.)

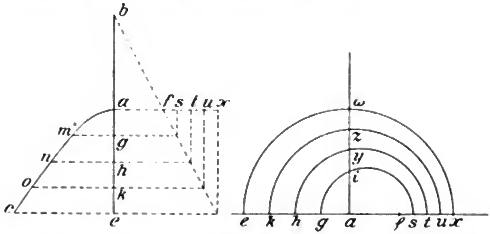


Fig. 8.

Cerca la quarta proporzionale in ordine ad ab, af, ae e sia fx, e divide ae ed fx in egual numero di parti eguali, l'una con i punti g, h, k, l'altro con i punti s, t, u, indi trova con una costruzione concentrata nella fig. 8 a dritta le medie proporzionali fra ae ed ax, fra ak ed au, fra ah ed at, fra ag ed as, e queste le ottiene nei segmenti $a\omega$, az, ay, ai. Questi segmenti sono le ordinate corrispondenti alle ascisse ae, ak, ah, ag e così ottiene i punti c, o, n, m. Fatta passare per questi punti e per a una curva si ha una parte dell' iperbole, la quale sarà tanto più precisa per quanto più numerose sono state le divisioni. Per dimostrare ciò egli nota che i quadrati di queste ordinate sono equivalenti ai rettangoli applicati fra il parametro e la relativa ascissa. Osserva infine che le semicirconferenze sono l'una interna all'altra e non concentriche; ma diventano concentriche se il semidiametro dell'iperbole e il parametro sono eguali; e che con la stessa costruzione si può anche disegnare l'iperbole contrapposta alla data.

De tangentibus atque secantibus conicas sectiones.

Caput 4. (p. 273—277.)

Qui cita le prop.[i] 17 e 18 del I lib. di Ap. riguardanti la proprietà delle tangenti ad una conica di esser parallele alle ordinate del diametro che passa per il punto di contatto. Quindi cita le prop.[i] 24, 25, 26, 27, 29 del I lib., e le prop.[i] 13, 16, 33, le prime delle quali riguardano le intersezioni delle coniche o di qualche loro diametro con alcune speciali tangenti o trasversali, e le altre riguardano il numero delle intersezioni di un'iperbole con rette parallele ad un asintoto oppure a nessuno dei due.

Poi enuncia due conseguenze delle prop.[i] 20 e 21 del I lib. di Apollonio, che riguardano:

1. il rapporto costante del quadrato di un'ordinata della parabola al quadrato della sua corrispondente ascissa;
2. nell'ellisse, nel circolo e nell'iperbole il rapporto costante del quadrato di un'ordinata al rettangolo dei segmenti che essa determina sul corrispondente diametro.

Ciò premesso egli passa ad esporre due lemmi:

1. *Per un punto preso nell'interno di un angolo si può tirare un segmento fra i lati che sia bisecato dal punto.*
2. *Una qualunque ordinata di una sezione conica di un cono può essere diametro di un circolo o di un'ellisse ottenuta nello stesso cono* (che è conseguenza del precedente).

Riunite in tal modo tutte queste proposizioni a cui egli assegna i numeri I a X, passa a dare gli enunciati di altre cinque proposizioni che si propone di dimostrare diversamente da Apollonio. Sono queste le dimostrazioni che tanto entusiasmarono il Borelli, il quale le ha con elegante forma migliorate, abbellite e introdotte nel suo trattato[1]) nelle prop.i 30, 31, 32. Le esporrò qui nel più breve modo possibile.

XI. *Se da un punto e di un diametro di una parabola si conduce una tangente alla curva e dal punto di contatto si tira l'ordinata al diametro, il segmento del diametro compreso fra il punto e e l'ordinata è bisecato dalla curva.*

Laddove Ap. per dimostrare questa prop (35 del I lib.) usa il metodo indiretto, egli ne fa una dimostrazione diretta ricavata dal cono, dicendo:

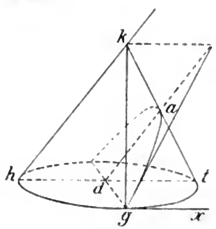


Fig. 9.

Sia hkt il triangolo per l'asse del cono (Fig. 9), da parallela ad hk e dga la parabola ottenuta, che abbia da per diametro dg per ordinata, conducendo per d la retta ht che sia bisecata in d, si avrà in hgt un'ellisse che ha dg per diametro coniugato ad ht, e quindi la tangente gx all'ellisse è parallela ad ht. Condotta indi per k la parallela ad ht che sia segata in e dal diametro da, il piano kgx tangente al cono, contiene ke e quindi la retta eg è tangente alla parabola in g. Ma per essere d punto medio di ht, anche a è punto medio di de e perciò la proposizione è dimostrata.

XII. Da questa proposizione deduce la reciproca, cioè che se $ad = de$, la retta eg è tangente alla parabola, cioè quella che Ap. dimostrava anche per assurdo nella 33a del I lib.

1) Cfr. op. cit.

XIII. Con lo stesso metodo dimostra che: *Se da un punto* e *di un diametro del circolo dell'ellisse o dell'iperbole si conduce una tangente alla curva e pel punto di contatto si tira l'ordinata il rapporto delle distanze del piede dell'ordinata agli estremi del diametro è eguale al rapporto delle distanze di* e *dagli stessi estremi* (Non usa di dire che i quattro punti formano un gruppo armonico).

Ora si proietterebbe (Fig. 10) il gruppo $htd\infty$ da k su de e la dimostrazione sarebbe fatta. Egli invece tira per a la retta ml parallela ad hk che incontra in m la retta ht, ed in l la retta ke, e dice

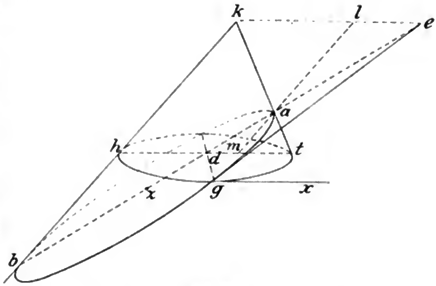


Fig. 10.

per i triangoli simili bdh, dam si ha $bd : dm = hd : dm$,

" " " ake, atd " " $dt : dm = ke : el$,

" " " bke, ale " " $ke : el = be : ea$,

dunque $be : ea = bd : da$.

E conchiude che questa è la prop. 36ª del I lib. di Ap. che questi dimostra per assurdo, e che è simile alla 37ª del III lib. qualora invece di parlare di diametro si parli di una trasversale qualunque condotta per e, e che lo stesso avviene per la parabola. Egli qui non dice altro; fu invece il Borelli che fece la dimostrazione generale con lo stesso metodo.

XIV. Nota che la reciproca della precedente dimostrazione si può facilmente dimostrare per assurdo con lo stesso metodo, ed è questa prop. che è contenuta nella 34ª del I lib. di Ap. Insiste ancore sulla bontà delle sue dimostrazioni relativamente a quelle di Ap. e conchiude coll'enunciare soltanto la XV: che nel circolo, nell'ellisse e nell'iperbole se z è il centro, i tre segmenti dz, zb, ze sono continuamente proporzionali, e questa corrisponde alla 37ª del I lib. di Ap.

De coniugatis diametris flexarum, deque tangentibus flexas lineis ducendis.

Caput 5. (p. 277—279.)

Questo capitolo è una raccolta di regole pratiche per la costruzione di diametri coniugati e di tangenti. Manca del tutto la *regola 1ª*. Dopo

aver constatato che nella parabola non esistono diametri coniugati, e che nella circonferenza ogni diametro è perpendicolare al suo coniugato; egli si propone *(regola 2ª)* di trovare il diametro coniugato ad un diametro dell'ellisse (e ciò esegue mediante una corda parallela al diametro); poi *(regola 3ª)* di costruire il diametro coniugato ad un diametro dell'iperbole; poi *(regola 4ª)* di costruire la tangente all'ellisse ed all'iperbole in un suo punto, mediante la parallela al diametro coniugato a quello che passa per quel punto; poi *(regola 5ª)* di costruire la tangente in un punto della parabola, di cui si conosca l'asse; poi *(regola 6ª)* di costruire nella parabola l'ordinata che passa per un punto relativa ad un determinato diametro (mediante la parallela condotta pel punto alla tangente nell'estremo del diametro); poi *(regola 7ª)* applica la regola precedente a costruire la tangente nello stesso punto; poi *(regola 8ª)* si propone di costruire una tangente alla parabola condotta da un punto esterno (mediante il diametro passante pel punto). In seguito per l'ellisse e per l'iperbole insegna a costruire *(regola 9ª)* l'ordinata relativa ad un dato diametro che passa per un punto della curva (mediante la parallela al diametro coniugato al dato); poi *(regola 10ª)* la costruzione di una tangente dell' ellisse che passa per un punto *e* esterno alla curva (mediante il diametro che passa pel punto *e* e la costruzione dell' ordinata corrispondente al punto di contatto); poi *(regola 11ª)* insegna la costruzione dell'analogo problema per l'iperbole, avvertendo che se il punto *e* non è fra il centro dell'iperbole e la curva il problema è impossibile. (Si ricordi che per lui ancora l'iperbole era costituita da un solo ramo.)

De Non tangentibus contrapositarum.

Caput 6. (p. 280—283.)

Questo è il nome che Maurolico dà agli asintoti dell'iperbole. Egli si propone di far vedere che diversamente da Apollonio si possono brevemente dimostrare le proprietà degli asintoti, e che essi si possono costruire direttamente sul cono.

Egli dice che gli asintoti sono due rette del piano dell'iperbole che si segano nel centro dell'iperbole e che tendono ad avvicinarsi all'infinito alla periferia dell'iperbole senza però segarla. *Sunt enim Non tangentes, duae rectae lineae se invicem in centro contrapositarum hyperbolarum secantes et utrinque semper magis ac magis in infinitum periferiis approximantes, nunquam vero coincidentes.*

La costruzione da lui ideata si può col nostro linguaggio riassumere in brevi parole.

Per il vertice *f* del cono (Fig. 11) si tiri il piano *ifb* parallelo a quello che nel cono ha determinato la iperbole, e dell'intersezione di esso con la

base del cono si trovi il polo *d*, si proietti dal punto *d* la coppia di generatrici *fi*, *fb* del cono sul piano dell'iperbole e si avranno due rette *mr*, *ms*, che si segano nel centro della curva e sono gli asintoti dell'iperbole.

La dimostrazione ne è attualmente evidente; poiché il gruppo armonico *cade* è proiettato da *f* sull'iperbole nel gruppo armonico *lnm* ∞, quindi *m* è punto medio del diametro *ln* e perciò è il centro della curva; e le rette *mr*, *ms* passando per *m* e per i punti all' ∞ dell'iperbole sono appunto gli asintoti.

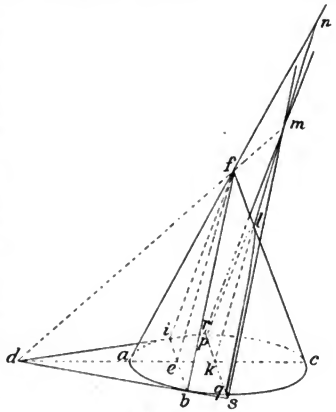


Fig. 11.

Ma il Maurolico, premesso un lemma di geometria elementare, fa due dimostrazioni sufficientemente lunghe, una diretta, l'altra indiretta, ma l'una più complicata e difficile dell'altra, e che comprendono due pagine intere (281—283) che è quanto dire, sicché non ritengo che valga la pena di seguirlo nella scabrosa strada.

L'interessante è appunto il sapere come egli abbia ideato pel primo un modo semplicissimo di costruire direttamente gli asintoti, e diversamente da ciò che per tanti secoli si era seguìto.

Termina col considerare il caso che il piano *ifb* passi pel centro della base del cono, per dimostrare che anche in questo caso le sue dimostrazioni reggono.

Anche in questo il Borelli fu fedele a Maurolico, ed anche lui si dilunga molto per dimostrare questa proposizione.[1])

Quod parallelogramma inter Non tangentes et periferiam locata sunt invicem aequalia: quodque tam tangentis sectionem à tactu, quam secantis eandem à periferia ad Non tangentes, recepta segmenta sunt aequalia.

Caput 7. (p. 283—285.)

Il contenuto di quest'ultimo capitolo è tutto spiegato nel titolo; qui suppone che la retta *bei* della fig. precedente sia un diametro della base

1) Cfr. op. cit. p. 71, prop. 43.

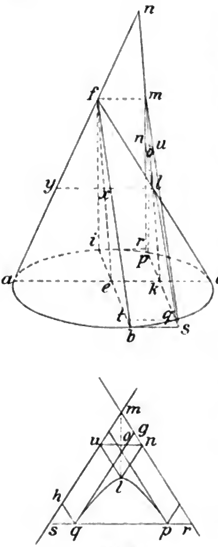


Fig. 12.

del cono (Fig. 12); da ciò deriva che le tangenti bs, ir risulteranno parallele fra loro ed alla retta fm condotta pel vertice; suppone anche che il piano rms che produce l'iperbole ed il piano ifb ad esso parallelo siano perpendicolari alla base del cono, e che inoltre i due triangoli afc, ifb siano isosceli ed eguali fra loro, sicché l'angolo afc risulta eguale all'angolo degli asintoti dell'iperbole (in breve egli suppone che il cono sia retto).

1° teor. Fra gli asintoti e la curva descrive due parallelogrammi (qui occorre tener presenti le due figure descritte affianco) comprendenti lo stesso angolo m, e sono l'uno $mnlu$ formato dagli asintoti con le due parallele ad essi condotte dal vertice l della curva, l'altro $qgmh$ formato invece colle parallele condotte dal punto q; ed afferma che questi due parallelogrammi sono equivalenti (egli dice eguali).

Infatti, si conduca nel primo parallelogramma la diagonale nu e sia o il suo centro; si conduca pel vertice l la parallela lxy al diametro ac della base del cono e sia x il punto suo d'incontro con l'asse fe; e per q si conduca qt parallela ad lx e sia t il punto in cui essa incontra la base be. Poiché il cono è retto il triangolo fly è simile al triangolo mnu e il rapporto dei loro lati è 2, perché fx è perpendicolare ad ly ed è doppia di mo; quindi $nu = lx$.

Ma pel cerchio base del cono $bt:tq = tq:ti$, quindi $sq:nu = nu:qr$, dunque i triangoli simili sqh, mnu, qrg danno pure $qh:mn = mn:rg$ $(= qg)$; e perciò i parallelogrammi $mnlu$, $mgqh$ sono equivalenti, essendo $mn = um$.

Da ciò deriva che il parallelogramma $mnlu$ è equivalente pure al parallelogramma mp, e quindi i parallelogrammi mq, mp sono equivalenti fra loro. E con ciò dimostra il teorema.

Deduce in seguito come corollario che il rettangolo di due lati di uno di questi parallelogrammi è equivalente al rettangolo dei due lati di un altro analogo parallelogramma (12ª del II lib. di Apollonio).

2° teor. Vuole in seguito dimostrare che $sq = lr$ cioè la 8ª del II lib. di Ap. (Fig. 13).

Qui ora fa uso della sola figura piana e dice: Essendo i parallelogrammi *mnlu*, *mgqh* fra loro equivalenti, risultano equivalente i parallelogrammi *golu*, *noqh*, e quindi $no:og = ol:oq$, cioè $mg:mn = ol:oq$. Ma per i triangoli simili *shq*, *qol* si ha pure $ol:oq = hq:hs$, quindi $mg:mn = hq:hs$; e per i triangoli simili *lur*, *sqh*, $mg:mn = hq:hs = ur:ul$; e poiché $mg = hq$, $mn = ul$, i triangoli *mgn*, *hqs*, *url* sono eguali fra loro e quindi $sq = lr$. Si serve di questo teorema per dimostrare che il segmento di una tangente compreso fra gli asintoti di un'iperbole è bisecato dal punto di contatto, cioé che $hz = zu$ (Fig. 14). Si conduca, egli dice, il diametro *mzk* pel punto di contatto della tangente, e per *k* la parallela *sr* alla tangente. Si ha $qk = kl$, quindi $sk = kr$, e per la proporzione $sk:kz = hz:zu$, si ha pure $hz = zu$. Cosi egli si serviva della 8ª prop. per dimostrare la 3ª del II lib. di Ap.

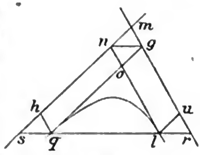


Fig. 13.

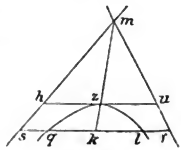


Fig. 14.

* * *

Con questo teorema ha fine il trattato di Maurolìco, ed ecco in breve esposto quanto questo matematico aveva saputo addensare nelle sue poche pagine. Non era solo una raccolta di regole per facilitare la costruzione degli orologi solari che egli presentava, ma un esempio di quante migliorìe si potevano apportare al trattato di Apollonio, se si avesse voluto imprendere a rifare tutto da capo. Egli dunque ammiratore e studioso di Apollonio, dà pel primo il segnale di una trasformazione completa della teoria generale delle coniche. E se diciamo che questo succedeva 18 secoli dopo che il trattato di Apollonio era stato creato, ciò non farebbe molto onore alla mente umana, né a Maurolìco in ispecie. Ma noi dobbiamo tener conto che questa scienza da Apollonio in poi, prima stette immobile, e poi decadde, e che il pensiero geometrico, tenutosi desto alquanto attraverso il popolo arabo, aveva invece fatti dei passi a ritroso fino quasi ad annientarsi in Europa; e che questo pensiero rinasceva appena da quando le opere originali greche affluirono da Constantinopoli nell'occidente dell'Europa e specialmente in Italia. Quindi si può dire che era appena un secolo che la *struttura* geometrica si era rinnovellata nel pensiero umano, e questa rifazione avveniva in un cervello nato dall'innesto della razza greca con la italiana. Cosi considerando il fenomeno si può avere un concetto della grande importanza che ebbe. Importanza

che si può anche misurare dalle conseguenze; poiché dopo un altro tentativo di modificazione di concetti sulle coniche fatto da Kepler, noi troviamo che Mydorge raccolse il pensiero di Maurolìco e pubblicó nel 1631 pel primo un trattato completo, che ristampò nel 1639, come contrapposto all'opera Apolloniana e in considerazione delle nuove esigenze dei tempi.[1]) In questo trattato egli adotta le costruzioni delle coniche ideate da Maurolìco (senza citarne l'autore), e ne fa il caposaldo dell'opera sua, anzi si può dire che tutto il trattato risente del profondo studio fatto delle poche pagine del nostro autore, e lo imita anche specialmente nel fare continuamente il paragone dell'opera sua con quella di Apollonio. Altro imitatore trovò Maurolìco anche in Cavalieri, che nel trattato che publicò nel 1632, e poi fu ripubblicato nel 1650 anch'egli adotta le sue costruzioni delle coniche[2]) (anche senza citarne però l'autore) e accenna in pochi tratti all'applicazione delle coniche agli orologi solari. Ma quegli che più di tutti seppe seguire le tracce di Maurolìco nel rifare la trattazione completa delle coniche fu Giovanni Alfonso Borelli, che la seppe riassumere tutta e splendidamente in 63 proposizioni soltanto.

Per mettere in rilievo tutto il merito di Maurolìco nella scienza delle coniche occorrerebbe anche far l'analisi delle costruzioni delle coniche per inviluppo di tangenti che si trovano nel *Liber primus de lineis horariis* e analizzare quanto ha egli contribuito con la tentata divinazione del 5° e 6° libro del trattato Apolloniano, ma già il presente lavoro è sufficientemente lungo e perciò rimandiamo ad altro tempo la continuazione di questo studio, se altri non avrà intanto preceduto il nostro esame.

---

1) *Claudii Mydorgii Catoptricorum et dioptricorum: sive conicorum operis ad abdita radii reflexi . . . Libri quatuor priores*, Paris 1639.

2) *Lo specchio ustorio ovvero trattato delle sezioni coniche ed alcuni loro mirabili effetti intorno al lume, caldo, freddo . . . di Bonaventura Cavalieri*, Bologna 1632.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1³ : 12, 15, 22, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 61. — **1³ : 33,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 307. — **1³ : 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 61—64. — **1³ : 163—165,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1³ : 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 64—65. — **1³ : 202,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 307—309. — **1³ : 203,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 65, 309. — **1³ : 213, 225, 236, 245,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 65.

1³ : 257. Die bestimmte Form der Angabe: „Theophrastus von Lesbos ... [hat], wie im 4. Kapitel erzählt worden ist, historisch-mathematische Schriften angefertigt“, muß beanstandet werden. Im vierten Kapitel steht nur (S. 118), daß Theophrastos solche Schriften „verfaßt haben soll“, und das ist auch das meiste, das man sagen kann. Noch besser wäre es zu bemerken, daß die zitierte Stelle bei Diogenes Laertius vermutlich auf andere Weise zu deuten ist, nämlich so, daß die drei von Herrn Cantor S. 118 angeführten historischen Arbeiten dem Eudemos zuzuweisen sind (vgl. P. Tannery, *La géométrie grecque* I, Paris 1887, S. 73). G. Eneström.

1³ : 270, 287, 297, 298, 310, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 66. — **1³ : 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 174—176. — **1³ : 351,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 66. — **1³ : 365, 368,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 177. — **1³ : 372, 374, 376,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S 411—413. — **1³ : 380,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 66—67. — **1³ : 388, 406, 409, 410,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 177—178. — **1³ : 429,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67.

1³ : 431. Es ist mir nicht recht klar, was Herr Cantor meint, wenn er (Z. 10—12) sagt: „Wir halten uns bei dieser Beschreibung etwas länger auf, weil die Benutzbarkeit der Tafel als Einmaleinstabelle einleuchtet“. Meint er, daß diese Benutzbarkeit der Tafel für uns, die wir jetzt leben, einleuchtend ist, so hat er natürlich recht, aber dann versteht man nicht den Sinn des Wortes „weil“. Darum scheinen die meisten Leser der *Vorlesungen* den Cantorschen Ausspruch so gedeutet zu haben, daß Nikomachos selbst die Benutzbarkeit der Tafel als Einmaleinstafel kannte (vgl. z. B. S. Günther, *Geschichte der Mathematik* I, Leipzig 1908, S. 136 Z. 26—27; J. Tropfke,

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

Geschichte der Elementar-Mathematik I, Leipzig 1902, S. 69 Z. 2—4), und in der Tat nennt Herr Cantor etwas später die Tafel des Nikomachos ganz einfach „die Einmaleinstabelle“ (S. 579) oder „die Einmaleinstafel“ (S. 755). Aber in diesem Falle ist die Cantorsche Angabe gewiß unrichtig. Schon G. Friedlein (*Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes,* Erlangen 1869, S. 78) hat ausdrücklich hervorgehoben, daß die Tafeln des Nikomachos und des Boëtius keine Unterstützungen beim elementaren Rechnen, sondern Übersichten von Zahlen von bestimmter Beschaffenheit sind. Diese Zahlen sind nach der Terminologie des Boëtius: „numeri multiplices“, „numeri superparticulares“, „numeri tetragoni“, „numeri longilateri“.

Da also der Passus: „Wir halten ... einleuchtet“ im besten Falle nichtssagend ist, so sollte er meines Erachtens gestrichen werden; statt desselben könnte man ja darauf hinweisen, daß die Tafel ganz wie eine Einmaleinstabelle aussieht obgleich sie einen anderen Zweck hat (vgl. BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 286).

G. Eneström.

1³:431, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1³:432,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1³:433, 452,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 179. — **1³:459,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 309—310. — **1³:464,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 179. — **1³:470,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S 311. — **1³:471,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 413. — **1³:476,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 71—72. — **1³:488,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1³:498,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180. — **1³: 500, 502,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1³:503—504,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180—181. — **1³:509, 510,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S 67.

1³: 512 Die Angabe (Z. 15): „die vorher gelehrte Methode muß jedenfalls nach des Verfassers Meinung die indische sein“ ist entweder unrichtig oder undeutlich. Über die Quadratwurzelausziehung bei Planudes berichtet Herr Cantor S. 511—512: „Nimm die Quadratwurzel der nächstniedrigen wirklichen Quadratzahl und verdoppele dieselbe; dann nimm von der Zahl, deren Wurzel du suchst, das gefundene nächstniedrige Quadrat weg, und dem Reste gib als Nenner die aus der Verdoppelung der Wurzel gefundene Zahl“. Es liegt also am nächsten, anzunehmen, daß „die vorher gelehrte Methode“ gerade die Bestimmung der Korrektion $\frac{A - [E(\sqrt{A})]^2}{2\,E(\sqrt{A})}$ bedeutet. Aber ohne Zweifel meint Planudes mit der indischen Methode in erster Linie die Methode zur Berechnung der ganzen Zahl $E(\sqrt{A})$, die er *ausführlich* gelehrt hat für den Fall, daß A eine mehrziffrige Zahl ist, und welche Methode wesentlich mit der unsrigen übereinstimmt. Dieser Umstand wird von Herrn Cantor gar nicht erwähnt, denn der Ausdruck: „Nimm die Quadratwurzel der nächstniedrigen wirklichen Quadratzahl“ besagt natürlich nicht, daß Planudes eine *Methode* zur Berechnung dieser Quadratwurzel angegeben hat.

Daß bei Planudes „die indische Methode“ gerade die gewöhnliche Quadratwurzelausziehung aus einer mehrziffrigen Zahl bedeutet, schließe ich daraus, daß bei der von Herrn Cantor erwähnten Mischmethode die Korrektion $\frac{A - [E(\sqrt{A})]^2}{2\,E(\sqrt{A})}$ nicht zur Anwendung kommt

G. Eneström

1³: 512 Herr Cantor bemängelt Planudes, weil dieser „mit wahren Posaunenstößen“ eine eigene Wurzelausziehungsmethode ankündigt, obgleich die

Methode nur darin besteht, daß die gegebene Zahl vorher durch Multiplikation mit 3600 in Sekunden verwandelt wird, worauf die Wurzel in der Gestalt von Minuten sich zeigt. Selbstverständlich ist diese Bemängelung nicht durchaus unberechtigt, aber ich erlaube mir darauf aufmerksam zu machen, daß PLANUDES' Verfahren eine ganz andere historische Bedeutung gehabt hätte, wenn wir noch mit Sexagesimalbrüchen rechneten. In der Tat entspricht ja PLANUDES' Verfahren genau dem Anhängen von Nullen, wenn man wie wir mit Dezimalbrüchen rechnet.

Aber abgesehen von dem jetzt hervorgehobenen Umstande ist Herrn CANTORS Ausstellung gegen PLANUDES nur bis zu einem gewissen Grade berechtigt, denn es gibt Fälle, in denen PLANUDES' Methode wirklich der THEONschen vorzuziehen ist, z. B. wenn es sich um die Berechnung von $\sqrt{3}$ handelt. Nach der THEONschen Methode erhält man zuerst 1^0, und dann soll man $120'$ durch 2^0 dividieren. Hier ist es durchaus unmöglich, sofort zu finden, daß der Quotient in Wirklichkeit nur $43'$ beträgt. Wesentlich erleichtert wird dagegen die Berechnung, wenn man nach PLANUDES' Methode von $10800''$ ausgeht.

Daß dies Verfahren von PLANUDES jedenfalls nicht neu war (vgl. unten die Bemerkung zu 1^3: 801), sondern wahrscheinlich schon von PTOLEMAIOS angewendet wurde (siehe F. HULTSCH, BM 5_3, 1904, S. 230—231), ist eine andere Sache.

Herrn CANTORS Angabe über PLANUDES' „eigene Methode" ist nicht vollständig. Nachdem PLANUDES in der erwähnten Weise die Minuten berechnet hat, führt er fort und berechnet Sekunden und Tertien nach der THEONschen Methode. Auf diese Weise erhält er zuerst $\sqrt{6} = \frac{146}{60} = 2^0 26'$ und dann den genaueren Wert

$$\sqrt{6} = 2^0 26' 58'' 9'''.$$

In der Übersetzung von H. WÄSCHKE nimmt der Bericht über die Berechnung von $\sqrt{6} = 2^0 26'$ nur eine Seite, der Bericht über die Berechnung der Sekunden und Tertien dagegen sieben Druckseiten in Anspruch.

G. ENESTRÖM.

1^3: 513, 515, 528, 545, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 68—69.

1^3: 551. Die Bemerkung (Z. 21—31): „Wir wissen . . . beschrieben worden sein" entspricht nicht dem heutigen Stande der mathematisch-historischen Forschung. Aus der von M. CURTZE 1902 herausgegebenen Arbeit: *Der „Liber embadorum" des SAVASORDA in der Übersetzung des PLATO von Tivoli* („MORITZ CANTOR . . . dargebracht vom Herausgeber"!) ersieht man, daß die betreffenden Stellen „des berühmten Buches aus dem Anfange des XIII. S." [d. h. der *Practica geometriae* des LEONARDO PISANO] höchstwahrscheinlich auf eine ganz andere Schrift als das verlorene Werk des FRONTINUS zurückgehen, nämlich auf die Übersetzung des *Liber embadorum* des ABRAHAM BAR CHIJJA durch PLATONE TIBURTINO. In der Tat stimmt das Verfahren, das LEONARDO „den alten Weisen" (sapientes antiqui) zuschreibt, und das Herr CANTOR in seiner Schrift über die Agrimensoren geneigt ist, dem FRONTINUS zuzuweisen, genau mit dem von ABRAHAM BAR CHIJJA gelehrten überein.

Da Herr Cantor seine Ansicht auf eine angebliche „fast wörtliche Wiederkehr" gewisser Stellen des feldmesserischen Fragmentes bei Leonardo stützt, so erlaube ich mir zu bemerken, teils daß sich diese Übereinstimmung eigentlich nur auf einige nicht besonders ungewöhnliche Wörter (semina, arbores, secundum, mons) beschränkt, teils daß die Übereinstimmung zwischen dem *Liber embadorum* und der *Practica geometriae* zuweilen viel größer ist. Als Beleg bringe ich hier ein paar Zeilen aus den zwei Werken nebeneinander zum Abdruck.

Liber embadorum ed. Curtze (1902), S. 122.	*Practica geometriae* ed. Boncompagni (1862), S. 107.
Semina, arbores et aedificia secundum rectum angulum et non aliter elevantur.	Edificia, arbores, nec non et semina non secundum rectum angulum super ipsas superficies [apparentes] eleventur.

Daß Abraham bar Chijja sein Verfahren aus Frontinus entnommen hat, dürfte vermutlich nicht einmal Herr Cantor behaupten wollen. Übrigens ist es noch eine offene Frage, auf welchem Wege die mittelalterlichen Verfasser in Europa zu ihren feldmesserischen Kenntnissen gekommen sind (vgl. H. Suter, BM 8_3, 1907/8, S. 29).

G. Eneström.

1³ : 551. Aus der von Herrn Cantor in der Fußnote 2 erwähnten Randbemerkung eines Schreibers aus dem 12. Jahrhundert darf man nicht folgern, daß dieser ein Buch des Frontinus gekannt hat, in welchem Flächeninhalte von Vierecken berechnet werden. Der Schreiber kann sehr wohl diese Notiz aus der *Geometria Boetii* entnommen haben, wo am Anfange des 2. Buches (S. 402—403 der Ausgabe von Friedlein) Julius Frontinus als Quelle zitiert und dann (S. 416—418 derselben Ausgabe) die Berechnung der Fläche verschiedener Vierecke gelehrt wird (vgl. N. Bubnov, *Gerberti Opera mathematica*, Berlin 1899, S LXXXVI). Aber die Angaben der *Geometria Boetii* sind nur mit größter Vorsicht zu benutzen.

G. Eneström.

1³ : 563—564, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 69. — **1³ : 576,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 69—70, 181.

1³ : 576. Die Angabe von Houzeau und Lancaster (siehe BM 8_3, 1907/8, S. 181) in betreff der Astronomie des Boetius ist ganz gewiß unrichtig und beruht auf einer Verwechslung. Ich habe den Katalog der Stiftsbibliothek in St. Gallen genau studiert und es findet sich nichts darin von diesem verschollenen Werke. Dagegen besitzt die Bibliothek eines der ältesten Manuskripte der Arithmetik des Boetius (Nr. 248, 9. Jahrh.) das Friedlein bei seiner Ausgabe nicht benutzt hat, und die Angabe: „MS De astronomia du IXe siècle" bei Houzeau und Lancaster bezieht sich sehr wahrscheinlich auf diese Handschrift der *Arithmetik*.

H. Suter.

1³ : 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70. — **1³ : 706,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70, 181. — **1³ : 713,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70. — **1³ : 715—716,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1³ : 717,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1³ : 718,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 71. — **1³ : 719,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 183—184. — **1³ : 720,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 71. — **1³ : 730,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1³ : 734,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 71. — **1³ : 736**

—737, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1³ : 738, 743, 748, 750,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72. — **1³ : 764,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 185.

1³ : 766. Von den Formeln, die Herr CANTOR in der Fußnote 5) andeutet, gibt es eine, die besonderes historisches Interesse hat, nämlich

$$d^2 = \frac{(n^2 - n + 6)s_n^2}{9},$$

wo d der Durchmesser eines Kreises und s_n die Seite des eingeschriebenen n-Ecks ist (vgl. H. SUTER, Verhandlungen des Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, Leipzig 1905, S. 556). Dieselbe Formel kommt nämlich (vgl. die *Vorlesungen* **2**², S. 83) in der Geometrie des JORDANUS unter der Form

$$s_n^2 = \frac{18(\frac{1}{2}d)^2}{\frac{n(n-1)}{2} + 3}$$

vor und wird dort als indisch bezeichnet; es ist bisher nicht gelungen, das Vorkommen der Formel bei einem indischen Mathematiker nachzuweisen.

G. ENESTRÖM.

1³ : 770, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 185.

1³ : 771. Die Bemerkung (Z. 4 — 7): „Dieser Beweis, das können wir zuversichtlich aussprechen, rührt von keinem Griechen her. Niemals hätte ein solcher eine Strecke als x^2, eine andere als $10x$ bezeichnet", ist meines Erachtens unrichtig. Es handelt sich darum, aus der Gleichung $x^2 + 10x = 39$ unmittelbar den Wert von x^2 zu bestimmen, und für diesen Zweck versinnlicht ALKARKHI, wie Herr CANTOR angibt, sowohl x^2 als $10x$ durch Strecken. Aber schon bei EUKLIDES kommt genau dasselbe Verfahren vor. Beispielsweise bezeichnet EUKLIDES im 10. Satze des 8. Buches der Elemente gewisse Zahlen A, B, Γ, Δ, E, Z, H ... durch Strecken und beweist dann auf Grund der Annahmen, daß $E = \Delta . \Delta$, $H = Z . Z$ ... Hier bezeichnet also die Strecke E tatsächlich das Quadrat der Strecke Δ. Nun kann man ja einwerfen, daß es sich bei EUKLIDES nicht um geometrische Größen, sondern um Zahlen handelt, aber genau dasselbe gilt auch in betreff des ALKARKHI. Dieser will die Gleichung $x^2 + 10x = 39$ lösen, wo selbstverständlich sowohl x^2 als $10x$ Zahlen sind, und der Umstand, daß bei ALKARKHI x^2 mâl (Quadrat) genannt wird, ist belanglos; dasselbe Wort kommt bekanntlich bei ALKARKHI auch als Name einer Größe im allgemeinen vor. Auch bei EUKLIDES wird eine Quadratzahl τετράγωνος genannt, und dennoch bezeichnet dieser, wie oben bemerkt wurde, Quadratzahlen durch Strecken, so daß ALKARKHIS Verfahren, im Gegensatz zur Behauptung des Herrn CANTOR, geradezu als echt euklidisch bezeichnet werden kann.

G. ENESTRÖM.

1³ : 780, 781, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72.

1³ : 792. Die Angabe (Z. 8—9), daß IBN AL-HAITAM auch in anderen Staatsarbeiten sich Fehler zuschulden kommen ließ, ist wohl ursprünglich eine

Mutmaßung, um al-Hakims Zorn zu erklären. Al-Kifti (1172—1248) erzählt die Sache auf folgende Weise (siehe E. Wiedemann, *Ibn al-Haitam, ein arabischer Gelehrter;* Festschrift für J. Rosenthal, Leipzig 1906, S. 154—155): „Ibn al-Haitam erkannte vollkommen klar die Mängel in der Verwaltung. Al-Hakim beging nämlich viele unsinnige Taten, indem er ohne Ursache oder auch nur aus einer kleinen Ursache Blut vergoß, und zwar infolge von Phantasievorstellungen, die er sich bildete. Daher forschte Ibn al-Haitams Geist nach einem Mittel, um sich von al-Hakim frei zu machen. Der einzige Ausweg, den er fand, war, sich närrisch und geistig schwach zu stellen.“ Al-Kifti gibt auch an, daß sich Ibn al-Haitam nach al-Hakims Tod „mit Schriftstellerei, mit Abschreiben und Unterricht“ beschäftigte. G. Eneström.

1³: 794, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 72.

1³: 798. Daß Abraham bar Chijja in betreff der Lösung der Gleichung $x^2 + b = ax$ von Alkarkhi abhängig war, hat man meines Erachtens gar keinen Grund anzunehmen, denn es ist nicht ganz richtig zu sagen, daß im *Liber embadorum* „die Summe von vier Strecken als Rechteck gezeichnet wird“. Die betreffende Aufgabe lautet: „Si cuiuslibet quadrati embadum ex suorum quatuor laterum quantitate depresseris, et tria supererunt . . .“, und hier entsprechen die Ausdrücke „embadum quadrati“ und „quantitas lateri“ offenbar genau den Termen „census“ und „res“ der mittelalterlichen Algebraiker; man kann folglich die Aufgabe auf folgende Weise ausdrücken: „Si quatuor res excepto censu sunt aequales tribus . . .“, und diese Aufgabe löst Abraham bar Chijja ganz wie Alkhwarismi dadurch, daß er x^2 durch ein Quadrat, $4x$ durch ein Rechteck versinnlicht. An der von Herrn Cantor erwähnten Stelle repräsentiert dagegen Alkarkhi für einen ganz besonderen Zweck (die sofortige Berechnung des Wertes von x^2) das gesuchte Quadrat durch eine Strecke, aber bei Abraham bar Chijja kommt etwas Ähnliches nicht vor.

Inwieweit Abraham bar Chijja wußte, daß die Gleichung $x^2 + b = ax$ im allgemeinen zwei Wurzeln hat, geht aus seiner Darstellung nicht unzweideutig hervor. Er behandelt nur Aufgaben, die nach seiner Terminologie darauf herauskommen, die Seite eines Quadrates zu berechnen, wenn der Betrag der vier Seiten minus dem Flächeninhalte des Quadrates gleich einer gegebenen Größe ist, und bemerkt dabei, daß ähnliche Aufgaben immer zwei Lösungen haben („omnes eius consimiles quaestiones ad duo pervenient“). Meint er mit „quaestiones consimiles“ alle Aufgaben, die der Gleichung $ax - x^2 = b$ entsprechen, so ist der *Liber embadorum* als die erste mittelalterliche Arbeit in Europa zu betrachten, wo gelehrt wird, daß diese Gleichung immer zwei Wurzeln hat, vorausgesetzt natürlich, daß die Wurzeln reell sind.

G. Eneström.

1³: 800, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 73.

1³: 800. Die Ausführungen, die Z. 24 beginnen, gehen von der Voraussetzung aus, daß der *Liber algorismi de pratica arismetrice* eine Übersetzung ist und vom Übersetzer dem Alkhwarismi zugewiesen wird, aber diese

Voraussetzung ist unbegründet. Daß im Traktate Ausdrücke vorkommen, die nicht aus dem Arabischen übersetzt sein können, habe ich schon beiläufig in einem früheren Artikel (siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 4) hervorgehoben. Auf der anderen Seite zitiert der Verfasser des Traktates wenigstens einmal ALKHWARISMI (siehe S. 68 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe: „est illud etiam quod de multiplicatione et diuisione integrorum et fractionum alcorismus dicere uidetur"), und schon aus diesem Grunde ist unmöglich anzunehmen, daß der Traktat eine Übersetzung von ALKHWARISMIS Rechenbuch sei. Allem Anschein nach ist der Traktat im 13. Jahrhundert von einem abendländischen Mathematiker verfaßt oder vielleicht richtiger bearbeitet; dieser hatte ohne Zweifel zur Verfügung entweder das arabische Original oder eine vollständige lateinische Übersetzung von ALKHWARISMIS Rechenbuch (vgl. S. 69 der BONCOMPAGNIschen Ausgabe: „Similiter etiam idem est in superioribus quod de diuisione docet [nämlich ALKHWARISMI] dicens . . ."), und benutzte sehr ausgiebig, zuweilen sogar wörtlich seine Vorlage.

G. ENESTRÖM.

1³:801, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 185—186.

1³ : 801. Außer der von Herrn CANTOR erwähnten näherungsweisen Ausziehung der Quadratwurzel, die aus dem Kapitel „De inuenienda radice integrorum numerorum alio modo per circulos" entnommen ist, findet sich im *Liber algorismi de pratica arismetrice* auch ein Verfahren mit ausschließlicher Anwendung von Sexagesimalbrüchen. Nach diesem Verfahren, das am Ende des Kapitels „De inuenienda radice in fractionibus" gelehrt ist, wird $\sqrt{2}$ auf folgende Weise berechnet:

$$\sqrt{2^0} = \sqrt{2 . 60^{2\prime}} = \sqrt{7200'} \sim 84' = 1^0\, 24'.$$

Dieser Umstand, worauf übrigens schon FRIEDLEIN (*Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes,* Erlangen 1869, S. 154) aufmerksam gemacht hat, ist von einem gewissen historischen Interesse, weil das Verfahren genau mit der ersten Hälfte einer Methode übereinstimmt, die MAXIMUS PLANUDES als seine eigene Erfindung bezeichnet (vgl. oben die zweite Bemerkung zu **1³** : 512).

G. ENESTRÖM.

1³:802, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1³:805—806, 815,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 73. — **1³:838,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 415. — **1³:855, 857, 859, 862, 863,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1³:867,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1³:869, 875—876, 877, 878,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 74—76. — **1³:881,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 415—416. — **1³:882, 889, 893,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 77—78. — **1³:900,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 78, 187—188.

1³ : 901. Von den Z. 1 erwähnten zwei kreisrunden Figuren ist die erste offenbar eine Oster-Vollmond-Tafel. Man sieht sofort, daß die oberste Zellenreihe die Epakten enthält; in der untersten Zellenreihe kommen nur die Zahlen 1 und 2 vor und 1 bedeutet vermutlich März, 2 April. Die Zahlen der mittleren Zellenreihe stimmen freilich in betreff der März-Daten nicht mit den Zahlen der Julianischen Oster-Vollmond-Tafel überein, wie aus der

folgenden Zusammenstellung hervorgeht (die obere Zahlenreihe ist die Julianische, die untere die des von Herrn Cantor erwähnten Manuskriptes):

5	25	13	2	22	10	30	18	7	17	15	4	24	12	1	21	9	29	17
April	März	April	April	März	April	März	April	April	März	April	April	März	April	April	März	April	März	April
5	7	13	2	10	10	2	18	7	5	15	4	8	12	1	11	9	3	17

Worauf die sieben Abweichungen beruhen, habe ich zurzeit nicht Gelegenheit zu ermitteln, und für die Geschichte der Mathematik ist der Grund derselben von untergeordnetem Interesse. — Daß auch die zweite Tafel einen chronologischen Zweck hat, halte ich für fast sicher.

Daß in den Tafeln Null nicht gebraucht wird, so daß 10 und 20 überall durch X und XX ausgedrückt werden, bedeutet meines Erachtens nicht notwendigerweise, daß der Schreiber die Null noch nicht kannte oder sie noch nicht zu gebrauchen wagte. Es ist sehr wohl möglich, daß er aus praktischen Gründen darauf verzichtete, die Null zu benutzen.

Übrigens scheint es mir, als ob man zu großes Gewicht auf die Zahlenschreibung der zwei fraglichen Tafeln gelegt hätte. Sie zeigt ja nur, daß es einmal eine Person gegeben hat, die die Apices mit Stellenwerten, aber nicht die Null benutzte; aber ob dies nur als eine Unbeholfenheit eines Nicht-Mathematikers oder als etwas verhältnismäßig Gewöhnliches zu betrachten ist, kann man zurzeit gar nicht entscheiden. Im ersten Falle wäre ja die Tatsache für die Geschichte der Mathematik durchaus ohne Interesse. In Schweden kam es noch vor 20 Jahren zuweilen vor, daß ungebildete Leute z. B. die Zahl 2403 durch 2 1000 4 100 3 bezeichneten, aber dieser Umstand verdient gewiß gar nicht in einer Geschichte der Mathematik des 19. Jahrhunderts erwähnt zu werden.

G. Eneström.

1³ : 902, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 78—79. — **1³ : 906,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 79, 188—189.

1³ : 908. In betreff der Bemerkung: „Vielleicht darf man . . . einen Algorithmus des Meister Gerhard . . . unserem Gerhard von Cremona überweisen" genügte es eigentlich, auf BM **7**₃, 1906/7, S. 401—402 zu verweisen. Indessen ist die Frage in methodologischer Hinsicht von besonderem Interesse, weil man daraus ersehen kann, wie unrichtige mathematisch-historische Angaben allmählich entstehen und verbreitet werden, und aus diesem Gesichtspunkte ist es angebracht, hier noch einmal auf die Frage zurückzukommen.

Der erste mathematisch-historische Verfasser, der die fragliche, in Oxford (nicht in London, wie Herr Cantor angibt) aufbewahrte Algorismusschrift mit dem Namen des Gherardo Cremonese in Verbindung setzte, war, soviel ich weiß, Chasles, der in seinem *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* (Bruxelles 1837, S. 510) bemerkte: „Un traité d'arithmétique, qui se trouve dans la bibliothèque Bodléienne sous le titre *Algorismus magistri Gerardi in integris et minutiis* (Heilbronner *Hist. math.* p. 601) serait-il aussi de Gérard de Crémone". Chasles hat also eigentlich keine Hypothese ausgesprochen, sondern nur eine Frage gestellt. Freilich könnte man aus Sohnckes Übersetzung (S. 594, Z. 17—18: „Wir wären geneigt, es zu glauben") versucht sein, zu schließen, daß Chasles die Frage selbst zur Hälfte bejahend beantwortet hat, aber, soviel ich sehen kann, beziehen sich die Worte des Originals: „ainsi que nous serons porté à le penser" auf einen

anderen Gegenstand (ob die Positionsarithmetik zu Gherardo Cremoneses Zeit in Europa bekannt war). Die von Chasles gestellte Frage wurde ohne weiteres von Boncompagni in seiner Monographie *Della vita e delle opere di Gherardo Cremonese* (Roma 1851, S. 57) abgedruckt. Einen sehr kleinen Schritt weiter ging Cantor in der 1. Auflage seiner *Vorlesungen* (**1**, Leipzig 1880, S. 779), wo ganz wie in der 3. Auflage bemerkt wird: „vielleicht darf man . . . auch einen Algorithmus des Meister Gerhard . . . unserem Gerhard von Cremona überweisen". Aber bald geht es schnell weiter; schon drei Jahre später behauptete M. Marie in seiner *Histoire des sciences mathématiques* (**2**, Paris 1883, S. 131), daß die fragliche Algorismusschrift „paraît devoir être attribué à Gérard de Crémone", und kurze Zeit nachher schrieb W. Ball in seinem *Account of the history of mathematics* (Cambridge 1888, S. 159): „Gerard [d. h. Gherardo Cremonese] also wrote a short treatise on algorism which exists in manuscript in the Bodleian Library at Oxford". Die unrichtige Lesung „Gerardus" statt Gernardus (oder Gernandus) hat also allmählich zu einer bestimmten Behauptung geführt, die in Wirklichkeit durchaus unbegründet ist. Man hat nämlich nicht den geringsten Grund, anzunehmen, weder daß Gherardo Cremonese eine mathematische Arbeit selbst verfaßt hat, noch daß er mit Meister Gernardus identisch ist (vgl. BM 7_3, 1906/7, S. 401—402).

G. Eneström.

1^3**: 908, 909,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79. — **1**^{3}**: 910,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79, 416. — **1**^{3}**: 911,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 79—80.

---

2 : 5, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 286; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 501; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309.

---

2 : 9. Bei der Neunerprobe bedient sich Leonardo Pisano des Wortes „pensa", um den Rest nach der Division durch 9 zu bezeichnen. Dies Wort übersetzt Herr Cantor (Z. 16) durch „Gewicht", und natürlich ist an sich nichts dagegen einzuwerfen, aber da Leonardo (*Liber abbaci*, ed. Boncompagni, S. 8, Z. 21) sagt, daß dieser Rest „uocetur pensa uel portio", scheint mir dies ein Anlaß zu sein, um das Wort „pensa" durch „Überschuß" oder sogar durch „Rest" wiederzugeben. Beiläufig bemerke ich, daß bei Leonardo zuweilen das Wort „pensa" in einer weiteren Bedeutung vorkommt, so daß es auch den Rest nach Division durch eine andere Zahl als 9 bezeichnet (siehe z. B. a. a. O. S. 39 Z. 36—37: „pensam per 7").

G. Eneström.

---

2 : 10. Meiner Ansicht nach sollte bei der Darstellung des Subtraktionsverfahrens bei Leonardo Pisano das Wort „borgen" (Z. 15) nicht benutzt werden, denn der Begriff „Borgen" ist dem Leonardo durchaus unbekannt. In betreff des Falles, in dem eine Ziffer des Subtrahendus von höherem Wert als die entsprechende Ziffer des Minuendus ist, gibt Leonardo selbst folgende Regel (maior numerus = Minuendus, minor numerus = Subtrahendus):

> figure maioris numeri addendus est decenarius, et de coniuncto numero, figura minoris numeri erit extrahenda. Et pro iunctione dicti decenarii in manu unitas erit reseruanda. Et ipsa sequenti figure minoris

super addenda et concreata quantitas de superiori figura eiusdem gradus, si possibile fuerit, erit extrahenda.

Vom Gesichtspunkte des Leonardo aus bekommt also der Minuendus einen Zuschlag, und darum soll auch der Subtrahendus einen ebenso großen Zuschlag bekommen. G. Eneström.

---

2 : 10, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2 : 11,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 200; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 17,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 20,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 502; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 274.

---

2 : 25. Da Herr Cantor weiter unten (S. 230) in betreff einer bei Widman vorkommenden Aufgabe bemerkt: „Es wäre schwierig, eine unpassendere Aufgabe zu ersinnen als diese, in welcher die gekaufte Waare gemindertes (also negatives) Geld einschließt und in dem Preise selbst Waare vorkommt", so mache ich darauf aufmerksam, daß im zwölften Abschnitte des *Liber abbaci* (S. 276—277 der Ausgabe von Boncompagni) Aufgaben ganz derselben Art vorkommen. Aber hier ist der Wortlaut der Aufgaben nicht so knapp, und man sieht daraus sofort, daß solche Fragen wirklich einen verständigen Sinn haben können. Die eine Aufgabe lautet: „Ex duobus hominibus unus habuit pisces 12, et alter pisces 13; et fuerunt omnes pisces unius pretij. Commertiarius autem abstulit primo piscem, et denarios 12 pro dirictura. Et alio abstulit pisces 2, et reddidit ei denarios 7; queritur commertium et pretium uniuscuiusque piscis." Hieraus leitet Leonardo her, daß „$\frac{13}{12}$ unius piscis, et denarij 13, equantur duobus piscibus, minus denarijs 7". In betreff der von Widman nach einer älteren Vorlage reproduzierten Aufgabe soll man also annehmen, daß der Verkäufer genötigt gewesen ist, eine Gebühr zu bezahlen, und was beanstandet werden kann, ist eigentlich der Ausdruck „Eyner hat kaufft". G. Eneström.

---

2 : 30, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 351—352; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 239—240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 144; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 190. — **2 : 37,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352.

---

2 : 38. Der Passus: „Einzelnes zeigt eine fast wörtliche Übereinstimmung mit erhaltenen Bruchstücken von Frontinus" sollte gestrichen werden, weil 1. der Ausdruck „eine fast wörtliche Übereinstimmung" irreleitend ist (die Übereinstimmung betrifft nur einige ziemlich gewöhnliche Wörter); 2. die Quelle des Leonardo höchstwahrscheinlich der *Liber embadorum* des Abraham bar Chijja war (siehe oben die Bemerkung zu $\mathbf{1}^3 : 551$), den Leonardo auch an anderen Stellen ausgiebig benutzt zu haben scheint. G. Eneström.

---

2 : 39, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 209. — **2 : 41,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 80—81; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 72—73.

---

2 : 45. Wie Herr Cantor bemerkt, beweist Leonardo zuerst, daß, wenn a und b ganze Zahlen sind, es nicht möglich ist, daß $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a-b}$, und behauptet

dann, daß keine Quadratzahl ein Congruum sein kann, ohne diesen Satz wirklich zu beweisen; er sagt nur: „ostendetur quod nullus quadratus numerus potest esse congruum; quia si possibile esset, etiam esset proportio coniuncti duorum adiacentium numerorum ad residuum sicut maior eorum ad minorem". Ob hier die Lücke in dem sonst vollkommen strengen Gedankengange nur scheinbar oder wirklich vorhanden ist, läßt Herr CANTOR unentschieden. Indessen ist diese Frage für die Geschichte der Zahlentheorie von größerem Interesse, als man aus der Darstellung des Herrn CANTOR ersehen kann, und darum erlaube ich mir folgende Bemerkungen hier hinzuzufügen.

LEONARDOS Beweis der Unmöglichkeit der Gleichung $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a-b}$ ist wesentlich der folgende. Aus den zwei Identitäten:

$$[a(a+b) + b(a-b)]^2 - [a(a+b) - b(a-b)]^2 = 4ab(a+b)(a-b).$$
$$[a(a-b) + b(a+b)]^2 - [a(a-b) - b(a+b)]^2 = 4ab(a+b)(a-b)$$

erhält man durch Addition die neue Identität

$$[a(a+b) + b(a-b)]^2 - [a(a-b) - b(a+b)]^2 = 8ab(a+b)(a-b),$$

weil

$$[a(a+b) - b(a-b)]^2 = (a^2+b^2)^2 = [a(a-b) + b(a+b)]^2.$$

Nimmt man nun an, daß wirklich $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a-b}$ sein kann, so folgt daraus, daß

$$a(a-b) - b(a+b) = 0 \text{ und } ab(a+b)(a-b) = [a(a-b)]^2,$$

also

$$[a(a+b) + b(a-b)]^2 = 2[2a(a-b)]^2,$$

was unmöglich ist, weil das Quadrat einer rationalen Zahl nie das Doppelte des Quadrates einer anderen rationalen Zahl sein kann. Denn wäre dies der Fall, so würde man beweisen können, daß eine ungerade Zahl durch 2 teilbar ist oder daß zwei Primzahlen einen gemeinsamen Faktor haben (vgl. EUKLIDES *Elem.* X, appendix prop. 27; ed. HEIBERG III, Leipzig 1881, S. 408—413). Beiläufig bemerke ich, daß LEONARDOS Beweis unnötigerweise verwickelt ist, denn aus $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a-b}$ folgt

$$a^2 - ab = ab + b^2 \text{ oder } a^2 - 2ab + b^2 = 2b^2$$

d. h.

$$(a-b)^2 = 2b^2,$$

welche Gleichung aus dem soeben angegebenen Grunde unmöglich ist.

Könnte man nun etwa auf dieselbe Weise beweisen, daß keine Quadratzahl ein Congruum sein kann, so wäre wohl anzunehmen, daß die Lücke in LEONARDOS Darstellung nur scheinbar sei; daß indessen ein solcher Beweis nicht möglich ist, geht meines Erachtens daraus hervor, daß LEONARDOS fraglicher Satz offenbar mit dem Satze, daß die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Seiten ganze Zahlen sind, nicht eine Quadratzahl sein kann, identisch ist. Aber um diesen letzten Satz zu beweisen, muß man bekanntlich einen ganz anderen Weg als den von LEONARDO für seinen Beweis des Satzes $\frac{a}{b} \gtrless \frac{a+b}{a-b}$ benutzten einschlagen: man weist nämlich nach, daß, wenn es ein rechtwinkliges Dreieck gibt, dessen Seiten ganze Zahlen sind, und dessen Fläche eine Quadratzahl ist, es eine unendliche Anzahl von kleineren Dreiecken

derselben Art gibt. Aber daß Leonardo diese Methode kannte, hat man nicht den geringsten Grund anzunehmen, und die Lücke in Leonardos Gedankengang ist also höchstwahrscheinlich nicht nur scheinbar. Vielleicht schloß Leonardo aus der Identität

$$[a(a-b)+b(a-b)]^2-[a(a-b)-b(a+b)]^2=4ab(a+b)(a-b),$$

daß das zweite Glied nur dann eine Quadratzahl sein kann, wenn $a(a-b)=b(a+b)$, d. h. $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{a-b}$. Aber natürlich ist diese Schlußfolgerung nicht stichhaltig, denn man muß auch nachweisen, daß die Differenz von zwei Quadratzahlen, die das erste Glied bildet, nie eine Quadratzahl sein kann, wenn $a(a-b) \lessgtr b(a+b)$. Zu Leonardos Zeiten war es ja schon bekannt, daß z. B. $(a^2+b^2)^2-(2ab)^2$ eine Quadratzahl sein kann, auch wenn $2ab$ nicht gleich Null ist.

G. Eneström.

---

2 : 46, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 51,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106.

---

2 : 51. Wie Suter schon (BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106) bemerkt hat, ist die „distinctio octava" der *Practica geometriae*, aus der Herr Cantor die zwei Aufgaben über Fünfecke entnahm, von besonderem historischen Interesse, weil es gelungen ist, eine arabische Schrift (oder richtiger eine hebräische Übersetzung einer arabischen Schrift) aufzufinden, worin ein großer Teil des Inhaltes dieser „Distinctio" vorkommt. G. Sacerdote hat nämlich, wie ich hier ergänzend hervorheben will, 1896 (vgl. BM 1896, S. 94) einen Traktat über das Fünfeck und das Zehneck von Abu Kamil Schodja ben Aslam ben Muhammed in italienischer Übersetzung veröffentlicht und dabei nachgewiesen, daß von den 20 Sätzen dieses Traktates wenigstens 16 bei Leonardo zu finden sind, und zwar sind die Behandlung und die Zahlenbeispiele in den zwei Arbeiten wesentlich dieselben. In Wirklichkeit kommen auch die Sätze 13 und 14 des Abu Kamil Schodja bei Leonardo vor (S. 220—224 der Ausgabe von Boncompagni). Dieser arabische Verfasser, den Herr Cantor im Vorübergehen S. 731 der 3. Auflage des 1. Bandes der *Vorlesungen* erwähnt, lebte nach 813, aber vor 939, wahrscheinlich am Ende des 9. Jahrhunderts. Eine mittelalterliche lateinische Übersetzung des arabischen Traktats wurde von Gherardo Cremonese verfertigt, und eine unvollständige Abschrift derselben ist noch aufbewahrt (vgl. Suter a. a. O.). Möglicherweise hat Leonardo diese Übersetzung zur Verfügung gehabt.

G. Eneström.

---

2 : 52, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 190—191. — **2 : 53,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2 : 59—60,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287.

---

2 : 61. Meine Vermutung, daß der Term „Dignitates" nicht von Jordanus selbst herrührt (siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 208—209) scheint dadurch bestätigt zu werden, daß im Cod. Dresd. Db. 86 (14. Jahrh.) eine Handschrift der Arithmetik des Jordanus vorkommt, wo nach M. Curtze (Zeitschr. für Mathem. **28**, 1883; Hist. Abt. S. 2) nicht das Wort „Dignitates" sondern „Communes animi conceptiones" steht.

G. Eneström.

2 : 63, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206.

---

2 : 65. Es ist richtig, daß in der gedruckten Ausgabe des *Algorithmus demonstratus* erklärt wird, man könne unmöglich alle Fälle des Multiplikationsverfahrens in Kürze erschöpfen, und daß diese Erklärung eine ergänzende Rolle spielt, wie aus dem folgenden Abdruck des g a n z e n 20. Satzes („Operationem multiplicandi demonstrare") der SCHÖNERschen Ausgabe hervorgeht:

> Sit numerus abc multiplicandus per numerum ghk multiplicantem, scribo primam inferioris sub ultima superioris. Multiplico itaque digitum figurae c in digitum figurae k, et proveniat digitus cuius figura sit e, eam pono super figuram k. Significabit autem super k posita non digitum, sed articulum limitis tantum distantis a limite articuli c, quantum distat limes articuli k a limite digitorum in quo est g, et est totus in eo, quotus digitus figurae e est in suo. Habes utrumque ex decimaquinta. Bene igitur scribitur per figuram e super figuram k. Sed quia de singulis mutationibus non est facile breviter exempla subiicere cautus multiplicator ad ea quae praecesserunt considerationem referens, per singula sibi exemplum inveniat.
>
> e c b a
> k h g

Aber in einer der älteren Handschriften (14. Jahrhundert) des Traktates (Cod. Reg. Suec. Vatic. 1261) wird erst die allgemeine Multiplikationsregel ausführlich gelehrt, und als Beleg bringe ich hier den wesentlichen Teil derselben (Bl. 271[a]) zum Abdruck.

> Scribo utrumque datorum numerorum ita quod prima supposita sit sub ultima superscripti. Deinde multiplico digitum figure superposite prime figure inferioris ordinis per digitum ultime inferioris, et si quod excrescat est digitus pono eius figuram super figuram multiplicatoris in directo superioris ordinis, si est articulus vel numerus compositus scribo super figuram multiplicatoris cifram quantum ad articulum, vel digitum quantum ad numerum compositum et figuram articuli posterius. Deinde per penultime inferioris ordinis figure digitum multiplico eundem digitum quem prius et si excrescit digitus pono eius figuram super figuram multiplicatoris, si articulus cifram, si numerus compositus figuram digiti ex utrolibet eveniente digitum articuli addo digito sequentis figure si est significativa. Si est cifra pro ea scribo articuli figuram. Ultimo in hoc situ multiplico per digitum prime inferioris digitum figure sibi supraposite et deleta eadem superiore, si procedit digitus, figuram eius pro ea scribo, si articulus cifram, si numerus compositus figuram digiti, et de articulo facio velut prius dicta. Post hec primam inferioris scribo sub proxima ea sub qua jam fuit et sequentes inferioris sub sequentibus superioris continue pono. Item per omnes digitos inferiorum figurarum multiplico digitum figure que est super primam figuram inferiorem et quemlibet numerum ex multiplicatione cuiuslibet digiti figure inferioris productum addo suo superposito.

Erst gegen das Ende des 20. Satzes wird im Cod. Reg. Suec. Vatic. 1261 (Bl. 271[b]) die von Herrn CANTOR erwähnte Erklärung hinzugefügt; sie ist also hier eigentlich überflüssig.

G. ENESTRÖM.

2 : 67, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

---

2 : 77. Warum Herr Cantor in betreff der kleinen Schrift „Archimenidis de curvis superficiebus" dahingestellt sein läßt, ob sie wirklich in letzter Linie auf Archimedes zurückführt, oder ob die Überschrift so zu verstehen ist, daß eine Neubearbeitung archimedischer Sätze vorliege, ist mir nicht recht verständlich. Herr Cantor verweist selbst auf die „Prolegomena" zum dritten Bande von Heibergs Archimedes-Ausgabe und an dieser Stelle hat Heiberg die Sätze der fraglichen Schrift, die in anderen Handschriften den Titel „Archimenidis de rotundis pyramidibus" hat, zum Abdruck gebracht mit der Bemerkung: „itaque hoc opusculo retractatio quarundam propositionum libri I de sphaera et cylindro continetur, quae retractatio haud inscite propositiones illas cum propositionibus libelli de dimensione circuli in unum coniungit". Man kann also in einem gewissen Sinne sagen, daß die Schrift in letzter Linie auf Archimedes zurückgeht, freilich nur in betreff der Sätze; man kann auf der anderen Seite von einer Neubearbeitung reden, aber nur hinsichtlich der Darstellung. Der Bearbeiter nennt sich Joannes de Thiss (Thiñ) oder Johannes de Tinennie (vgl. A. A. Björnbo, BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 242). G. Eneström.

---

2 : 82, 87, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2** : 88, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395. — **2 : 89, 90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503.

---

2 : 91. Hier könnte vielleicht erwähnt werden, daß die Kgl. Bibliothek in Hannover eine Algorismusschrift besitzt, die aus der Mitte des 13. Jahrhunderts herzustammen scheint, und die zum Teil von C. G. J. Jacobi nach einer Abschrift von C. I. Gerhardt in den Berichten der Berliner Akademie 1850 (S. 433—435) zum Abdruck gebracht ist. Diese Algorismusschrift, die keinen Titel hat, beginnt: „Quis titulus huius artis . . . incipit algorismus" und sollte auch „sexto loco" Bruchrechnung enthalten, obgleich dies Kapitel in der Handschrift in Hannover fehlt. Hier wird das Wort „algorismus" aus „alba harena" (= weißer Sand) hergeleitet; der Verfasser benutzt die vier Terme „digitus", „articulus", „limes", „compositus", von denen „articulus" eine Zahl von der Form $A \cdot 10$, „limes" eine Zahl von der Form $a \cdot 10^n (a < 10)$ bedeutet, und bemerkt ausdrücklich: „est haec differentia inter articulus et limes quod omnis limes articulus sed non convertitur" (vgl. meine Bemerkung in betreff des Sprachgebrauches der *Geometria Boëtii*, BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 414).

G. Eneström.

---

2 : 91—92, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395—396; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 191. — **2 : 97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 73—74. — **2 : 101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396.

---

2 : 101. Daß die Aufgabe, die sich der Verfasser der Abhandlung: „Tractatus de quadratura circuli editus a quodam archiepiscopo ordinis fratrum minorum" stellte, gar nicht, wie Chasles behauptete, die Quadratur des Kreises im gewöhnlichen Sinne war, hat schon Herr A. Sturm in der BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325 hervorgehoben. Für die Geschichte der mathematisch-historischen

Forschung ist dieser Umstand von besonderem Interesse, weil er zeigt, wie unkritisch ein so hervorragender Historiker wie CHASLES zuweilen seine Quellen studierte. Der fragliche Traktat enthält fünf Aufgaben, von denen die vier ersten (Ausgabe Paris 1530 der *Geometria speculativa* des BRADWARDINUS, Bl. 20^a—20^b), die ich hier unten zum Abdruck bringe, die Lösung der eigentlichen Aufgabe vorbereiten:

1. Lineam orbiculariter ductam bina (!) diametro (!) in .4. equalia seccare.
2. Linee orbiculariter ducte lineam rectam equalem dare.
3. Lineam rectam in .4. equalia seccare.
4. Ex quattuor rectis lineis equalibus quadratum constituere.

Diese vier Hilfsaufgaben weisen ja ziemlich deutlich darauf hin, daß es sich darum handelt, ein Quadrat zu finden, dessen Umfang gleich demjenigen eines Kreises ist („linea orbiculariter ducta" bedeutet nämlich Kreisumfang), und in Wirklichkeit wird *diese* Aufgabe in der „Quinta conclusio" richtig gelöst unter der Voraussetzung, daß π genau gleich $\frac{22}{7}$ ist. Daß der Verfasser des Traktates dabei die Ausdrücke „*quadratura* circuli" und „hic circulus est *equalis* huic quadrato" benutzt, kann ja nicht ohne Grund als eine sprachliche Ungenauigkeit bemängelt werden, aber unberechtigt ist jedenfalls CHASLES' Behauptung, daß der Traktat nur die Unwissenheit seines Verfassers bezeichne, und kaum richtig ist die Bemerkung, daß der Traktat durchaus unwert sei, den Namen des CAMPANUS zu führen. Freilich ist der Traktat ein schwaches Produkt, denn die gelöste Aufgabe ist eigentlich belanglos, aber auf der anderen Seite war CAMPANUS gewiß kein Mathematiker ersten Ranges, auch wenn man auf die mittelalterlichen Verhältnisse Bezug nimmt. G. ENESTRÖM.

---

2 : 104—105, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398.

---

2 : 105. Der fragliche Beweis der Irrationalität des goldenen Schnittes rührt vielleicht nicht von CAMPANUS her; derselbe Beweis findet sich im 5. Buche (Satz 11) der LEFÈVREschen Ausgabe von JORDANI *Arithmetica*, und man hat bisher keinen Grund gehabt, anzunehmen, daß derselbe von LEFÈVRE hinzugefügt ist. Der Satz selbst ist bekanntlich von EUKLIDES (*Elementa* XIII : 6) aufgestellt und auf eine ganz andere Weise bewiesen. G. ENESTRÖM.

---

2 : 106, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 380. — **2 : 111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352.

---

2 : 114. Z. 23 sollten der Deutlichkeit halber nach BRADWARDINUS die Worte „unter anderem" (vgl. S. 116 Z. 8) eingeschaltet werden; das Kapitel über Sternvielecke umfaßt nämlich nur etwa $^1/_3$ des 1. Abschnittes. Z. 24 ist „egredientium" statt „egredientibus" zu lesen. G. ENESTRÖM.

---

2 : 116, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406.

---

2 : 116. Z. 3—4 kann ohne weiteres „hat BRADWARDINUS nicht geführt" statt „scheint BRADWARDINUS nicht geführt zu haben" gesetzt werden. Daß er nicht einmal versuchte, den von ihm hypothetisch aufgestellten Satz zu be-

weisen, dürfte aus seinen eigenen Worten (Auflage Paris 1530, Bl. 4ᵇ), die ich unten zum Abdruck bringe, deutlich hervorgehen:

De valore autem angulorum talium discutere esset maior labor quam utilitas ideo non insisto: videbatur mihi aliquando quod omnes ordines figurarum loco primo conuenirent quantum ad hoc quod prima semper valet duos rectos & quelibet semper sequens adheret tantundem supra precedentem scilicet duos rectos sed quamvis propinquum sit ei secundum rem non tamen assero hoc & hec sufficiant de figuris conicis.

G. Eneström.

2 : 117—118, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 191—192. — **2 : 129,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 144,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381. — **2 : 145,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 148,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2 : 150—151,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288. — **2 : 155—156,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 87—88.

2 : 160—162. Herr Suter hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß die vier Gleichungen

$$x^3 + 60x^2 + 1200x = 4000,$$
$$x^4 + 80x^3 + 2400x^2 + 32000x = 96000,$$
$$x^4 + 28x^2 + 720x = 20x^3 + 1800,$$
$$x^5 + 100x^4 + 4000x^3 + 80000x^2 + 800000x = 1953632$$

alle durch einfache Substitutionen von der Form $x = y + k$ gelöst werden können; für die dritte Gleichung ist $k = -5$, für die drei übrigen ist $k = 20$. Indessen ist es meines Erachtens wenig wahrscheinlich, daß der anonyme Verfasser des von Libri herausgegebenen Traktates dies Verfahren benutzt hat; bekanntlich trifft man zuerst bei Cardano eine Substitution dieser Art, und im Mittelalter war die algebraische Zeichensprache so wenig ausgebildet, daß die fragliche Substitution kaum zur Anwendung kommen konnte.

Herr Suter hat auch bemerkt, daß drei der oben angeführten Gleichungen direkt durch Wurzelausziehung auf lineare Gleichungen gebracht werden können, und meiner Ansicht nach kann man eher annehmen, daß im Mittelalter ein solches Verfahren benutzt worden ist.

In betreff der Verfasserfrage habe ich noch nichts ermitteln können. Nicht ganz unmöglich ist es indessen, daß Giovanni Bianchini der Verfasser sei, denn dieser hat sich nach seiner eigenen Aussage in einer Schrift mit dem Titel *Liber florum* mit Lösungen von Zinseszinsfragen vermittels Algebra beschäftigt (siehe M. Curtze, Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wiss. **12**, 1902, S. 236).

G. Eneström.

2 : 163, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382. — **2 : 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 178—179,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 192—193. — **2 : 206,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398.

2 : 224—226. Was hier über Tolletrechnung gesagt wird, ist wesentlich irreleitend. Es handelt sich um den Inhalt des 14. Kapitels des Bamberger Rechenbuches, und Herr CANTOR bemerkt: „Ein deutscher Schriftsteller des folgenden Zeitabschnittes, PETRUS APIANUS, hat 1532 die Tolletrechnung . . . erklärt . . . und darnach war es ein Verfahren, mittels dessen das Feingold aus einem goldhaltigen Silber berechnet zu werden pflegte"; dann setzt Herr CANTOR dies Verfahren ausführlich auseinander und fügt zuletzt hinzu: „Das Bamberger Rechenbuch sagt selbst, daß die Regeldetri eine weit kürzere Methode sei". Hieraus muß der Leser natürlich folgern, daß das fragliche Verfahren im 14. Kapitel des Bamberger Rechenbuches unter dem Namen „Tolletrechnung" gelehrt wird. Aber in Wirklichkeit ist die Tolletrechnung des Bamberger Rechenbuches nicht ein Verfahren, mittels dessen das Feingold aus einem goldhaltigen Silber berechnet wird, und ebensowenig wurzelt diese Tolletrechnung (vgl. S. 226 Z. 23—25) in der Zerlegung eines Bruches in eine Summe von Stammbrüchen. Ein gutes Resumé des wirklichen Verfahrens des Bamberger Rechenbuches gibt UNGER an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle: „Man stellt für jede Aufgabe eine eigene Hilfstafel auf. In diese werden das Ein-, Zehn-, Hundert-, Tausendfache etc. des gegebenen Einheitspreises und ebenso die Preise für die Einheiten der kleineren Gewichte resp. Maße aufgenommen. Die genannten Beträge sind nun mit den ihnen entsprechenden Ziffern der gegebenen Vielheit zu multiplizieren und die Produkte zu addieren." Außerdem hebt UNGER hervor, daß WIDMAN 1489 die Stelle über die Tolletrechnung wörtlich aus dem Bamberger Rechenbuche abgeschrieben hat, und da TREUTLEIN in der von Herrn CANTOR zitierten Abhandlung die betreffende Stelle bei WIDMAN zum Abdruck gebracht hat, so ist das CANTORsche Versehen um so auffälliger. Die einzige Erklärung ist wohl, daß Herr CANTOR von TREUTLEINS Bericht nur die erste Hälfte und von UNGERS Darstellung nur zwei Zeilen (S. 95 Z. 3—4) gelesen hat.

Die ganze Seite 225 sowie die 18 ersten Zeilen der Seite 226 sollten also entweder gestrichen oder nach Seite 403 versetzt werden; jedenfalls sollte der Passus (S. 226 Z. 20—28): „Aber gleichwohl . . . wieder begegnen" gestrichen werden. Dagegen sollte eventuell der Bericht über die Tolletrechnung bei APIANUS ergänzt werden durch die Bemerkung, daß APIANUS auch das Verfahren des Bamberger Rechenbuches als „Tollet" auseinandersetzt — nicht einmal bei APIANUS ist die Feingoldberechnung und die Zerlegung in Stammbrüche für die Tolletrechnung kennzeichnend.

Leider hat sich J. TROPFKE (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 76) verleiten lassen, auf Grund der CANTORschen Darstellung die Tolletrechnung als einen der letzten Ausläufer des Stammbruchrechnens zu bezeichnen. Dagegen ist die Tolletrechnung richtig auseinandergesetzt in L. L. JACKSONS Arbeit: *The educational significance of sixteenth century arithmetic* (New York 1906, S. 27—28).

G. ENESTRÖM.

---

2 : 228, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 193. — **2 : 229**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504—505; **8**$_3$, 1907/8, S. 194.

---

2 : 230. Der Passus: „Die Zeichen + und — erscheinen und werden nicht einmal als neu eingeführt vorgestellt. Es heißt von ihnen nur „was — ist das ist minus und das + das ist mer"" ist irreleitend, weil Herr CANTOR ver-

schweigt, daß Widmans Worte Erläuterungen zu einer Tafel sind, wo die Zeichen + und − vorkommen; Widman hatte daher nicht den geringsten Grund anzugeben, ob die zwei Zeichen neu waren oder nicht. Die Widmansche Tafel

	4 + 5	
	4 − 17	
	3 + 30	
	4 − 19	
	3 + 44	
	3 + 22	
zentner	3 − 11	Lb
	3 + 50	
	4 − 16	
	2 + 44	
	3 + 29	
	3 − 12	
	3 + 9	

hat die nebenstehende Form, und unter den Erläuterungen finden sich (Bl. 72ª der Auflage von 1526) die folgenden: „vnnd was auss − ist, das ist minus . . . vnnd das + das ist meer". Nun drückt sich Widman oft sehr schlecht aus, und die zitierten Worte besagen ganz einfach: „die Zahlen, die in der Tafel nach + stehen, bedeuten Übergewicht; die Zahlen, die in der Tafel nach − stehen, bedeuten Untergewicht". Auf ganz dieselbe Weise ist ein anderer Passus bei Widman zu deuten, nämlich der von J. Tropfke (*Geschichte der Elementar-Mathematik* I, Leipzig 1902, S. 131) angeführte: „darnach addier + vnd − zusam̃" (Bl. 91ª der Auflage von 1526); dieser Passus hat den Sinn: „addiere die Zahlen, die den Überschuß und das Fehlende bezeichnen" (es handelt sich um einen Mann, der in einem Falle zuviel, in einem anderen Falle zuwenig Geld hat).

In seiner Besprechung von Zeuthens *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (siehe Archiv der Mathem. 8_3, 1905, S. 250) behauptet Herr Cantor: „Daß die Zeichen + und − und ihre Aussprache plus und minus erst nach Widman als gewöhnliche Ausdrücke für Addition und Subtraktion angewendet werden, ist irrig. In der zweiten Auflage meiner Geschichte II, 230 ist eine das Gegenteil beweisende Belegstelle abgedruckt." Indessen kann ich nicht umhin, diese Behauptung des Herrn Cantor als zum mindesten höchst irreleitend zu bezeichnen, und zwar aus den folgenden Gründen.

In Widmans Rechenbuch kommt das Wort „plus" überhaupt nicht vor, und das entsprechende deutsche Wort „mehr" wird nur ein einziges Mal mit + identifiziert; wie oben bemerkt worden ist, bedeutet es dann zunächst Übergewicht. Sonst ist das Additionswort immer „und", und wenn „mehr" zuweilen benutzt wird, so kann nicht statt desselben + gesetzt werden. Beispielsweise steht einmal (Bl. 157ᵇ der Auflage von 1526): „Dem ersten gepürt $\frac{2}{3}$ vnd 6 mer", und ein anderes Mal (Bl. 158ª derselben Auflage): „$\frac{2}{3}$ 6 mer". — Das Wort „minus" wird ebenfalls nur in dem oben erwähnten Falle mit − identifiziert und bedeutet dann zunächst Untergewicht. Sonst habe ich das Wort nur ein einziges Mal in Widmans Rechenbuch entdeckt; die Stelle lautet (Bl. 162ª der Auflage von 1526): „vnd kumpt $1\frac{19}{20}$ vnd lengt (?) minuss $\frac{1}{20}$ wann es sollen 2 Fl kummen sein", und hier kann es wohl nicht mit − vertauscht werden (freilich handelt es sich um eine negative Korrektion).

Es ist also unrichtig, daß die Wörter „plus" und „minus" bei Widman als gewöhnliche Ausdrücke für Addition und Subtraktion vorkommen.

In betreff des Zeichens + ist zu bemerken, daß es bei Widman nicht in erster Linie Additionszeichen ist, sondern „und" bedeutet, so daß es auch an solchen Stellen benutzt wird, wo man es gar nicht als „plus" lesen kann. Als Beleg verweise ich auf Widmans Aufgabe „Gemenget wein" (Bl. 88ᵇ—91ª der Auflage von 1526). Es handelt sich um ein Problem, das den zwei Gleichungen $5x + 10y = 7(x + y)$, $x + y = 1$ entspricht, so daß die gesuchten Zahlen $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$ sind. Das Resultat der Lösung drückt Widman auf folgende Weise aus:

Nu addier die zwu übergebliben zal als 2 vnd 3 zusammen werden 5 vnnd die schreyb 2 mal also 5 · 5 vn̄ über der yettliches setz der übergeplibenn zale eine vnnd steet also $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$.

Hier bedeutet $\frac{3}{5} + \frac{2}{5}$ nicht $\frac{3}{5}$ plus $\frac{2}{5}$, sondern $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{5}$. Eine andere Belegstelle hat TROPFKE (a. a. O. S. 131) angegeben.

Bei WIDMAN ist das Zeichen + also nicht ein rein mathematisches Zeichen, und es ist darum irreleitend zu sagen, daß es als gewöhnliches Additionszeichen benutzt wird. Mit ebenso gutem Rechte könnte man sagen, daß jede im Mittelalter angewandte Abkürzung des Wortes „et" als gewöhnliches Additionszeichen diente. Bekanntlich sind ⁊ und ⁊ solche Abkürzungen.

Das Zeichen — bedeutet in WIDMANS Rechenbuch in erster Linie ein Untergewicht oder einen kleineren Abzug, aber an gewissen Stellen entspricht es wirklich unserem Subtraktionszeichen. Unter diesen Stellen hebe ich besonders die folgende hervor, die der Aufgabe „Teilung" (Bl. 156^b—158^b der Auflage von 1526) gehört:

Itē drey gesellen teylenn 100 Fl vn̄ der erst sol haben $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ vnnd der and $\frac{1}{4} - \frac{1}{5}$ vnd der drit $\frac{1}{5} - \frac{1}{6}$.

Hier bedeutet wirklich $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ genau $\frac{1}{3}$ minus $\frac{1}{4}$, denn es handelt sich darum, 100 in drei Teile zu teilen, die sich wie $\frac{1}{12} : \frac{1}{20} : \frac{1}{30}$ verhalten. Eine andere Stelle findet sich in der „Regula lucri" (Bl. 103^b der Auflage von 1526), wo für $\sqrt{600} - 20$ „die wurtzel von 600 — 20" steht.

Bei WIDMAN kommt also das Zeichen — zuweilen als gewöhnliches Subtraktionszeichen vor, aber es wird nicht regelmäßig benutzt, und der Leser kann nicht einmal ersehen, wann und wie es zur Anwendung kommen soll.

Aus dem Vorangehenden dürfte ersichtlich sein, daß die von Herrn CANTOR beanstandete Angabe des Herrn ZEUTHEN *wesentlich* richtig ist, wenn man mit Herrn CANTOR nur gedruckte Schriften (d. h. WIDMANS Rechenbuch) in Betracht zieht; durchaus richtig wird die Angabe unter dieser Voraussetzung, wenn man vor den Worten „als gewöhnliche Ausdrücke" das Wort „regelmäßig" einschaltet. Eine noch offene Frage ist dagegen, wann überhaupt das Zeichen — zuerst regelmäßig als Subtraktionszeichen angewendet wurde (vgl. BM **8**$_3$, 1907/8, S. 199).

G. ENESTRÖM.

2:230, 232, 234, 237, 238, 240, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 195—199. — **2:242,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **8**$_3$, 1907/8, S. 199—200. — **2:243,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505; **6**$_3$, 1905, S. 398; **7**$_3$, 1906/7, S. 382; **8**$_3$, 1907/8, S. 200. — **2:245,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 383. — **2:246,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 283; **8**$_3$, 1907/8, S. 200. — **2:247,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 383—384. — **2:249,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 200—201. — **2:250,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2:253,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 353. — **2:273,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 505. — **2:274,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2:281,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 411. — **2:282, 283,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 506; **2**$_3$, 1901, S. 353—354.

2: 284. Nach der verbesserten Ausgabe von CURTZE sollte in die Fußnote 1) „dum operationem mercantium operarem" statt „dum operationes mercantiarum exararem" gesetzt werden. Wie in diesen Worten des BIANCHINI „ein neues Zeugnis, daß in Italien die Algebra kaufmännische Übung war",

liegen kann, ist mir unverständlich. Es wäre wohl ziemlich leicht, in *jedem* Lande einige *Mathematiker* aufzufinden, die sich gleichzeitig mit Algebra und mit deren Anwendung auf die Lösung kaufmännischer Fragen beschäftigt haben.

G. Eneström.

2 : 284, 286, 287, 289, 290, 291, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 304,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 201. — **2 : 305,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88. — **2 : 313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 314,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384.

2 : 318. Die Frage: „Woher mag Paciuolo diese untere Grenze [d. h. $3\frac{1}{8}$] gekannt haben, die allerdings der Ungleichung $3\frac{1}{8} < \pi < 3\frac{1}{7}$ genügt?" sowie die folgende Bemerkung: „Wir sehen keinerlei Antwort auf diese nicht unwichtige Frage" sollte meines Erachtens gestrichen werden. Paciuolo sagt: „Archimede . . . nel suo terzo libro proua (parlando de dimensione circuli) proportionem diametri ad circumferentiam maiorem esse quam triplam sexquioctauam . . .". Aber „terzo libro" ist wohl ein Schreibfehler statt „terza proposizione", und da Archimedes im dritten Satze des Traktates *De dimensione circuli* beweist, daß $\pi > 3\frac{10}{71}$, so konnte ja Paciuolo selbst hieraus unmittelbar folgern, daß $\pi > 3\frac{1}{8}$ sein muß. Höchst wahrscheinlich hat Paciuolo $3\frac{1}{8}$ statt $3\frac{10}{71}$ gesetzt, lediglich um einen einfacheren Bruch zu bekommen. Bekanntlich kommt bei Vitruvius nach dem verbesserten Text der Wert $3\frac{1}{8}$ nicht vor (vgl. die *Vorlesungen* $\mathbf{1}^3$, S. 544).

G. Eneström.

2 : 319, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 201—202. — **2 : 320,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88—89. — **2 : 322,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 202—203. — **2 : 325,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 328,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 339,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 351,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 203. — **2 : 360,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314. — **2 : 375,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 75. — **2 : 379,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 395,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 211. — **2 : 398,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 204.

2 : 398. In der ersten Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen* gab Herr Cantor (S. 365) als Druckjahr des Rudolffschen Rechenbuches 1526 an, aber in die zweite Auflage hat er 1532 statt 1526 eingesetzt, freilich mit der Bemerkung: „die Vorrede ist allerdings schon von 1526". Indessen ist in diesem Falle die Änderung unbegründet, denn in Wirklichkeit ist das Rechenbuch zum erstenmal im Jahre 1526 erschienen, und ein Exemplar dieser ersten Auflage besitzt die Kgl. Bibliothek in Berlin. Nach einer Mitteilung des Herrn G. Valentin gebe ich den genauen Titel derselben wieder:

> Kunstliche Rechnung ‖ mit der ziffer vnd mit den zalpfenni ‖ gen/ daraus/ nit allain alles so sich in gemainen ‖ kaufmans hendeln zuetregt/ sunder auch was zu ‖ silber vn̄ goldt rechnung/ was zu schickhung ‖ des tegels/ was aynem muntzmaister: rechnung ‖ belangend: zugehorig/ baide durch ‖ die Regel

de tre (auch nicht vn sundere || vortail) vnd die Welhisch prac- tick auszt-zurichten/ gelernnt wirt. Zu Wieñ in Oster- reich allen liebhabern dieser kunst zu ge- || maynem nutz/ durch Christof || fen Ruedolf || verfer- || tigt. Getruckt zu Wieñ/ im || Jare nach der geburth || Christi. 1526. mit F. D. gnad vnd Privilegien.

Oktav, 112 unnumerierte Blätter (= Bogen A—O, je aus 8 Bl. bestehend); am Ende der letzten Seite steht: „Anno MDXXVj. getruckt zu Wieñ in Osterreich durch Joannem Singriener.“ Die Vorrede ist „Geben zu Wieñ am 26. Junij. Als mā zalt nach Christi geburt 1526.“ — Im Berliner Exemplar fehlen die Bl. A_4, A_5 ganz und von B_1—B_8 sind nur Bruchstücke vorhanden.

Die zweite Auflage des Rechenbuches ist die von Herrn Cantor erwähnte aus dem Jahre 1532. Auch von dieser Auflage besitzt die Kgl. Bibliothek in Berlin ein Exemplar, dessen Titel ich ebenfalls nach der oben zitierten Mitteilung des Herrn G. Valentin bringe:

Künstliche rech || nung mit der ziffer vñ mit den zalpfennigē/ sampt || der Wellischen practica/ vnd || allerley vorteil auff die Re || gel de Tri Item vergleichung mancherley || Land vnd Stet/ gewicht/ eln- || masz/ müntz &c. Alles durch Christoffen Rudolf zu || Wieñ verfertiget. MDXXXII.

Oktav, 120 unnumerierte Blätter (= Bogen A—P, je aus 8 Bl. bestehend); auf der letzten Seite steht: „Getruckt zu Nürenberg bey Johan Petreio im jar nach der geburt Christi M.D.XXXII. — Von Bl. O_3^b an „Wechsel vnd verkerung einer Mass, Gewicht vnd müntz &c. in die ander“, was in der ersten Ausgabe fehlt. — Das Vorwort ist auch hier vom 26. Juni 1526 datiert.

Nach einer Mitteilung des Herrn D. E. Smith gibt es in New York eine Ausgabe Nürnberg 1534; ein Exemplar dieser Ausgabe ist auch im *Catalogo della biblioteca del principe D. Baldassare Boncompagni* (I, Rom 1895, S. 486) verzeichnet.

Wie Herr Cantor richtig angibt, gibt es auch eine Auflage von 1540; der Titel dieser Auflage, von der ich ein Exemplar besitze, lautet:

Künstliche rech || nung mit der ziffer vnd mit || den zal pfenningē/ sampt || der Wellischen Practica/ vnd allerley forteyl auff || die Regel de Tri. || Item vergleichung manch- || erley Land vñ Stet/ gewicht/ Elnmas/ Münz &c. Alles durch Chri- | stoffen Rudolff zu Wien verfertiget. 1540.

Oktav, 120 unnumerierte Blätter (= Bogen A—P, je aus 8 Bl. bestehend); die letzte Seite ist leer, am Ende der vorletzten Seite steht: „Getruckt zu Nürmberg bey Johañ Petreo, Anno M.D.XL. — Datierung des Vorwortes wie in der ersten Auflage.

Außer den zwei schon zitierten Auflagen besitzt die Kgl. Bibliothek in Berlin noch andere von 1537, 1546, 1550 und 1557, alle in Nürnberg gedruckt.

Nach dem oben zitierten Kataloge hat Boncompagni Auflagen von 1553 und 1574 besessen; nach Chasles' Bücherkatalog (*Catalogue de la bibliothèque . . . de M. Chasles*, Paris 1881, S. 206) gibt es auch eine Auflage von 1566. Ob eine von Herrn Valentin nach einem Antiquariatskatalog verzeichnete Auflage von 1561 wirklich existiert, weiß ich nicht; ebensowenig kenne ich die von Unger (*Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung,* Leipzig 1888, S. 53) zitierte Auflage von 1588.

G. Eneström.

2 : 398. In der Fußnote 3) behauptet Herr CANTOR, daß CHR. RUDOLFF im Jahre 1540 noch lebte, aber einen Beleg hierfür gibt er nicht direkt. Dagegen kann man aus einer Bemerkung des Textes schließen, daß Herr CANTOR ohne weiteres annimmt, RUDOLFF habe selbst die 1540 erschienene Auflage seines Rechenbuches herausgegeben. Aber diese Annahme ist ganz gewiß unbegründet, denn die Auflage enthält kein einziges Wort, das darauf hindeutet, daß sie von RUDOLFF selbst herrührt. Im Gegenteil bin ich geneigt anzunehmen, daß sie ohne Genehmigung des Verfassers vom Buchdrucker JOHANN PETREIUS in Nürnberg herausgegeben wurde. Daß RUDOLFF damals schon gestorben war, scheint mir nicht unwahrscheinlich, denn die Worte „etiam iam in Christo quiescentem“ (*Arithmetica integra*, Bl. 226[b]), worauf ich in einer früheren Bemerkung (BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 204) hingewiesen habe, kommen in einem Briefe von STIFEL an MILICH vor, der vom 2. Januar 1543 datiert ist, und aus den Stellen der *Arithmetica integra*, wo sich STIFEL über RUDOLFF äußert, bekommt man den Eindruck, daß dieser schon seit einigen Jahren gestorben war.

Daß RUDOLFF beabsichtigte, selbst eine neue, verbesserte und ergänzte Auflage seiner Algebra zu besorgen, geht aus einer Stelle seines Rechenbuches hervor, die ich hier nach der Auflage von 1540 (Bl. Oij[b]) zum Abdruck bringe:

> Solche kunst [d. h. verallgemeinerte Wurzelausziehung] vorhin nit getruckt, vn̄ meinem bedunckē nach von wenigen berürt, wil ich hiemit verheissen in meiner corrigirten vnd gebesserten Coss kurtzlich an tag zugeben, Vnd die zwispaltig rede bey der sechstē regel der Coss durch mich vorhin aussgangen hiemit auffgehebt haben.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 399, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107—108; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 204—205. — **2 : 401, 405,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 89. — **2 : 413, 419,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 205—206. — **2 : 420,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 83, 206. — **2 : 421, 422,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 206. — **2 : 425,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 426,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 427,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314—315; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 428,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 208.

---

2 : 428. Der Z. 19—21 zitierte Passus: „so ist ein Zeychen . . .“ rührt gar nicht von RUDOLFF her, sondern ist von STIFEL in die Neuausgabe eingefügt. RUDOLFF selbst sagt nur (Bl. Pvii[b] der Originalauflage), nachdem er den Wert $\frac{1}{4}x + 11$ des zweiten Teiles gefunden hat: „Also hastu gefunden die proporcion der zweier teil. Darumb setz den werdt radicis [d. h. x] wz du wilt.“

G. ENESTRÖM.

---

2 : 429, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 208—209. — **2 : 430,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145.

---

2 : 434. Z. 30 wäre es richtiger, „ähnliche Regeln“ statt „die gleichen Regeln“ zu setzen. Die Regeln des RUDOLFFS beziehen sich nämlich auf die Zahlen 2, 3, 5, 10 (nicht 9), wie UNGER an der von Herrn CANTOR zitierten Stelle richtig angibt und aus dem folgenden Auszug aus der *Künstlichen rechnung* (Ausgabe 1540, Bl. Cvi[a]) hervorgeht:

Merck, kein zal lasst sich gar auffhebē mit 2, sie sey dan̄ gerad. Kein zal lasst sich auffhebē mit 3 sie hab dan̄ in der prob vō 9 ein 0, 3 oder 6. Kein zahl lasst sich auffhebē mit 5, sie hab dan̄ an der ersten statt ein 0 oder 5. Entlich kein zal lasst sich auffheben mit 10, sie hab dan̄ vorna ein 0.

Da ich oben auf Unger Bezug genommen habe, so erlaube ich mir zu bemerken, daß seine von Herrn Cantor nicht benutzte Angabe: „Rudolff gibt . . . in der Coss [Kennzeichen] für sämtliche Teiler von 2 bis 10“ unrichtig oder wenigstens höchst irreleitend ist. Rudolff selbst bringt nämlich in seiner Algebra von 1525 (siehe Bl. Biii[b]—Bv[a]) keine ähnlichen Teilbarkeitsregeln, sondern diese sind von Stifel in die Neuausgabe von 1553—1554 eingefügt worden, und wie Herr Cantor richtig bemerkt, stehen sie schon in der *Arithmetica integra*.

G. Eneström.

2 : 437—438, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 209—210. — **2 : 440,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285.

2 : 441. Auch in Stifels Neuausgabe von Rudolffs Algebra kommt eine Stelle vor, wo Stifel im Vorübergehen eine auf Null gebrachte Gleichung erwähnt, nämlich am Ende des Buches, wo eine Aufgabe, die auf die Gleichung $\frac{4}{12}x - 1 = \frac{5}{12}x - 6$ führt, behandelt wird. Bei der Lösung dieser Gleichung erhält Stifel nämlich nach zwei Operationen „auff einer seyten nichts vnd auff der andern seyten . . . $\frac{1}{12}$𝓍 — 5“, also die Gleichung $0 = \frac{1}{12}x - 5$.

G. Eneström.

2 : 442, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 444,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 449,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140 — **2 : 452,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 454,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242.

2 : 471. Eine kleine, rein bibliographische Angabe könnte vielleicht in die Fußnote 2) eingefügt werden, nämlich daß die Trigonometrie des Kopernikus schon 1867 von C. L. Menzzer übersetzt wurde (*Die Trigonometrie von Copernicus*, übersetzt von Menzzer; Jahresbericht der Bürgerschule in Halberstadt 1867, S. 1—21).

G. Eneström.

2 : 474, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141.

2 : 474. Die Behauptung (Z. 19—20), daß bei der Ausgabe des *Libellus triangulorum* die 13. und 14. Kapitel des 1. Buches der *Revolutiones* „mannigfach von Rhäticus, wie man annehmen muß, abgeändert“ wurden, stimmt nicht mit der Angabe von Braunmühl (*Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* **1**, Leipzig 1899, S. 140—141) überein: „Dieser *Libellus* unterscheidet sich nur in dem angehängten Kanon von der Niederschrift des Coppernicus“. Braunmühl scheint den sehr seltenen *Libellus* selbst in Händen gehabt zu haben.

G. Eneström.

2 : 476, siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 75. — **2 : 479—480,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385; **9**$_3$, 1908, S. 75. — **2 : 481,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **8**$_3$, 1907/8, S. 83. — **2 : 482,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 483,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S 291. — **2 : 484,** siehe

BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 490,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2 : 497,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2 : 503, 505,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292.

---

2 : 506. Die Bemerkung (Z. 15—16): „dieses Positivsein der Koeffizienten bildet die einzige Einengung der goldenen Regel" ist nicht ganz genau. Nachdem Cardano die „Regula aurea" auseinandergesetzt hat, fügt er hinzu: „idem fiet, ubi aequatio sit denominationis alicujus, ad numerum, ac denominationes, ut in exemplis patebit", d. h.: auf ganz dieselbe Weise wird die Wurzel einer Gleichung der Form $x^k = a_1x^n + a_2x^{n-1} + \cdots + a_{n+1}$ gefunden. Die Einengung besteht also darin, daß alle Terme mit Ausnahme eines einzigen dasselbe Zeichen haben. Dann behandelt Cardano die drei Gleichungen

$$x^4 + 3x^3 = 100, \quad x^2 + 20 = 10x, \quad x^3 = 6x + 20,$$

die ja alle von unserem Gesichtspunkte aus Terme mit negativen Koeffizienten enthalten. Freilich stimmt Cardanos Verfahren in betreff der zwei letzten Gleichungen nicht vollständig mit dem überein, das Herr Cantor in seinen *Vorlesungen* „Cardanos goldene Regel" nennt, es sei denn, daß man Terme mit negativen Exponenten zuläßt. — Zuletzt behandelt Cardano die Gleichung

$$x^4 + 6x^2 + 200 = 10x^3 + 12x$$

auf die von Herrn Cantor S. 507 angegebene Weise und bemerkt, daß dasselbe Verfahren auch für die Gleichungen $x^2 + 20 = 10x$, $x^3 = 6x + 20$ angewandt werden könnte.

G. Eneström.

---

2 : 507. Die Worte (Z. 27—30): „welche sie zu ersetzen bestimmt war, und welche von nun an auch wirklich ihren Jahrhunderte hindurch behaupteten Platz in den Lehrbüchern räumt und wahre Näherungsverfahren an ihre Stelle treten läßt" sollten gestrichen werden; sie sind nur insofern von Interesse, als sie zeigen, wie leicht eine Behauptung nicht nur unrichtig, sondern sogar sinnlos werden kann, wenn man sich über Gegenstände äußert, die man nur oberflächlich kennt. Es handelt sich um die Methode des doppelten falschen Ansatzes, und Herr Cantor behauptet, daß diese Methode durch Cardanos „Regula aurea" aus den Lehrbüchern verdrängt wurde. Aber die Methode des doppelten falschen Ansatzes kommt in den Lehrbüchern der Arithmetik vor — sie lehrt ja ein Verfahren, wodurch man ohne Algebra Fragen lösen kann, die eigentlich auf Gleichungen ersten Grades führen —, während sich Cardanos „Regula aurea" bekanntlich auf angenäherte Lösung von Gleichungen höherer Grade bezieht; es ist also geradezu sinnlos, zu behaupten, daß jene Methode durch die „Regula aurea" ersetzt wurde. In Wirklichkeit kommt in den gewöhnlichen Lehrbüchern der Arithmetik die Methode des doppelten falschen Ansatzes auch nach 1545 ganz wie früher vor. Als Beleg verweise ich auf die weitverbreitete Arithmetik des Clavius, wo die Methode in der Auflage von 1585 nicht weniger als 37 Druckseiten in Anspruch nimmt (*Epitome arithmeticae practicae,* Rom 1585, S. 233—269); sogar Stevin lehrt die Methode in seiner *Practique d'arithmétique* (siehe *Oeuvres mathématiques,* éd. Girard, Leyde 1634, S. 204—206). Auf der anderen Seite scheint die „Regula aurea" des Cardano in den Lehrbüchern der Algebra kaum gelehrt worden zu sein; beispielsweise kommt in Clavii *Algebra* (Rom 1608) überhaupt nichts vor in betreff der angenäherten Lösung

von Gleichungen, und die Verfasser, die sich wirklich mit diesem Gegenstande beschäftigten (z. B. STEVIN, VIÈTE), scheinen nicht von CARDANO beeinflußt zu sein. Meines Wissens gibt es keinen Umstand, der darauf hindeutet, daß die Veröffentlichung von CARDANOS „Regula aurea" auf irgendwelche Weise epochemachend in der Geschichte der Annäherungsmethoden der Theorie der Gleichungen gewesen ist.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 509, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 524,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 90. — **2 : 527,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 529,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91. — **2 : 530,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 531,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212. — **2 : 532,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 292; **8**$_3$, 1907/8, S. 84.

---

2 : 532. In einer Arbeit wie die CANTORschen *Vorlesungen*, die wenigstens ebensosehr eine Geschichte der *Mathematiker* als eine Geschichte der *Mathematik* ist, verdient meines Erachtens der 140. Satz des *Opus novum de proportionibus* (S. 133—136 der Originalausgabe von 1570) besondere Beachtung, weil sein Inhalt für CARDANO charakteristisch ist: eine bunte Sammlung von altem und neuem, von brauchbaren Methoden und wilden Vorschlägen. Es handelt sich um angenäherte Wurzelausziehung, und für diesen Zweck schlägt CARDANO fünf verschiedene Verfahren vor.

Das erste Verfahren ist das gewöhnliche mit sukzessivem Anhängen von Nullen und das zweite Verfahren entspricht der Formel $\sqrt{a^n - b} = a - \frac{b}{n a^{n-1}}$, also eine Verallgemeinerung der alten Formel $\sqrt{a^2 - b} = a - \frac{b}{2a}$ für beliebige Wurzeln; bekanntlich trifft man schon vor CARDANO eine ähnliche Verallgemeinerung der Formel $\sqrt{a^2 + b} = a + \frac{b}{2a+1}$ bei INITIUS ALGEBRAS (siehe M. CURTZE, Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. **13**, 1902, S. 603) und bei J. SCHEYBL (siehe H. STAIGMÜLLER, Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. **9**, 1899, S. 465). Durch fortgesetzte Anwendung dieses zweiten Verfahrens gelangt CARDANO zu noch besseren Näherungswerten.

Das dritte Verfahren nennt CARDANO selbst „subtilior" und „nobilis". Es besteht darin, daß man, um z. B. die Kubikwurzel aus 5 zu ziehen, zuerst $\sqrt{5}$ und $\sqrt[4]{5}$ berechnet und dann zwischen die zwei berechneten Zahlen zwei mittlere Proportionalen einsetzt. Dann ist die kleinere dieser Zahlen die gesuchte Kubikwurzel aus 5. Daß die Regel richtig ist, sieht man sofort, weil

$$5^{\frac{1}{4}} : 5^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}} : 5^{\frac{5}{12}} = 5^{\frac{5}{12}} : 5^{\frac{1}{2}},$$

aber die Einschiebung der Mittelzahlen ist ja eigentlich nur eine versteckte Kubikwurzelausziehung. Freilich behauptet CARDANO selbst, daß diese Einschiebung „facile erit sensim procedendo" und fügt hinzu: „quomodo inveniantur facillime illi termini, docui in libro sexto operis perfecti", von welchem Buche bekanntlich nur ein Bruchstück aufbewahrt ist.

Das vierte Verfahren besteht wesentlich darin, daß man den Satz

$$\frac{a-1}{b-1} < \frac{a}{b} < \frac{a+1}{b+1} \quad (a < b)$$

benutzt um aus einem berechneten Näherungswert einen noch besseren zu bekommen, und das fünfte Verfahren entspricht der Formel $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{ab^{n-1}}}{b}$, also eine einfache Verallgemeinerung der alten Formel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$.

G. Eneström.

---

2 : 535, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 536,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 539,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 293. — **2 : 541,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 547,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 84 — **2 : 548,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2 : 549,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355; **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2 : 554,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2 : 558,** siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2 : 561,** siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S 285. — **2 : 566,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 85. — **2 : 567, 568,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 569,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576.** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207; **8**$_3$, 1907/8, S. 85—86. — **2 : 582,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 593,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108; **8**$_3$, 1907/8, S 211. — **2 : 605,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 86. — **2 : 610,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 388. — **2 : 611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **8**$_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 612—613,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306; **7**$_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906/7, S. 214, 389; **8**$_3$, 1907/8, S. 86—87; **9**$_3$, 1908, S. 77. — **2 : 622,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87. — **2 : 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2 : 639,** siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 77. — **2 : 642,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271.

---

2 : 666. Da die gewöhnlichen Angaben in betreff der neuen Auflagen von Schwenters praktischer Geometrie unrichtig oder unvollständig sind (Herr Cantor sagt nur, daß die Arbeit mehrfach wiederholt im Drucke erschien), so bringe ich hier genauere Aufschlüsse hinsichtlich derselben.

Die erste Auflage, die den Titel *Geometria practica nova* hatte, erschien zu Nürnberg bei Simon Halbmayer in vier besonderen Traktaten, von denen der erste wahrscheinlich 1618, der zweite wahrscheinlich 1617, der dritte 1618 und der vierte 1627 erschien (vgl. BM. 8_3, 1907/8, S. 88—89).

Die zweite Auflage erschien zu Nürnberg bei Simon Halbmayer wahrscheinlich 1623—1626, aber bestand nur aus drei besonderen Traktaten, weil der vierte zuerst 1627 herausgegeben wurde. Die drei Traktate haben alle den Titel *Geometria practica nova et aucta.* Der erste Traktat, der kein Druckjahr trägt, aber nach dem Chronogramm der Dedikationsschrift wahrscheinlich

1625 erschien, hat auf dem Titelblatt die Angabe: „zum andernmal revidirt vnnd gemehrt“. Der zweite Traktat, der ebenfalls kein Druckjahr trägt, aber wahrscheinlich 1623 (die Dedikationsschrift ist vom 15. September 1623 datiert) erschien, hat auf dem Titelblatt die Angabe: „auffs newe durchsehen, gemehrt vnd gebessert“. Der dritte Traktat hat auf dem Titelblatt die Angabe: „zum andernmal durchsehen und gemehret“, und ist nach dem Chronogramm der Dedikationsschrift wahrscheinlich 1626 erschienen.

Die dritte Auflage erschien zu Nürnberg bei Jeremias Dümler und besteht ebenfalls aus vier besonderen Traktaten. Am Ende des vierten Traktates steht: „Gedruckt vnd verlegt zu Nürnberg, bey Jeremia Dümlern. Im Jahr Christi M.DC.XXXXI“, und da die Datierungen der Dedikationsschriften der drei ersten Traktate nicht geändert sind, so hat man keinen bestimmten Grund anzunehmen, daß diese vor 1641 erschienen. Auf dem Titelblatt hat der erste Traktat: „zum dritten mal revidirt vnd gemehrt“, der zweite Traktat: „auffs newe durchsehen, gemehret vnd gebessert“, der dritte Traktat: „zum dritten mal durchsehen vnd gemehret“. Der vierte Traktat hat auf dem Titelblatt kein Wort, das andeutet, daß eine neue Auflage vorliegt; nicht einmal die Worte „Geometriae practicae“ sind durch „auctae“ ergänzt.

Die vierte Auflage erschien 1667 zu Nürnberg bei Endter, und hier sind die vier Traktate in ein einziges Buch vereinigt, dessen langer Titel beginnt: „M. Daniel Schwenters Geometriae practicae novae et auctae libri IV“. Als Herausgeber wird auf dem Titelblatt Georg Andreas Böckler genannt.

Von den drei ersten Traktaten der ersten Auflage, sowie von der ganzen dritten Auflage besitze ich selber Exemplare. Der vierte Traktat der ersten Auflage, die drei Traktate der zweiten Auflage, sowie die vierte Auflage finden sich in der Königlichen Bibliothek in Berlin.

G. Eneström.

---

2 : 666, 667, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 88—89. — **2 : 669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 687,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 391; **8**$_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **7**$_3$, 1906/7, S. 394—395.

---

2 : 699. Über Benedetto Castelli hat A. Favaro kürzlich eine besondere Schrift veröffentlicht (Venedig 1908, 130 Seiten 8° mit Porträt), worin er (S. 4) nachweist, daß die gewöhnliche Angabe in betreff des Geburtstags des Castelli auf einer Verwechselung beruht. Nach einem in Brescia aufbewahrten „Liber baptizatorum“ wurde nämlich am 24. Juni 1577 ein Gio. Antonio Castelli geboren, und in Wahrheit hatte der Mathematiker Castelli ursprünglich den Vornamen Antonio. Auf der anderen Seite hieß dieser nicht Giovanni, und aus den Angaben über die Eltern des am 24. Juni 1577 geborenen Kindes ersieht man, daß es sich nicht um den Mathematiker Castelli handelt. Dagegen weiß man, daß dieser 1588 zehn Jahre alt war, also entweder 1577 oder 1578 geboren ist, vermutlich nicht in Brescia, sondern zu Trenzano oder Botticino-Sera.

Daß sich Castelli auch mit Fragen der reinen Mathematik beschäftigte, wußte man teils aus seinem Briefwechsel mit Galilei aus dem Jahre 1635, teils aus einem von B. Boncompagni (Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **11**, 1878, S. 664—665) veröffentlichten Verzeichnis von Castellis ungedruckten

Schriften. Unter diesen Schriften findet sich nämlich „Lezione nella quale si risolvono alcuni quesiti d'algebra giudicati d'impossibile soluzione" und „Solutio quaestionum algebrae, methodo inventa a B. CASTELLI". Auf Grund der Titel könnte man versucht sein anzunehmen, daß es sich um wesentlich neue Methoden handelt, aber die Auszüge, die FAVARO in seiner oben erwähnten Abhandlung (S. 88, 106—111) mitteilt, bestätigen kaum diese Annahme, denn die „unlösbaren" Probleme sind solche, die sofort gelöst werden, wenn man wie CASTELLI negative Werte der gesuchten Größen zuläßt. Wenig wichtig ist auch CASTELLIS Nachweis, daß die Gleichung $\frac{a+x}{b+x} = \frac{c}{d}$ zuweilen positive, zuweilen negative Werte für x geben kann, und daß x positiv sein kann, auch wenn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Die allgemeine Lösung $x = b\,\frac{\frac{a}{b} - \frac{c}{d}}{\frac{c}{d} - 1}$, die sofort alle Aufschlüsse gibt, scheint er also nicht gekannt zu haben.

Auch die von FAVARO (S. 111—113) mitgeteilte Lösung eines geometrischen Problems (die bekannte Aufgabe der zwei Türme des LEONARDO PISANO, siehe *Liber abbaci*, ed. BONCOMPAGNI S. 398) enthält kaum etwas, das im Jahre 1635 neu war (vgl. A. GIRARD, *Invention nouvelle en l'algèbre*, Amsterdam 1629, Bl. F 3^b), obgleich CASTELLI selbst großes Gewicht darauf legt, daß er die Fälle, in denen die gesuchte Größe negativ wird, berücksichtigt hat.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 700, 701, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 703,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271—272; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 704, 705,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 272—273. — **2 : 712,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212—213. — **2 : 714,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 715,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 287; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 726,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90. — **2 : 727,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 173; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88.

---

2 : 763. Die Schreibweise CATALDIS in betreff der Kettenbrüche ist nicht ganz genau wiedergegeben. In Wirklichkeit setzt CATALDI das Zeichen & ganz so wie wir das Pluszeichen setzen, und überdies hat er vor jedem & einen Punkt. Seine Schreibweise ist also

$$4 \cdot \& \frac{2}{8 \cdot \& \frac{2}{8 \cdot \& \frac{2}{8 \cdot \&}}}.$$

Bei der vereinfachten Schreibweise benutzt er ebenfalls Punkte, aber nicht ganz wie Herr CANTOR angibt, sondern auf folgende Weise:

$$4 \cdot \& \frac{2}{8} \cdot \& \frac{2}{8} \cdot \& \frac{2}{8}.$$

G. ENESTRÖM.

---

2 : 765, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,**

siehe BM 4_3, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM 2_3, 1901, S. 358; 7_3, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 773,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 213.

---

2 : 773. Die Beschränkung, daß *a*, *b*, *c* . . . untereinander teilerfremde Zahlen sind, kommt nicht bei BACHET vor, und folglich zieht er auch nicht das Produkt *abc* . . ., sondern den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus von *a*, *b*, *c* . . . in Betracht. Bei BACHET lautet nämlich der Satz (S. 44 der Ausgabe von 1624) wörtlich:

> Plusieurs nombres estant donnez, si l'on prend le plus petit nombre mesuré par eux, on ne pourra pas treuuer deux diuers nombres moindres que luy, desquels ostant chascun des nombres donnez tant de fois qu'on pourra, il reste les mesmes nombres d'vn costé et d'autre.

In der Bearbeitung von A. LABOSNE (3^e éd., Paris 1874, S. 225) lautet der Satz:

> Si l'on divise par plusieurs nombres chacun des nombres moindres que leur plus petit commun multiple, les systèmes de restes qu'on obtiendra seront tous différents les uns des autres.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 775, siehe BM 2_3, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM 2_3, 1901, S. 148; 3_3, 1902, S. 204. — **2 : 780,** siehe BM 9_3, 1908, S. 78.

---

2 : 780. Der Passus: „Eine zweite Frage . . . ist die nach dem Zwecke und der Verbreitungsart der *Relation des decouvertes en la science des nombres*. Die Vermutung spricht dafür, daß sie in zahlreichen Abschriften umlief" war schon bei dem Erscheinen der 1. Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen* ein paar Jahre zu alt. Die Handschrift des von Herrn CANTOR benutzten Abdruckes der *Relation* gehört, wie HENRY selbst bemerkt, der „Sammlung HUYGENS" in Leiden an, und schon 1889 wurde das Aktenstück in den *Oeuvres complètes* von HUYGENS (Tome 2, S. 458—462) noch einmal zum Abdruck gebracht. Hier wird die *Relation* ausdrücklich als Beilage zu CARCAVYS Brief vom 14. August 1659 bezeichnet, und durch HUYGENS' Brief vom 4. September 1659 (a. a. O. S. 474) wird die Richtigkeit dieser Angabe bestätigt. Schon 1889 wußten also die mathematisch-historischen Forscher bestimmt, daß wenigstens zwei Abschriften vorhanden gewesen sind, und daß wenigstens CARCAVY und HUYGENS 1659 von der *Relation* Kenntnis bekommen hatten. Vor dem Erscheinen der 2. Auflage des 2. Bandes der *Vorlesungen* wurde die *Relation* auch in den *Oeuvres* von FERMAT (Tome 2, Paris 1894, S. 431—436) zum Abdruck gebracht und dort als Brief von FERMAT an CARCAVY vom August 1659 bezeichnet. Es wäre also sehr angebracht gewesen, den oben zitierten Passus unter Bezugnahme hierauf zu modifizieren. Statt dieses Verfahrens begnügt sich Herr CANTOR, die Bemerkung der 1. Auflage: „BACHET muß schon todt gewesen sein, als sie [d. h. die *Relation*] verbreitet wurde" durch die folgende: „BACHET und DESCARTES waren schon todt, als sie 1659 verbreitet wurde" zu ersetzen und als Beleg auf „Tannery im *Bulletin Darboux* XXVIII, 61—62" zu verweisen. Über die Verbreitungsart bekommt man also aus der 2. Auflage der *Vorlesungen* selbst nicht die geringste Auskunft.

G. ENESTRÖM.

2 : 783, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405; **7**$_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 393. — **2 : 791,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 832,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. 208. — **2 : 901,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511. — **2 : 911,** siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 78—79. — **2 : 919,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518; **6**$_3$, 1905, S. 211; **7**$_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512.

---

3 : 18. In betreff des bei Dechales vorkommenden Namens Nicostratus erlaube ich mir zu bemerken, daß dieser Name in Keplers *Astronomia nova* (1609) vorkommt und zwar S. 197 (die Randglosse). In den *Opera omnia*, ed. C. Frisch **3** (Frankfurt 1860), wo diese Arbeit bekanntlich abgedruckt ist, findet sich die fragliche Stelle (als Fußnote) S. 324: „Conchoidea dico non illam Nicostrati [„Nicomedis“ fügt Frisch hinzu] . . . sed illam quae similis est conchoidi Nicostrati“. Es wäre also angebracht, die Bemerkung des Herrn Cantor: „Es gehört fast eine gewisse Phantasie dazu, den Namen Dinostratus hier zu erkennen“ zu streichen. G. Eneström.

---

3 : 22, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 297—298; **8**$_3$, 1907/8, S. 91. — **3 : 24,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399.

---

3 : 25. Auf Grund eines Mißverständnisses habe ich in einer früheren Bemerkung (BM **4**$_3$, 1903, S. 399) angegeben, daß die zweite Auflage von Ph. Ronaynes Algebra in zwei Bänden erschien. Auf dem Titelblatt steht freilich „In two books“, aber dieselben Worte finden sich auf dem Titelblatt der ersten Auflage, und auch die zweite Auflage besteht aus einem einzigen Bande ((8) + V + (3) + 461 S. 8°). Das erste Buch enthält Algebra und Arithmetik, das zweite Trigonometrie und Planimetrie, sowie Lösungen einiger Probleme aus der höheren Geometrie. G. Eneström.

---

3 : 26, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 37,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 63,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 299. — **3 : 70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360. — **3 : 78,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92. — **3 : 82,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 97,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149; **7**$_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S 318; **7**$_3$, 1906/7, S. 300.

---

3 : 102. Die Angabe, daß PRESTET mutmaßlich zuerst eine Rekursionsformel für $\Sigma(a + nr)^m$ aufgestellt hat, ist unter Bezugnahme auf die Bemerkung zu **2** : 911 (BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 78—79) zu modifizieren.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 112, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209—210; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318. — **3 : 116,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S 518. — **3 : 118,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3 : 122,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 244—245,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S 304. — **3 : 303,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 364,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S 94. — **3 : 367,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 308 — **3 : 382,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319. — **3 : 397,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 305—306; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3 : 408,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 306.

---

3 : 427. Die Ansichten des Verlegers des HÔPITALschen *Traité analytique des sections coniques* in betreff der Frage, wer eine Vorrede zu einem wissenschaftlichen Werke schreiben könne (siehe Z. 5—7), dürften für die Geschichte der Mathematik von so geringem Belang sein, daß sie mit Stillschweigen übergangen sein könnten. Übrigens ist der Bericht des Herrn CANTOR nicht ganz genau, denn der Verleger sagt: „Le manuscrit en étoit sans preface, que ce seul auteur pouvoit bien faire" und daraus dürfte nicht hervorgehen, daß nach dem Verleger: „eine Vorrede nicht wohl von jemand anderem als dem Verfasser eines Werkes geschrieben werden kann", vielmehr besagen die Worte, daß nur HÔPITAL zu seinem Werke eine g u t e Vorrede hätte schreiben können.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 447, 455, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 154—155; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401.

---

3 : 476. Der Umstand, daß RICCATIS Aufsatz im 8. Supplementbande der A c t a e r u d i t o r u m schon im Novemberhefte 1723 der Zeitschrift erwähnt wird, beweist nicht allein (siehe Fußnote 1), daß der fragliche Aufsatz vor 1724 in die Öffentlichkeit gelangte, denn es kommt bekanntlich nicht selten vor, daß Zeitschriftenhefte verspätet erscheinen. Aber in diesem Falle gibt es andere Umstände, die die CANTORsche Behauptung bestätigen. Der 8. Supplementband der A c t a e r u d i t o r u m besteht nämlich aus 12 Lieferungen („Sectiones"), und RICCATIS Aufsatz findet sich schon in der 2. Lieferung. Nun trägt der 7. Supplementband der A c t a e r u d i t o r u m die Jahreszahl 1721, und da 1724

die 12. Lieferung des 8. Supplementbandes erschien, so ist es fast sicher, daß die 2. Lieferung dieses Bandes spätestens 1723 herausgegeben wurde.

G. Eneström.

---

3 : 477, 479, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95. — **3 : 497, 498,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72.

---

3 : 571. In einer früheren Bemerkung (siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72) habe ich erwähnt, daß Maclaurin 1742 das Maximum des Ausdruckes

$$xy^n z^m \ldots \qquad (x + y + z + \ldots = k)$$

bestimmt hat. Aber in einem kürzlich erschienenen Aufsatze (siehe Mathesis $\mathbf{8}_3$, 1908, S. 207) bemerkt Herr A. Aubry:

> Müller (*A Mathematical Treatise*, Londres, 1736) a traité la recherche du maximum de $x^f y^g \ldots (a - x - y - \ldots)^h$, par le calcul différentiel.

Hieraus sollte also folgen, daß schon 6 Jahre vor Maclaurin ein anderer englischer Mathematiker eine Lösung der betreffenden Frage veröffentlicht hätte. Aber in Wahrheit ist die Bemerkung des Herrn A. Aubry unrichtig; vielleicht hat er die französische Übersetzung der von ihm zitierten Arbeit eingesehen, die 1760 in Paris erschien und deren Titel lautet: *Traité analytique des sections coniques, fluxions et fluentes. Avec un essai sur les quadratures, et un traité du mouvement. Par M. Muller ... traduit de l'Anglois par l'Auteur* (IX + 420 S. 4⁰). Hier wird nämlich S. 79—80 („Exemple II") das von Herrn Aubry erwähnte Problem gelöst. Aber im englischen Original (*A mathematical treatise: containing a system of conic-sections; with the doctrine of fluxions and fluents applied to various subjects ... by John Muller*, London 1736, (4) + IV + (4) + 227 S. 4⁰) fehlt dies Beispiel; das „Exemple II" (S. 84) lautet nämlich: „Of all rectangles *PMmp*, that may be inscribed in a semi-circle *AMma*, to find the greatest". Daß das 2. Beispiel der französischen Übersetzung später eingeschaltet worden ist, kann man leicht sehen, denn das „Problème général" (S. 78) bezieht sich nur auf Funktionen mit *einer einzigen* unabhängigen Veränderlichen. J. Muller (nicht „Müller" wie Herr Aubry schreibt) hat offenbar erst nach der Herausgabe des englischen Originals Gelegenheit bekommen, sich mit dem Maximum des Ausdruckes $x^f y^g \ldots (a - x - y - \ldots)^h$ zu beschäftigen und es ist höchst wahrscheinlich, daß er durch Maclaurins *Treatise of fluxions* dazu angeregt worden ist. Übrigens erschien die französische Übersetzung von Mullers Arbeit erst 5 Jahre nach Eulers *Institutiones calculi differentialis*, wo (Kap. 11 des 2. Teiles) die Frage nach größten und kleinsten Werten von Funktionen mehrerer Veränderlicher systematisch behandelt ist.

G. Eneström.

---

3 : 578, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307. — **3 : 586,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 593,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 214. — **3 : 609,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408. — **3 : 636—637,** siehe

BM **2**$_3$, 1901, S. 441, — **3 : 646—647,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652,** siehe BM **2**$_3$, 1901. S. 446; **5**$_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441—442; **5**$_3$, 1904, S. 207—208, 310. — **3 : 682,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208. — **3 : 689,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442; **8**$_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 692,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 695,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442.

---

3 : 700. Die Angabe, daß MICHELSEN den ursprünglichen zwei Bänden seiner Übersetzung der *Introductio* noch „einen 3. Band Anmerkungen und Zusätze beigefügt, beziehungsweise 1791 folgen lassen" hat, gibt keine richtige Vorstellung von dem wirklichen Inhalt dieses dritten Bandes. „Anmerkungen" zur *Introductio* sind darin überhaupt nicht vorhanden und die angeblichen „Zusätze" sind lauter Übersetzungen von Abhandlungen zur Theorie der Gleichungen. Die meisten dieser Abhandlungen (eine von EULER, fünf von LAGRANGE) rühren aus der Zeit nach 1759 her; nur die erste Abhandlung *Gedanken über die Formen der Wurzeln einer jeden Gleichung* von EULER gehört dem von Herrn CANTOR behandelten Zeitraum an und über das Original (*De formis radicum aequationum cujusque ordinis conjectatio;* Comment. acad. sc. Petrop. **6** [1732/3], 1738, S. 216—231) dieser Abhandlung hat Herr CANTOR S. 574—575 ausführlich berichtet.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 702. Die gekünstelte Herleitung (Z. 7—9) des Wertes der Konstanten A rührt nicht von EULER her. Es handelt sich um Zerfällung einer echtgebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ in Partialbrüche und für diesen Zweck setzt EULER, wie Herr CANTOR richtig angibt, zuerst

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qz} + \frac{P}{S},$$

wo $p - qz$ ein Faktor von N, S der andere Faktor, P eine ganze Funktion von z und A eine Konstante ist. Aber die folgenden Ausführungen der *Vorlesungen:*

> $M = AS + (p - qz) P$, woraus $A = \frac{M-(p-qz)P}{S}$ folgt. Hierin setzt man (weil A eine Konstante ist, darf man das) $p - qz = 0$ und erhält $A = \frac{M}{S_{(p-qz=0)}}$.

finden sich nicht in der *Introductio.* Aus

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qz} + \frac{P}{S}$$

folgert EULER (S. 26—27 der Originalauflage)

$$\frac{P}{S} = \frac{M}{N} - \frac{A}{p-qz} = \frac{M}{(p-qz)S} - \frac{A}{p-qz} = \frac{M-AS}{(p-qz)S},$$

woraus hervorgeht, daß $M - AS$ durch $p - qz$ teilbar sein muß, weil P sonst nicht eine ganze Funktion von z wäre. Also ist

$$M - AS_{(z=p/q)} = 0 \text{ oder } A = \frac{M}{S_{(z=p/q)}}.$$

G. ENESTRÖM.

3 : 722. Aus der Bemerkung (Z. 8—9): „Euler bestätigte in dem . . . folgenden Jahre 1749 D'Alemberts Behauptung [daß jede Funktion einer imaginären Zahl sich auf die Form $A + B\sqrt{-1}$ bringen lassen muß] könnte man glauben, daß das Jahr 1749 für die Behandlung dieser Frage irgendeine Bedeutung hatte. Dies ist indessen nicht der Fall, denn Eulers fragliche Abhandlung war schon 1746 der Berliner Akademie vorgelegt (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 260) und erschien erst 1751. Der Umstand, daß auf dem Titelblatt des 1751 erschienenen Bandes der Berliner Denkschriften das Jahr 1749 vorkommt, ist also durchaus belanglos.

Was Herr Cantor Z. 12—18 über die Geschichte der Logarithmen negativer Zahlen mitteilt, ist sehr unvollständig, aber da die nötigen Ergänzungen unmittelbar aus der Darstellung der Herren Molk und Cartan in der *Encyclopédie des sciences mathématiques* **1** : 1 : 3, Paris 1908, S. 335—336 zu entnehmen sind, verweise ich nur auf diese Arbeit. Dagegen erlaube ich mir zu bemerken, daß es zwei Abhandlungen von Euler über den fraglichen Gegenstand gibt, die freilich zum großen Teil denselben Inhalt haben. Die ältere Abhandlung hat den Titel *Sur les logarithmes des nombres négatifs et imaginaires* und wurde nach den Protokollen am 7. September 1747 der Berliner Akademie vorgelegt (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 261); freilich gibt Euler selbst in seinem Brief an d'Alembert vom 19. August 1747 an (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, S. 141), daß die Abhandlung damals schon eingereicht war. Zum Abdruck gelangte diese Abhandlung zuerst 1862 in der *Opera posthuma* (**1**, S. 269—281). Die zweite Abhandlung hat den von Herrn Cantor angegebenen Titel *De la controverse entre Mrs. Leibniz et Bernoulli sur les logarithmes des nombres negatifs et imaginaires;* sie ist offenbar nach 1747 aber spätestens 1751 bearbeitet und wurde im 5. Bande der Mémoires de l'académie des sciences de Berlin veröffentlicht. Erst in dieser Abhandlung bedient sich Euler der Formel $\log x = \lim_{n=\infty} \left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$.

G. Eneström.

---

3 : 736, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111.

---

3 : 749. Die an sich höchst unwahrscheinliche Angabe, daß G. W. Kraffts Schrift *De infinito mathematico ejusque natura* in Petersburg gedruckt wurde, ist wohl ohne weiteres aus Poggendorff entnommen (Herr Cantor gibt selbst keine Quelle an). In Bobynins Russischer physisch-mathematischer Bibliographie fehlt die Schrift und nach J. Rogg (*Bibliotheca mathematica* I, Tübingen 1830, S. 566) ist sie 1752 als Dissertation in Tübingen erschienen. Wahrscheinlich ist bei Poggendorff das „Ib." lediglich ein Schreibfehler.

G. Eneström.

---

3 : 750, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446.

---

3 : 753. Der Bericht (Z. 18—21) über Eulers Verfahren um das finite Integral eines echtgebrochenen rationalen Ausdruckes von der Form $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ zu

ermitteln, ist für den Mathematiker fast wertlos, weil darin keine Antwort auf die Frage: „Wie berechnete EULER das Integral eines Partialbruches, d. h. eines Bruches von der Form $\frac{1}{x+k}$?“ gegeben wird; dies Integral kann ja nicht in geschlossener Form ausgedrückt werden. Für den Historiker ist der Bericht sogar irreleitend, weil die *Vorlesungen* entweder keine oder wenigstens nur ungenügende Auskunft über die frühere Geschichte der Frage bieten, wie aus dem Folgenden hervorgehen dürfte.

In seiner von Herrn CANTOR S. 385 erwähnten Abhandlung *Traité du calcul des différences finies* (Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1717, S. 7—21) zeigte NICOLE an einem Beispiel (S. 18—20), wie man das finite Integral eines rationalen Ausdruckes von der Form $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ dadurch finden kann, daß man den Ausdruck in die Form

$$\frac{A_1}{x(x+\varDelta x)\cdots(x+(n-1)\varDelta x)}+\frac{A_2}{(x+\varDelta x)\cdots(x+(n-1)\varDelta x)}+\cdots$$
$$+\frac{A_n}{(x+(n-2)\varDelta x)(x+(n-1)\varDelta x)}$$

verwandelt, weil jeder Term des letzteren Ausdruckes unmittelbar integriert werden kann. Gleichzeitig mit NICOLE beschäftigte sich auch MONTMORT mit der Frage und setzte in seiner von Herrn CANTOR S. 384 erwähnten Abhandlung *De seriebus infinitis tractatus* (Philosophical transactions **30**, 1717, S. 633—675) das NICOLEsche Verfahren methodisch auseinander (siehe S. 655—656, 661—662). Auf wesentlich dieselbe Weise wurde die Frage etwas später von STIRLING in der *Methodus differentialis* (1730) behandelt; der Unterschied war nur, daß STIRLING den gegebenen Ausdruck in die Form

$$\frac{A_1}{x(x+\varDelta x)}+\frac{A_2}{x(x+\varDelta x)(x+2\varDelta x)}+\cdots+\frac{A_n}{x(x+\varDelta x)\cdots(x+(n-1)\varDelta x)}$$

verwandelte (vgl. was Herr CANTOR weiter oben S. 649 Z. 11—13 mitteilt).

Einen andern Weg schlug TAYLOR ein in einem Aufsatze, der in den Philosophical transactions unmittelbar (S. 676—689) nach MONTMORTS Abhandlung zum Abdruck gebracht wurde und darum den Titel: *Appendix qua methodo diversa eadem materia tractatur* bekommen hat; dieser Aufsatz scheint nicht von Herrn CANTOR erwähnt zu werden. TAYLOR verwandelte (S. 686—688) den echtgebrochenen rationalen Ausdruck $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ in eine Summe von Brüchen

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{x+b}+\frac{C}{x+c}+\cdots,$$

und wies nach, unter welchen Bedingungen dieser Ausdruck in geschlossener Form integriert werden kann; eine notwendige Bedingung ist, daß die Summe der Zähler der Partialbrüche gleich Null ist, und dies setzt voraus, daß die Differenz der Gradzahlen der zwei Funktionen $f_2(x)$ und $f_1(x)$ wenigstens gleich 2 ist.

Genau die TAYLORsche Zerlegung in Brüche mit linearen Nennern und konstanten Zählern lehrt EULER in seiner Differentialrechnung und die Fort-

setzung des Verfahrens daselbst stimmt wesentlich mit dem Taylorschen überein, obgleich Euler nicht so methodisch wie dieser verfährt. Euler sucht durch wiederholte Anwendung der Formel

$$\Sigma \frac{A_r}{x + a_r} = \Sigma \frac{A_r}{x + a_r + \Delta x} - \frac{A_r}{x + a_r}$$

alle Integralausdrücke mit Ausnahme eines einzigen zu eliminieren; wird dann der Koeffizient dieses Ausdruckes gleich Null, so hat man das gesuchte Resultat gefunden.

Meines Erachtens kann das Eulersche Verfahren, wenigstens vom methodischen Standpunkt aus, eher ein Rückschritt als ein Fortschritt genannt werden, und wenn man nicht die frühere Behandlung der Frage erwähnt, so hat man keinen Anlaß über das Eulersche Verfahren zu berichten; jedenfalls sollte man dabei nicht den wichtigsten Punkt, nämlich die Berechnung der Integrale der Partialbrüche, stillschweigend übergehen. G. Eneström.

---

3 : 753. Hier sollten etwa acht Zeilen (Z. 21—29) entweder gestrichen oder auf andere Weise redigiert werden. Die fragliche Stelle lautet:

> Wir haben einen sehr ausführlichen Auszug aus dem 1. Kapitel [der Eulerschen Differentialrechnung] veranstaltet, weil in ihm erstmalig ein Lehrbuch der Differentialrechnung eine leichtverständliche, wenn auch nicht immer gründliche Lehre von den endlichen Differenzen und Summen zum Ausgangspunkte nahm. Wir glauben wenigstens trotz des Vorausgehens von Taylors *Methodus incrementorum* diesen Ausspruch rechtfertigen zu können, da jenes Werk kaum als leichtverständlich und noch weniger als Lehrbuch der Differentialrechnung wird bezeichnet werden wollen.

Herr Cantor gibt also zu, daß Taylor schon 40 Jahre früher als Euler eine Arbeit veröffentlicht hatte, wo bei der Darstellung der Differentialrechnung die Lehre von den endlichen Differenzen zum Ausgangspunkt genommen wurde, und der Leser muß sich darum fragen: „Aus welchem Grunde berichtet Herr Cantor S. 379 gar nichts über diese Taylorsche Darstellung?". Aus der oben zitierten Stelle kann man keine andere Antwort als die folgende herauslesen: „Weil Taylors *Methodus incrementorum* kein Lehrbuch und außerdem keine leichtverständliche Arbeit war, so daß ein Auszug daraus kaum verständlich gemacht werden kann". Aber diese Antwort ist natürlich sinnlos, denn die Cantorschen *Vorlesungen* sind ja nicht eine Geschichte der mathematischen Lehrbücher, und ebenso sinnlos wäre es, zu behaupten, daß eine Geschichte der Mathematik nur Auszüge aus leichtverständlichen Arbeiten enthalten soll.

G. Eneström.

---

2 : 758, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 759**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760, 766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446—447.

---

3 : 773. Die Frage: „Lag es in Eulers Absicht, ein besonderes Werk, etwa unter dem Titel: Anwendung der Differentialrechnung auf Geometrie, zu

schreiben?" hat EULER selbst in seiner Differentialrechnung dreimal beantwortet und zwar im 11. Kapitel des zweiten Teiles. Hier bemerkt nämlich EULER (ich benutze die Übersetzung von MICHELSEN): „Wie man aber bey jeder gegebenen Funktion erforschen könne, ob sie Größte oder Kleinste der anderen Art habe oder nicht, solches soll in dem folgenden Abschnitte gelehret werden, weil dadurch die Natur der Curven sehr erläutert wird" (§ 282). — „Was die der zweyten Art betrifft, so bleibt die Untersuchung derselben dem folgenden Abschnitte vorbehalten" (§ 283). — „Was außerdem noch von der Natur der größten und kleinsten Werthe zu sagen ist, behalten wir dem folgenden Abschnitte vor, weil solches mittelst Figuren leichter dargestellt und erklärt werden kann" (§ 286). Dieser dritte Abschnitt der Differentialrechnung scheint indessen nicht abgeschlossen worden zu sein; nur die ersten vier Kapitel fanden sich handschriftlich in EULERS Nachlasse und wurden 1862 in der *Opera posthuma* (**1**, S. 342—407) veröffentlicht.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 774, 798, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443. — **3 : 819,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 880,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 882,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143. — **3 : IV** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

Anfragen und Antworten.

138. Über die „Arithmetica" des Jordanus Nemorarius. Bekanntlich wurde die *Arithmetica* des JORDANUS NEMORARIUS schon 1496 von J. LEFÈVRE herausgegeben, und eine neue unveränderte Auflage erschien 1514. Daß LEFÈVRE sich nicht damit begnügte, die ihm zur Verfügung stehende Handschrift zum Abdruck zu bringen, geht aus verschiedenen Stellen seiner Ausgabe hervor. So z. B. sagt er in seinem Widmungsschreiben: „Accipe ... decem Arithmeticae discipline JORDANI ... libellos noua commentationis luce nostris laboribus illustratos", und Bl. aij[a] beginnt: „JORDANI NEMORARII ... elementa arithmetica: cum demonstrationibus JACOBI FABRI STAPULENSIS"; aus der letzten Stelle scheint zu folgen, daß wenigstens einige der Beweise von LEFÈVRE herrühren. Von historischem Gesichtspunkte aus ist es von Interesse zu wissen, welche Beweise dem JORDANUS selbst zuzuweisen sind (vgl. z. B. Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 153), und da ältere Handschriften der *Arithmetica* in fast jeder größeren Handschriftensammlung zu finden sind, bietet die Erledigung dieser Frage keine sehr großen Schwierigkeiten dar. Wünschenswert wäre auch eine Untersuchung des Ms. Paris, fonds Sorbonne 976, das einen von CAMPANUS herrührenden Kommentar der *Arithmetica JORDANI* zu enthalten scheint.

G. ENESTRÖM.

---

139. Über die Zusätze zur zweiten Auflage (1787) von Eulers Differentialrechnung. Im dritten Bande seines *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral* (siehe die 2. Auflage, Paris 1819, S. XII) verweist LACROIX in betreff gewisser Anwendungen der Reihenlehre auf „Supplementum ad

institutiones Calc. Diff. ad calcem voluminis II, Ticini, 1787 (Mascheroni)", woraus hervorzugehen scheint, daß Mascheroni etwas mit der 2. Auflage der Eulerschen Differentialrechnung zu tun gehabt hat. Eine ähnliche Folgerung könnte man aus einer Abhandlung von Libri: *Mémoire sur les fonctions discontinues* (Journ. für Mathem. **10**, 1833, S. 303—316) ziehen, denn hier verweist Libri S. 305 in einer Fußnote auf eine Stelle dieser Auflage, wo es sich um einen „Beweis" der Formel $0^0 = 1$ handelt, und schreibt den fraglichen „Beweis" Mascheroni zu. A. Pringsheim, der mit Recht in der *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (II : 1 : 1, Leipzig 1899, S. 27) Libris Ausführungen bemängelt, bemerkt dabei: „L. Mascheroni sucht in der von ihm besorgten 2. Ausgabe von Euler, *Inst. calc. diff.* (Ticini, 1787, 2, p. 813) zu *beweisen*, daß *allemal* $0^0 = 1$ sei". Hier wird also ausdrücklich ausgesprochen, daß die Ausgabe selbst von Mascheroni herrührt. Vielleicht kann man dieselbe Angabe aus einer Bemerkung von D. Gambioli in der italienischen Übersetzung von W. W. R. Balls Geschichte der Mathematik herauslesen. Dort heißt es nämlich (*Breve compendio di storia delle matematiche. Versione dall' inglese* II, Bologna 1904, S. 285): „Mascheroni . . . annotò il calcolo integrale di Eulero, e pubblicò due piccoli volumi (1790—92) col titolo Adnotationes ad calculum integralem Euleri". Hier wird man nämlich versucht, das Wort „integrale" als Schreibfehler statt „differenziale" zu betrachten, weil sonst die Bemerkung tatsächlich eine Tautologie enthalten würde.

Indessen scheint es mir höchst unwahrscheinlich, daß Mascheroni überhaupt etwas mit der 2. Auflage der Eulerschen Differentialrechnung zu tun gehabt hat. Daß er jedenfalls nicht Herausgeber derselben war, ist ganz sicher. Auf dem Titelblatt wird freilich kein solcher genannt, aber unmittelbar nachher folgt ein Widmungsschreiben, dessen letzte Zeilen lauten: „Ferdinandus Speronius ex minor. conv. familia Eulerianum opus a se editum et juventutis bono paratum l. m. q. d. d. d." und im Vorworte erwähnt der Herausgeber, daß er vor kurzer Zeit („nuper") an der Universität in Pavia als Schüler von G. Fontana studiert habe, was gar nicht auf Mascheroni paßt. In Riccardis *Biblioteca matematica italiana* wird unter Mascheroni die 2. Auflage der Eulerschen Differentialrechnung gar nicht genannt, und die oben erwähnte Angabe von Pringsheim beruht ohne Zweifel auf der Librischen Fußnote.

Nun ist es ja nicht ganz undenkbar, daß die Zusätze am Ende der Speronischen Ausgabe zum Teil von Mascheroni herrühren, aber weder im Vorworte noch sonst wird Mascheroni genannt, während Speroni ausdrücklich hervorhebt, daß er seinem Lehrer Fontana sehr viel zu verdanken habe. Jedenfalls muß der Verweis bei Lacroix unrichtig sein, denn das von ihm erwähnte „Supplementum" (S. 729—732) rührt von Euler her und ist später unter seinem Namen in den Mémoires de l'académie des sciences de St. Pétersbourg **4** (1811), gedruckt 1813 (S. 116—119) herausgegeben. Dagegen ist nicht ganz unmöglich, daß der zweite „Beweis" (S. 813—814) der Formel $0^0 = 1$ in letzter Linie auf Mascheroni zurückgeht, obgleich Speroni gar nichts hierüber sagt.

Ist es möglich herauszufinden, warum Lacroix und Libri den Namen des Mascheroni mit der 2. Auflage von Eulers Differentialrechnung in Verbindung gebracht haben? Hat Mascheroni wirklich versucht, einen Beweis der Formel $0^0 = 1$ zu bieten?

G. Eneström.

Réponse à la question 137 sur l'édition Belge des Oeuvres d'Euler. L'édition Belge des *Oeuvres d'Euler* est une entreprise curieuse, sur laquelle la bibliothèque de l'observatoire royal de Belgique à Uccle (Bruxelles) permet aisément de se documenter. Comme le dit M. Eneström, on y conserve de nombreuses traductions manuscrites de mémoires d'Euler faites en vue de cette édition. Deux autres manuscrits de l'observatoire, et quelques notes éparses dans les traductions mentionnées ci-dessus, donnent en outre des renseignements intéressants sur le plan des éditeurs.

A plusieurs reprises déjà ces archives avaient frappé mon attention, sans me donner néanmoins l'idée de les utiliser.[1] Qui songeait encore à cette vieille édition d'Euler? C'était un peu l'oubli du mépris. Car, chose étonnante, si l'édition est assez rare dans les bibliothèques publiques, même belges, je l'ai souvent rencontrée dans des bibliothèques particulières. J'en possède depuis longtemps un exemplaire. Je n'attachais donc aucune importance à l'essai d'édition Belge, quand la boutade de Jacobi à Fuss (Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, p. 253) et plus encore le nouveau projet d'édition d'Euler m'engagèrent, il y a peu de temps, à m'en occuper devant la 1e section de la „Société scientifique de Bruxelles". J'eus ainsi l'occasion de lui consacrer une notice bibliographique et historique assez étendue, qui paraîtra au tome **33** des Annales de la Société. Je prie le lecteur de vouloir bien s'y reporter, me contentant aujourd'hui de répondre en deux mots aux questions de M. Eneström.

Et tout d'abord le renseignement de la *Bibliographie générale de l'astronomie,* par Houzeau et Lancaster (I, p. 666) est erroné. Le nombre des volumes publiés est de cinq; non pas de huit. La *Bibliographie nationale. Dictionnaire des écrivains Belges et catalogue de leurs publications* (I, Bruxelles 1886, p. 599), le dit en termes exprès. Je me rallie, sans réserves, à son avis. Dans aucun exemplaire je n'ai rencontré de 6e volume et les archives de l'observatoire ne gardent pas de traces qui puissent faire croire à sa publication.

Aussi bien, la notice de Houzeau et Lancaster est-elle hautement fantaisiste. En l'écrivant ils n'avaient certainement pas l'ouvrage sous les yeux. „Cette édition, disent-ils, qui devait comprendre 25 volumes, a été abandonnée après le tome 8. Les volumes parus ne contiennent que des mathématiques pures."

Or: le tome I renferme les 127 premières *Lettres à une Princesse d'Allemagne.* Ce ne sont certes pas des mathématiques pures.

Le tome II contient d'abord les dernières lettres à la princesse Philippine. En outre, 10 mémoires sur des questions de physique (optique, acoustique, magnétisme etc.) dont précisément „les éditeurs ont jugé convenable *de retrancher la partie mathématique,* pour ne donner que la partie physique et les résultats du calcul. On trouvera dans les *Mélanges* (c. à d. dans la dernière partie des *Oeuvres complètes)* tout ce qui a été supprimé." Je cite les paroles mêmes des éditeurs (II, p. 343; voir en outre II, p. 302, etc.).

Le tome III, il est vrai, contient l'*Arithmétique* et le tome IV l'*Algèbre.* Disons le en passant et pour ne plus y revenir, ils sont franchement mauvais, même en comparaison des trois autres volumes de la collection. „En republiant l'*Arithmétique,* dit fort bien M. Fl. Cajori, dans le tome IV des *Vorlesungen* de Cantor (p. 63, en note), les éditeurs s'écartent tellement du texte original qu'il en devient méconnaissable". L'*Algèbre* mérite la même critique.

1) Je saisis cette occasion de remercier M. Collard, bibliothécaire de l'observatoire, pour l'amabilité avec laquelle il m'a facilité les recherches.

Le tome V, beaucoup moins défectueux que les deux précédents, renferme la traduction du *Tentamen novae theoriae musicae* (Petropoli 1739) et en outre trois autres mémoires sur la musique. Il faut derechef une forte distraction pour classer les matières de ce volume parmi les mathématiques pures. Ce tome V, sans modification, a été remis en vente à Paris, en 1865, sous un nouveau titre: *Musique mathématique. La musique rendue facile par le système de la notation lettrée, ou essai d'une nouvelle théorie de la musique fondée sur les connaissances physiques et métaphysiques appliquées aux vrais principes de l'harmonie. Par Léonard Euler. Traduit, augmenté et mis au courant par une Société de savants.* (Paris, Librairie scientifique et philosophique 1865.) La bibliothèque royale de Belgique en possède un exemplaire.

Passons à la deuxième question de M. Eneström: Quel était le mérite scientifique des éditeurs d'Euler? Quel but visaient-ils dans leur publication?

Parmi les six éditeurs nommés au titre, trois, Drapiez, Steichen et Philippe Van der Maelen étaient membres de l'académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. Un quatrième, Weiler, mort lieutenant général dans l'arme du génie, était alors professeur à l'école militaire. Cet établissement a toujours tenu un rang brillant dans notre haut enseignement. Dubois et Moreau se mirent moins en vue; ils écrivirent des ouvrages de mathématiques estimables, mais dont la réputation ne dépassa pas les frontières de la Belgique. Quand Jacobi traite de pareils hommes de „maîtres d'écoles" on voudra bien n'y voir qu'une boutade lancée dans l'intimité. Boutade justifiée, je me hâte de le dire, mais néanmoins une simple boutade; ce n'était point là, de sa part, un jugement calme et définitif.

Philippe Van der Maelen, le fondateur du célèbre établissement géographique de la Porte de Flandre à Bruxelles, me semble avoir été l'âme de l'entreprise. C'était le modèle des grands éditeurs, intelligents, riches et généreux; mettant libéralement à la disposition des savants, non seulement leurs conseils, mais leurs capitaux et leurs presses. Les réunions intimes entre savants, et les causeries de la Porte de Flandre ont laissé en Belgique long et cher souvenir!

Et cependant il est des bornes à tout.

Admirateurs passionnés d'Euler, les éditeurs eurent une illusion; elle devait fatalement ruiner leur entreprise et la ruina. Puisse la leçon ne pas être perdue! Au moment où on se dispose à rééditer l'illustre géomètre, peut-être n'est-il pas inutile de la rappeler.

On demandait une édition d'Euler. Van der Maelen et ses amis, auraient dû purement et simplement la donner; malgré ses difficultés, malgré sa longueur. Ils voulurent faire mieux: rendre plus aisée l'étude du maître, en faciliter la lecture et le mettre au point. De là l'idée d'une traduction, de là l'idée de quelques coupures, de là l'idée de certaines simplifications et de remaniements; idées toutes plus malheureuses les unes que les autres. Dans ces conditions l'édition d'Euler ne satisfit plus personne. Elle tomba; c'était inévitable. On ne touche pas à l'oeuvre d'un savant tel qu'Euler!

L'édition Belge des oeuvres d'Euler, fut une désillusion notamment pour Jacobi. Sans doute le jugement qu'il porte sur elle est injuste et trop sévère; mais qui n'excuserait sa boutade? „Pour avoir l'idée d'éditer un Euler modifié et simplifié, il faut n'être qu'un maître d'école!"

Bruxelles. H. Bosmans.

Rezensionen.

Felix Müller. Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften **25**, Leipzig 1907, S. 61—116.

Nach einigen allgemeinen Bemerkungen über EULERS wissenschaftliche Tätigkeit gibt der Verfasser eine kurze systematische Übersicht über die wichtigsten Arbeiten von EULER auf dem Gebiete der Philosophie und der reinen Mathematik, wobei der Reihe nach folgende Zweige der reinen Mathematik in Betracht gezogen werden: Algebra, Zahlentheorie, Kombinationslehre nebst Wahrscheinlichkeitsrechnung und Analysis situs, Kettenbrüche, Reihen, Differentialrechnung, Integralrechnung, Variationsrechnung, Funktionentheorie, Elementare Geometrie, Analytische und Differentialgeometrie; zuletzt werden einige zusammenfassende „Schlußbemerkungen“ hinzugefügt. In den Fußnoten sind gegen 300 Schriften von EULER zitiert.

Herr MÜLLER betont selbst, daß seine Schrift den Zweck hat, die Fachgenossen zum fleißigeren Studium der Arbeiten EULERS anzuregen und durch eine sorgfältige Angabe der Quellen das fragliche Studium zu erleichtern, und für diesen Zweck paßt seine Schrift meines Erachtens sehr gut, denn die Darstellung ist anregend und die Quellenangaben sorgfältig. Dagegen sind die historischen Notizen des Herrn MÜLLER zuweilen nur mit Vorsicht zu benutzen, wie aus einigen der folgenden Bemerkungen hervorgehen dürfte.

S. 71. Es ist kaum richtig zu sagen (Z. 1—2), daß EULER der erste war, welcher die Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten lehrte. Verfahren, deren Grundgedanken mit der sogenannten EULERschen Methode zusammenfallen, wurden schon im 17. Jahrhundert von P. DE FERMAT, J. HUDDE, I. NEWTON und G. W. LEIBNIZ benutzt (siehe *Encyclopédie des sciences mathématiques* **1** : 2 : 1, 1907, S. 78, 85—86); bekanntlich setzt die von E. W. VON TSCHIRNHAUS 1683 angegebene Methode zur Lösung einer Gleichung beliebigen Grades voraus, daß man aus zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten die eine eliminieren kann.

S. 72. Die Bemerkung: „EULER . . . fügte . . . in einer nachgelassenen Arbeit, die erst 1849 veröffentlicht wurde, noch 30 weitere [Paare befreundeter Zahlen] hinzu“ ist ungenau. Die erst 1849 veröffentlichte Arbeit enthält nicht die von Herrn MÜLLER angedeutete Tafel befreundeter Zahlen, sondern diese wurde schon 1747 in den Nova acta eruditorum (S. 268—269) veröffentlicht; überdies sind von den 30 Paaren nur vier neu, wie schon P. H. FUSS im „Prooemium“ (S. XXVI) des 1. Bandes der *Commentationes arithmeticae* hervorgehoben hat.

S. 73. Die in der Fußnote 4 zitierte Abhandlung von Euler enthält nicht, wie aus der Angabe des Textes hervorzugehen scheint, eine „Tafel der Primzahlen und der kleinsten Divisoren der zusammengesetzten Zahlen bis über eine Million“. Euler hebt selbst am Anfange seiner Abhandlung hervor, daß eine solche Tafel 666 Druckseiten in Anspruch nehmen würde, und die ganze Abhandlung enthält nur 52 Druckseiten; in Wirklichkeit ist dieselbe nur eine Anleitung zur Verfertigung der von Herrn Müller erwähnten Tafel.

S. 75. Der Passus: „Lagrange hat vor Euler den Beweis für die Unmöglichkeit der Lösung der Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ veröffentlicht. Euler teilte in einem Briefe an Goldbach vom 4. Aug. 1753 mit, er könne die Unmöglichkeit der Lösung von $a^3 + b^3 = c^3$ und $a^4 + b^4 = c^4$ beweisen“ ist aus mehr als einem Grunde zu bemängeln. Die Unmöglichkeit der Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ wurde schon von Fermat in aller Kürze und später ausführlich von Frénicle de Bessy bewiesen (siehe Biblioth. Mathem. 4_3, 1903. S. 88—89). Eulers Beweis, der wesentlich mit dem Fermatschen übereinstimmt, erschien schon 1747 im 10. Bande der Commentarii der Petersburger Akademie, die Herr Müller selbst in seiner Fußnote 7 zitiert, und damals war Lagrange nur 11 Jahre alt. Vielleicht hat Herr Müller den Satz, daß die Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ unmöglich ist, mit dem Satz, daß jede ganze Zahl eine Summe von höchstens vier ganzen Quadratzahlen ist, verwechselt, denn dieser Satz wurde wirklich zuerst von Lagrange vollständig bewiesen. — Die Bemerkung in betreff des Inhaltes des Eulerschen Briefes an Goldbach ist nicht gerade unrichtig, aber zum Teil weniger gut redigiert, zum Teil allzu unvollständig. Weniger gut redigiert ist sie in betreff des Satzes, daß die Gleichung $a^4 + b^4 = c^4$ unmöglich ist, denn Euler hatte ja tatsächlich schon einen Beweis desselben veröffentlicht; allzu unvollständig ist sie hinsichtlich des Satzes, daß die Gleichung $a^3 + b^3 = c^3$ unmöglich ist, denn der Leser erfährt nicht, ob und wann Euler seinen Beweis veröffentlichte, was ja viel wichtiger als die Angabe des Briefes ist. Soviel ich weiß, erfolgte die Veröffentlichung des Beweises erst im Jahre 1763 (*Supplementum quorundam theorematum arithmeticorum, quae in nonnullis demonstrationibus supponuntur:* Novi comment. acad. sc. Petrop. **8** [1760—1761], gedruckt 1763, S. 105—128), freilich nur im Vorübergehen und unter Verweis auf eine frühere, wahrscheinlich nicht publizierte Mitteilung. Einige Jahre später (1770) bewies Euler den Satz ausführlich am Ende des 2. Teiles seiner *Algebra*. Nebenbei sei bemerkt, daß der Beweis, den Euler in seinem Briefe an Goldbach andeutet, nicht einwandfrei war; den verbesserten Beweis fand Euler kurze Zeit vor dem 15. Oktober 1759 (siehe den Anfang der soeben zitierten Abhandlung von 1763).

S. 80. Das Problem, die Summen der reziproken Reihen zu finden, wurde nicht, wie Herr Müller angibt, 1736 von Johann Bernoulli gestellt, und es ist meines Erachtens unsicher, ob Euler das Problem vor 1736 löste. Allerdings hat P. H. Fuss in seiner Liste der Eulerschen Schriften notiert, daß eine Abhandlung *De summis serierum reciprocarum* am 5. Dezember 1734 (35?) der Petersburger Akademie vorgelegt wurde, aber daß diese Abhandlung mit der später gedruckten durchaus identisch war, ist gar nicht sicher. Ich bin geneigt, anzunehmen, daß Euler die Formel $\sum \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6}$ erst kurze Zeit vor August 1736 fand und sich dann beeilte, seine Entdeckung Daniel Bernoulli

mitzuteilen. JOHANN BERNOULLI hat in betreff des Problems kein anderes Verdienst, als die EULERsche Lösung wiedergefunden zu haben, nachdem er von seinem Sohne eine Andeutung über das Resultat bekommen hatte (vgl. P. STÄCKEL, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 42).

S. 81. Die Bezeichnung π für die Peripherie eines Kreises mit dem Durchmesser 1 gebrauchte EULER nicht zum erstenmal im 9. Bande der Petersburger Commentarii. Dieser Band erschien erst 1744, aber schon 8 Jahre früher hatte EULER diese Bezeichnung in seiner *Mechanica* benutzt (siehe Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 207—208), und 1738 wandte er dieselbe an im 6. Bande derselben Commentarii (S. 33). Schon in der *Mechanica* kommt ebenfalls die Bezeichnung e für die Basis der natürlichen Logarithmen wiederholt vor (siehe Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 310).

S. 82. Um Mißverständnissen vorzubeugen, wäre es vielleicht angebracht, ausdrücklich zu bemerken, daß bei EULER das i der Formel

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{i}=\log(i+1)+C$$

unendlich groß ist. EULER sagt nämlich: „Quo autem seriei $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\cdots\frac{1}{i}$ summa, etiamsi infinita accurate determinetur ...“ und beweist dann, daß der Wert dieser Summe gleich $l\,(i+1)+C$ ist.

S. 83. Der Name „BERNOULLIsche Zahl“ rührt nicht von EULER her (siehe P. STÄCKEL, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 53).

S. 87. Der EULERsche Satz von den homogenen Funktionen wurde in der *Mechanica* nicht nur angedeutet, sondern bestimmt ausgesprochen (siehe Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 208).

S. 91. Die Behauptung: „Eine ... Arbeit ... im 7. Bande der Commentarii enthält die erste Benutzung eines integrierenden Faktors“ ist unrichtig. In seinen 1691—1692 verfaßten *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque* bediente sich JOHANN BERNOULLI der integrierenden Faktoren, und der wesentliche Inhalt der betreffenden Stelle der *Lectiones*, die bekanntlich erst 1742 erschienen, wurde 1708 von CH. REYNEAU im 2. Teile (S. 762—764) der *Analyse démontrée* veröffentlicht (siehe Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 414)

S. 91—92. Die Angabe, daß der Satz von der Vertauschbarkeit der partiellen Differentiationsfolge in EULERS Abhandlung *De infinitis curvis ejusdem generis* vorkommt, ist buchstäblich richtig, aber für eine Schrift mit dem Titel „Über bahnbrechende Arbeiten LEONHARD EULERS“ paßt sie nicht gut, ohne ergänzt zu werden. In Wirklichkeit hatte NIKOLAUS I. BERNOULLI schon 1721 den Satz ausgesprochen und eine geometrische Verifikation desselben mitgeteilt (siehe Biblioth. Mathem 2_3, 1901, S. 443).

S. 93. Der EULERsche Satz von den homogenen Funktionen für eine beliebige Anzahl von unabhängigen Veränderlichen findet sich schon in den *Institutiones calculi differentialis* (Kap. 7 § 225).

S. 94. Es ist nicht richtig, zu sagen, daß EULER auf das isoperimetrische Problem zum erstenmal zu sprechen kam in seinem Briefe an JOHANN BERNOULLI vom 30. Juli 1738, auch wenn man von dem Umstande absieht, daß die im 6. Bande der Petersburger Commentarii gedruckte Abhandlung über diesen Gegenstand ganz gewiß vor Juli 1738 fertig war. Schon zwei Jahre früher stellte EULER an DANIEL BERNOULLI das von Herrn MÜLLER er-

wähnte Problem für den Spezialfall $m = 1$ (siehe P. H. FUSS, *Correspondance mathématique* II, St. Pétersbourg 1843, S. 435); beiläufig bemerke ich, daß das allgemeine Problem von DANIEL BERNOULLI in seinem Brief an EULER vom 24. Mai 1738 gestellt wurde (siehe FUSS a. a. O. II, S. 448), wie EULER in dem von Herrn MÜLLER zitierten Briefe richtig hervorhebt.

S 95. Fußnote 6 soll es Z. 2 entweder „2 Teile, Berlin 1788" oder „3 Teile, Berlin 1788—1791" stehen; ich persönlich würde die erste Angabe vorziehen, weil der 3. Teil eigentlich nichts mit der *Introductio* zu tun hat.

S. 96. Die Bemerkung (Z. 20—24): „Es scheint wenig bekannt zu sein, daß auch EULER eine geometrische Darstellung des Imaginären gegeben hat. Als Einleitung zu einer Abhandlung über analytische Theoreme, deren Beweis noch aussteht, wird die Größe $a + bi$ mittels eines Kreises geometrisch veranschaulicht" sollte meiner Ansicht nach gestrichen werden. Den von Herrn MÜLLER erwähnten Kreis benutzt EULER wesentlich auf dieselbe Weise wie WALLIS 100 Jahre früher (siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 264); wenn der gegebene Ausdruck $a + B$ (a reel, B reel oder imaginär) und c der Radius eines Kreises mit dem Mittelpunkt $x = 0$, $y = a$ ist, so versinnlicht EULER B, wenn es reel ist, durch die Ordinate des Kreises, die der Abskisse $x = \sqrt{c^2 - B^2}$ entspricht, und wenn es imaginär ist, durch die Tangente, die von dem Punkte $x = \sqrt{c^2 - B^2} = \sqrt{c^2 + (|B|)^2}$ der X-Achse nach dem Kreise gezogen wird. Im ersten Falle ist ja die Ordinate gleich $\sqrt{c^2 - x^2} = \sqrt{c^2 - (c^2 - B^2)} = B$, im zweiten Falle ist die Tangente gleich $\sqrt{x^2 - c^2} = \sqrt{c^2 + (|B|)^2 - c^2} = |B|$. Fragt man aber: „welcher Punkt der Ebene wird im zweiten Falle durch $a + bi$ dargestellt?" so kann man aus EULERS Ausführungen keine andere Antwort als: „der Punkt, dessen Abskisse x und Ordinate $a + |B|$ ist" bekommen, d. h. daß EULER, um die Größe $a + bi$ zu konstruieren, die Strecken a und b in derselben Geraden abträgt. Aber dann ist ja der Hilfskreis unnötig und die ganze geometrische Darstellung trivial. Sie besagt nämlich nur, daß der Kreis $x^2 + y^2 = c^2$ in eine Hyperbel übergeht, wenn x größer als c wird und wenn man y statt $y\sqrt{-1}$ setzt, aber dies ist jedenfalls keine Entdeckung von EULER, noch weniger eine „bahnbrechende" Entdeckung.

S. 97. Die Bemerkung: „Eine Fortsetzung dieser Abhandlung über die Logarithmen der negativen und imaginären Zahlen wurde aus den Opera posthuma erst 1862 veröffentlicht" ist ungenau. Die angebliche „Fortsetzung" ist in Wirklichkeit die erste Redaktion der im Jahre 1751 erschienenen Abhandlung. — EULER war nicht der erste (vgl. Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 442), der die Beziehungen zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen bemerkte, wie man versucht wird aus den Worten „schon 1740" (Z. 17) zu folgern.

S. 101. Zu den wichtigsten Abhandlungen EULERS über elliptische Integrale gehört meines Erachtens auch die *Demonstratio theorematis et solutio problematis in Actis Eruditorum Lipsiensibus propositorum* (Novi comment. acad. sc. Petrop. 7 [1758/9], gedruckt 1761, S. 128—162), die nach P. H. FUSS am 18. August 1755 der Petersburger Akademie vorgelegt wurde; in dieser Abhandlung hat EULER bekanntlich eine schöne analytische Methode zur Herleitung des Additionstheorems angegeben (vgl. hierüber die Darstellung von G. VIVANTI in den *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **4**, Leipzig 1908, S. 795). Sowohl das „Theorem" als das „Problem" wurde 1754 in den

Nova acta eruditorum anonym, aber ohne Zweifel von EULER selbst gestellt und gab zu verschiedenen Arbeiten anderer Mathematiker Anlaß.

S. 102. Die in der Fußnote 1 zitierte Arbeit aus den *Opera posthuma* ist wesentlich nur eine Umarbeitung dreier Abhandlungen, die schon 1761 im 7. Bande der Petersburger Novi commentarii veröffentlicht wurden; die eine dieser Abhandlungen ist die oben von mir erwähnte; die zwei übrigen sind das *Specimen alterum methodi novae quantitates transcendentes inter se comparandi: de comparatione arcuum ellipsis* (S. 3—48) und das *Specimen novae methodi curvarum quadraturas et rectificationes aliasque quantitates transcendentes inter se comparandi* (S. 83—127).

S. 104. In betreff der EULERschen Bezeichnungen für arcsin und arctang verdiente vielleicht bemerkt zu werden, daß solche Bezeichnungen schon in der *Mechanica* von 1736 vorkommen; freilich benutzte EULER dann für arcsin nur A und für arctang die Bezeichnung A*t*; das letzte Zeichen kommt auch in einer Abhandlung des 8. Bandes der Petersburger Commentarii vor (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321).

Bevor ich meine Besprechung der Abhandlung des Herrn MÜLLER schließe, kann ich nicht umhin zu bemerken, daß die Zeitangaben derselben oft weniger gut redigiert sind. Beispielsweise wird S. 80 gesagt: „Einen neuen Beweis [des binomischen Satzes] gab EULER 1787". Aber EULER starb schon 1783 und konnte also nicht 1787 wissenschaftlich tätig sein. Auf dieselbe Weise wird S. 112 gesagt: „Der erste, welcher die Oberfläche des schiefen Kegels mit Kreisbasis zu bestimmen suchte, war VARIGNON, 1727", während dieser bekanntlich schon 1722 starb. Aber auch wenn man von der redaktionellen Ungenauigkeit der ersten Angabe absieht, ist die Zeitangabe des Herrn MÜLLER dennoch unzutreffend. Es handelt sich um EULERS Abhandlung *Nova demonstratio, quod evolutio potestatum binomii NEWTONiani etiam pro exponentibus fractis valeat*, die in den Nova acta der Petersburger Akademie (Band **5**, S. 52—58) veröffentlicht wurde; die Abhandlung wurde am 20. Mai 1776 der Akademie vorgelegt, und der Band erschien 1789. Die Jahreszahl 1787 steht allerdings auf dem Titelblatt des Bandes, aber nicht als Druckjahr und hat in diesem Falle gar keine Bedeutung. Ähnliche unzutreffende Zeitangaben kommen nicht selten in der Abhandlung des Herrn MÜLLER vor, z B. S. 71, wo von einem Aufsatze EULERS „aus dem Jahre 1764" gesprochen wird, während in Wahrheit der betreffende Aufsatz schon am 10. Februar 1752 der Berliner Akademie vorgelegt wurde und erst 1766 erschien. Wie richtige Zeitangaben abgefaßt werden sollen, hat Herr MÜLLER selbst S. 103 angegeben, als er schreibt: „In zwei Abhandlungen, die aus dem Jahre 1779 stammen, aber erst im 1. Bande der Mémoires de l'académie de St. Pétersbourg veröffentlicht wurden, behandelt EULER die JACOB BERNOULLIsche Aufgabe".

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1

20 : 3 (1908).

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2

9_3 (1908) : 1. — [Rezension des Bandes 8_3.] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 14_3, 1908, 649—651. (H. Bosmans.)

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [3

37 (1906) : 1—2. — Die Seiten 1—55 enthalten Referate der im Jahre 1906 erschienenen mathematisch-historischen Schriften.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, D. J. Korteweg, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [4

16 : 2 (octobre 1907—avril 1908).

Eneström, G., Über kritische Behandlung der Geschichte der Mathematik [5

Biblioth. Mathem. 9_3, 1908, 1—14.

Tannery, P., De l'histoire générale des sciences (1904). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 7, 1908, 35—36. (Günther.) [6

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1³ (1907). [Rezension:] Arch. der Mathem. 13_3, 1908, 351. (J. Tropfke.) [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908, 71—72. (G. Eneström.) — 2² (1900). [Kleine Bemerkungen.] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908, 72—79. (G. Eneström.) [7

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, herausgegeben von M. Cantor. Vierter Band. Von 1759 bis 1799 (1908). [Rezension:] Mathesis 8_3, 1908, 212—214. (H. B.) [8

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Edition française, traduite par L. FREUND (1906—1907). [Rezension:] Arch. der Mathem. 13_3, 1908, 355. (J. TROPFKE.) — L'enseignement mathém. 10, 1908, 342—346. (H. SUTER.) — Monatsh. für Mathem. 19, 1908: Lit.-Ber. 64. [9

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al Medio evo (1907). [Rezension:] Mathesis 8_3, 1908, 158. [10

Günther, S., Geschichte der Mathematik. I (1908). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 14_3, 1908, 629—631. (H. BOSMANS.) — Deutsche Literaturz. 29, 1908, 2935—2937. (G. ENESTRÖM.) — Mitteil. zur Gesch. d. Medizin u. d. Naturwiss. 7, 1908, 459—461. (A. STURM.) [11

Picard, E., Sur le développement de l'analyse et ses rapports avec diverses sciences (1905). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 444—446. (E. B. WILSON.) [12

***Mischke, K.,** Naturgeschichte der Ziffern. Bremen, Rößler 1907. [13
8°, 48 S. — [0.75 Mk.] — [Rezension:] Monatsschr. für höhere Schulen (Berlin) 7, 1908, 540. (M. NATH.)

Smith, D. E., Rara arithmetica. A catalogue of the arithmetics written before the year MDCI with a description of those in the library of George Arthur Plimpton of New York. Boston, Ginn & Co. 1908. [14
8°, XIII + 507 S. + 9 Taf. — Es gibt auch eine Luxusausgabe in zwei Bänden mit Tafeln in Farbendruck. — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 146—147. (C. H. MÜLLER.)

Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Terza edizione accresciuta di uno sguardo allo sviluppo della geometria in quest'ultimo decennio. Torino, Clausen 1907. [15
8°, XXIII + 475 S. — [8 lire.]

Kagan, W., [Historische Übersicht der Entwicklung der Theorie der Grundlagen der Geometrie]. [16
Odessa, Univ., Sapiski 108—109, 1907. 567 S.

Bonola, R., Die nicht-euklidische Geometrie. Historisch-kritische Darstellung. Deutsche Ausgabe von H. LIEBMANN (1908). [Rezension:] L'enseignement mathém. 10, 1908, 433. (H. F.) — Mathesis 8_3, 1908, 123. (P. M.) [17

Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables (1908) [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 165—166. (J. T.) — Mathesis 8_3, 1908, 118—119. [18

Amodeo, F., I trattati delle sezioni coniche da Apollonio a Simson (1905). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 19, 1908; Lit.-Ber. 63. (R. v. ST.) [19

***Mach, E.,** Die Mechanik in ihrer Entwicklung historisch-kritisch dargestellt. Sechste verbesserte und vermehrte Auflage. Leipzig 1908 [20
8°. — [8 Mk.]

Jouguet, E., Lectures de mécanique. La mécanique enseignée par les auteurs originaux. Première partie. La naissance de la mécanique. Paris, Gauthier-Villars 1908. [21
8°, X + 210 S.

Duhem, P., Les origines de la statique (1905—1906). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 257—260. (HAMEL.) — L'enseignement mathém. 10, 1908, 434—437. (A. BERNOUD.) [22

Arrhenius, S., Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten (1908). [Rezension:] Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 435—436. (TH. ARLDT.) [23

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik. Rede gehalten am 11. März 1908 in der öffentlichen Sitzung der k. Bayerischen Akademie der Wissenschaften Erweitert und mit Anmerkungen versehen. Leipzig, Teubner 1908. [24
8°, 98 S. — [3.60 Mk.] — Die Anmerkungen enthalten eine große Anzahl historischer Notizen.

Loria, G., Le tradizioni matematiche dell' Italia. Discorso pronunciato in Roma l' 8 aprile 1908 per inaugurare i lavori della sezione storica del IV congresso internazionale dei matematici. [25
Conferenze e prolusioni (Roma) 1, 1908, 407—417.

b) Geschichte des Altertums.

Ruska, J., Das ägyptische Zeichen für die Quadratwurzel. [26
Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 7, 1908, 337—338

***Vogt, H.,** Der pythagoreische Lehrsatz in der ältesten Geometrie der Inder. [27
Breslau, Schlesische Gesellsch., Jahresber. der mathem. Sektion 84, 1906, 3—4.

Vogt, H., Die Geometrie des Pythagoras. [28
Biblioth. Mathem. 9_3, 1908, 15—54.

Rudio, F., Die angebliche Kreisquadratur bei Aristophanes (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 14_3, 1908, 646—649. (H. BOSMANS.) [29

Junge, G., Wann haben die Griechen das Irrationale entdeckt? (1907). [Rezension:] Berliner philolog. Wochenschr. 28, 1908, 1402—1404. (P. WENDLAND.) [30

Favaro, A., Intorno ad una scrittura inedita di Archimede nuovamente scoperta e pubblicata. [31
Venezia, Istituto Veneto, Atti 67 : 2, 1908, 635—638.

Haas, A. E., Ästhetische und teleologische Gesichtspunkte in der antiken Physik. [32
Archiv für Gesch. d. Philosophie 22, 1908, 80—113.

Barrett, J. A. S., A note on the Roman numerals. [33
Edinburgh, Royal soc., Proceedings 27, 1907, 161—182.

***Manilius, M.,** Astronomica. Herausgegeben von TH. BREITER. II. Kommentar. Leipzig, Dieterich 1908. [34
8°, XVI + 196 S. + 2 Taf. — [4.20 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 2077—2081. (H. KLEINGÜNTHER.)

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates (1907). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13₃, 1908, 355—356. (J. TROPFKE.) — Monatsh. für Mathem. 19, 1908; Lit.-Ber 62—63. (R. v. ST.) [35

c) Geschichte des Mittelalters.

Kaye, G. R., Notes on Indian mathematics. [1.] Arithmetic notation. [36
Calcutta, Asiatic soc. of Bengal, Journal and proceedings 3₉, 1907, 475—508. — [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 7, 1908, 374—375. (E. WIEDEMANN.)

M[athews], G. B., The history of arithmetic notation. [37
Nature 77, 1908, 347—348. — Eigentlich ein Bericht über die vorangehende Abhandlung von KAYE.

Kaye, G. R., Notes on Indian mathematics. 2. Āryabhaṭa. [38
Calcutta, Asiatic soc. of Bengal, Journal and proceedings 4₂, 1908, 111—141.

Suter, H., Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern (1907). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 7, 1908, 374—375. (GÜNTHER.) [39

Nallino, C. A., Albattani sive Albatenii opus astronomicum II (1907). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 9₁, 1908, 83—88. (H. SUTER.) [40

***Weigl, L.,** Johannes Kamateros, *Εἰσαγωγὴ Ἀστρονομίας*. Ein Kompendium griechischer Astronomie und Astrologie, Meteorologie und Ethnographie in politischen Versen. Leipzig, Teubner 1908. [41
8°, 147 S. — [3 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 2843—2846. (J. L. HEIBERG.)

Mortet, V., Le plus ancien traité français d'algorisme. [42
Biblioth. Mathem. 9₁, 1908, 55—64.

Duhem, P., Sur un fragment inconnu jusqu'ici de l'„Opus tertium" de Roger Bacon. [43
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 146, 1908, 156—158.

Amodeo, F., Uno sguardo allo sviluppo delle scienze matematiche nel rinascimento (XIII—XVI secolo). Prolusione al corso di storia delle scienze matematiche fatta il 3 dic. 1907. [44
Giorn. di matem. 45, 1908, 91—108.

d) Geschichte der neueren Zeit.

Smith, D. E., History of modern mathematics. Fourth edition (1906). [Rezension:] Arch. der Mathem. 13₃, 1908, 265—267. (E. HOPPE.) [45

Björnbo, A. A., Ioannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor (1907) [Rezension:] Arch. der Mathem. 13₃, 1908, 354—355. (J. TROPFKE.) — Mathesis 8₃, 1908, 154—156. (H. BOSMANS.) [46

Bosmans, H., Sur le „Libro de algebra" de Pedro Nuñez (1908). [Rezension:] Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 7, 1908, 258—259. (GÜNTHER.) [47

Bosmans, H., Une nouvelle étude sur Nicolas Petri de Deventer. [48
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 14₃, 1908, 657—661.

Bosmans, H., La „Practicque om te leeren cypheren" de Nicolas Petri de Deventer. [49
Bruxelles, Soc. scient., Annales 32 : 2, 1908. 32 S.

Favaro, A., Sopra la „Regula pantometra" del Coignet. [50
Biblioth. Mathem. 9₁, 1908, 81—82

Favaro, A., Per la storia del compasso di proporzione. [51
Venezia, Istituto Veneto, Atti 67 : 2, 1908, 723—739 + 1 Taf. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 14₃, 1908, 653—657. (H. BOSMANS.)

Due insigni autografi di GALILEO GALILEI e di EVANGELISTA TORRICELLI. A facsimile dagli originali della Biblioteca nazionale centrale di Firenze. Omaggio della biblioteca al secondo congresso della società italiana per il progresso delle scienze. Firenze, nell'ottobre del MCMVIII. [52
Folio, (23) S. — Ein Brief Galileis vom 7. Mai 1610 und einige Seiten aus Torricellis Arbeit: „De definitionibus geometricis".

***Klug, R.,** Johannes Kepler, Neue Stereometrie der Fässer, besonders der in der Form am meisten geeigneten österreichischen und Gebrauch der kubischen Visierruthe. Mit einer Ergänzung der Stereometrie des Archimedes. [Linz 1615. Druck von Johannes Planck.] Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben. Leipzig, Engelmann 1908. [53
8°, 130 S. — [2.60 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 2680—2681. (E. GERLAND.)

*Oeuvres de DESCARTES, publiées par CH. ADAM et P. TANNERY sous les auspices du ministère de l'instruction publique. Physico-mathematica, Compendium musicae, Regulae ad directionem ingenii, Recherche de la vérité, Supplément à la Correspondance. Tome X. Paris, Cerf 1908. [54
4°, 691 S. — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 14₃, 1908, 631—639. (G. LECHALAS.)

Madsen, V., To af Pascals Problemer vedrørende Cycloiden. [55
Nyt Tidsskr. for Mathem. 17, 1906, B: 49—58.

Oeuvres complètes de CHRISTIAAN HUYGENS publiées par la société hollandaise des sciences. Tome onzième. Travaux mathématiques 1645—1651. La Haye, Nijhoff 1908. [56
4°, (5) + 367 + (2) S.

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. V. [57
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1908, 289—314.

Gerland, E., Leibnizens nachgelassene Schriften physikalischen, mechanischen und technischen Inhalts (1906). [Rezension:] Bullet. d. sc mathém. 32_2, 1908, 136—137. (J. T.) [58

Kowalevski, G., Leibniz über die Analysis des Unendlichen. Eine Auswahl Leibnizscher Abhandlungen aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben. Leipzig, Engelmann 1908. [59
8°, 84 S. — [1.60 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 2680 (E. GERLAND.)

***Bloch, L.,** La philosophie de Newton. Paris, Alcan 1908. [60
8°, 642 S. — [10 fr.] — [Rezension:] Nature 78, 1908, 99—100.

Kowalevski, G., Newtons Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben. Leipzig, Engelmann 1908. [61
8°, 66 S. — [1.50 Mk.] — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 2680. (E. GERLAND.)

Mikami, Y., Seki and Shibukawa. [62
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 187—196.

[Seki-ryû Shichibusho. Tokyo 1908.] [63
4°, 108 Bl. + 1 Taf. — In japanischer Sprache. — Die sieben mathematischen Bücher der Sekischen Schule.

Rothenberg, S., Geschichtliche Darstellung der Entwicklung der Theorie der singulären Lösungen totaler Differentialgleichungen von der ersten Ordnung mit zwei variablen Größen. [64
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 20, 1908, S. 317—404 + VI S.

Schulz-Euler, S., Leonhard Euler (1907). [Rezension:] Arch. der Mathem 13_3, 1908, 256. (E. JAHNKE.) [65

Stäckel, P. und Ahrens, W., Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers (1908). [Rezension:] Zeitschr. f. mathem. Unterr. 39, 1908, 387. (H. WIELEITNER.) [66

Müller, Felix, Über Pläne zur Herausgabe von Abhandlungen Leonhard Eulers. [67
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 333—339.

Müller, Felix, Umfang der einzelnen Abhandlungen Leonhard Eulers. (Eine Ergänzung des Hagenschen Index und der Fussschen Liste.) [68
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 313—318.

Ahrens, W. und Stäckel, P., Berichtigungen zu Felix Müllers „Ergänzung des Hagenschen Index und der Fussschen Liste". [69
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 339—340.

Eneström, G., Über die Brüsseler Ausgabe von Leonhard Eulers Werken. [70
Biblioth. Mathem. 9_3, 1908, 80. — Anfrage.

Auwers, A., [Ablehnung der Teilnahme der Berliner Akademie an der Herausgabe von Eulers sämtlichen Werken]. [71
St. Pétersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 1908, 4—5. — Vom 7. Februar 1907 datiert.

Saalschütz, L., Zur Geschichte der Relationen zwischen den Potenzsummen der Wurzeln einer Gleichung und ihren Koeffizienten. [72
Biblioth. Mathem. 9_3, 1908, 65—70.

Cajori, F., On the transformation of algebraic equations by E. S. Bring (1907). — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 14_3, 1908, 662—663. (H. BOSMANS.) [73

***Bortolotti, E.,** Sulla risolvente di Malfatti. Carteggio inedito di P. Paoli e P. Ruffini. [74
Modena, Accad. d. sc., Memorie 7_3, 1906. 21 S.

Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index Volume I. Pure mathematics. Cambridge, university press 1908. [75
Groß 8°, LVIII + 666 S. — [21 sh.] — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 147—149. (C. H. MÜLLER.)

***Clerke, Agnes M.,** A popular history of astronomy during the nineteenth century. New York, Macmillan 1908. [76
8°, VI + 489 S. — [2.75 doll.] — Wiederabdruck der 1902 erschienenen 4. Auflage. — [Rezension:] Science 28_2, 1908, 454. (S. B. BARRETT.)

Hayashi, T., The conic sections in the old Japanese mathematics. [77
The americ mathem. monthly 13, 1906, 171—181.

Brückner, M., Zur Geschichte der Theorie der gleicheckig-gleichflächigen Polyeder. [78
Unterrichtsbl. für Mathem. 13, 1907, 104—110, 121—127.

Szabó, P., [Briefwechsel zwischen Gauss und Bolyai und Beiträge zur Biographie Wolfgang Bolyais]. [79
Mathem. és termész. értesitö (Budapest) 25, 1907, 324—338. — Ungarisch.

Lucas de Pesloüan, Ch., N. H. Abel (1906). — [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 237—239 (E. LAMPE.) [80

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi (1907). [Rezension:] Arch. d. Mathem. 13_3, 1908, 352—353. (J. Herzog.) — Monatsh. für Mathem. 19, 1908; Lit.-Ber. 63—64. (R. v. St.) [81

Cajori, F., The history of the conservation of energy. [82
The popular science monthly 74, 1908, 97—102.

Picard, E., La science moderne et son état actuel (1905). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 14_2, 1908, 446—448. (E. B. Wilson.) [83

Poincaré, H., L'avenir des mathématiques. [84
Palermo, Circolo matem., Rendiconti 26, 1908, 152—168. — Conférence lue dans la séance générale du 10 avril 1908 du 4e Congrès international des mathématiciens — [Wieder abgedruckt:] Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 168—190.

Vivanti, G., La nozione dell'infinito secondo gli studi più recenti. [85
Messina, Accad. Peloritana, Atti 23, 1908, 56 S.

Picard, E., La mathématique dans ses rapports avec la physique. [86
Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 141—159. — Conférence faite au IVe Congrès international de mathématiques, Rome 10 avril 1908.

***Manville, O.,** Les découvertes modernes en physique. Paris, Hermann 1908. [87
8°, 186 S. — [5 fr.] — [Rezension:] L'enseignement mathém. 10, 1908, 438. (Th. Tommasina.) — Monatsh. für Mathem. 19, 1908; Lit.-Ber. 54. — Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 295—296. (A. Becker.)

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik (1908). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908. *93—94.* (G.) — Arch. der Mathem. 13_2, 1908, 360. (E. Jahnke.) — Deutsche Literaturz. 29, 1908, 1911—1912. (F. Klein.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 39, 1908, 393. (Schotten.) [88

e) Nekrologe.

Xaver **Arnet** (1844—1906). [89
Schweizer. Naturf. Ges., Verhandl. 89 (1906), 1907, I—XIII + Porträt. (H. Bachmann.)

Henri **Becquerel** (1852—1908). [90
Nature 78, 1908, 414—416. — Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 542—543. (H. W. Schmidt.)

Wilhelm **von Bezold** (1837—1907). [91
München, Akad. d. Wiss., Sitzungsber. 37, 1907, 268—271. (C. v. Voit.)

Anton **von Braunmühl** (1853—1908). [92
Mitteil. zur Gesch. d. Medizin und d. Naturwiss. 7, 1908, 362—367. (S. Günther.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [93
Bollett. dell'assoc. naz. fra i profess. universitarii (Pisa) 2, 1907. (E. Pascal.)

John **Eliot** (1849—1908). [94
Nature 77, 1908, 490—492. (A. P.)

Asaph **Hall** (1829—1907). [95
St. Pétersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 1908, 186—187. (O. A. Backlund.)

Jules **Janssen** (1824—1907). [96
Paris, Bureau des longitudes, Annuaire 1909, 1908, C. 1—5 (Radau), 6—11 (Deslandres). — *St. Pétersbourg*, Acad. d. sc., Bulletin 1908, 231—232. (A. Bjelopoljskij.) — Revue génér. d. sc. 19, 1908, 223—225. (Ch. Nordmann.)

John **Kerr** (1824—1907). [97
Nature 76, 1907, 575—576. (C. G. Knott.)

Sophus **Lie** (1842—1899). [98
Neuchatel, Soc. d. sc. natur., Bulletin 33, 1907, 138—151. (L. Isely.)

Lorenz Leonard **Lindelöf** (1827—1908). [99
St. Pétersbourg, Acad. d sc., Bulletin 1908, 476—480. (N. Sonin.)

Maurice **Loewy** (1833—1907). [100
St. Pétersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 1907, 698. (O. A. Backlund.) — Revue génér. d. sc. 18, 1907, 949—950. (M. Hamy.)

Elie **Mascart** (1837—1908). [101
L'enseignement mathém. 10, 1908, 425. — Nature 78, 1908, 446—448.

Heinrich **Maschke** (1853—1908) [102
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 345—355 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (O. Bolza.) — *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1908, 85—95. (O. Bolza.)

Adolph **Mayer** (1839—1908). [103
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 355—362 [mit Porträt und Schriftverzeichnis]. (H. Liebmann.) — Mathem. Ann. 65, 1908, 433—434. (K. von der Mühll.)

Gabriel **Oltramare** (1816—1906). [104
Schweizer. Naturf. Ges., Verhandl. 89 (1906), 1907, LXXVIII—LXXXVI + Porträt.

Platon Sergejewitch **Porjetzky** (1846—1907). [105
Kasan, Fiz.-matem. obchtch., Isvjestija 16_2, 1908, 3—7. (D. Dubjago.)

Jakob **Rebstein** (1840—1907). [106
Schweizer. Naturf. Ges., Verhandl. 90 (1907), 1908, LXXII—LXXXIV + Porträt. (F. Becker.)

Wilhelm **Ritter** (1847—1906). [107
Schweizer. Naturf. Ges., Verhandl. 89 (1906), 1907, CVI—CXX + Porträt. (E. Meister.)

Laurence Parsons, Earl of **Rosse** (1840—1908). [108
Nature 78, 1908, 448—449.

Georg **Sidler** (1831—1907). [109
Bern, Naturf. Ges., Mitteil. 1907, 27 S. + Porträt. (J. H. Graf.)

Charles **Taylor** (1840—1908). [110
Nature 78, 1908, 373.

William **Thomson, Lord Kelvin** (1824—1907). [111
St. Pétersbourg, Acad d. sc., Bulletin 1908, 183—185. (B. Galizin.) — Nature 77, 1908, 175—177 (S. P. Thompson), 199—203. (J. L.) — Revue génér. d. sc. 19, 1908, 219—222. (P. Lugol.)

August **Weilenmann** (1843—1906). [112
Schweizer. Naturf. Ges., Verhandl. 89 (1906), 1907, CXXXV—CXXXIX + Porträt. (U. Seiler.)

Charles Augustus **Young** (1834—1908). [113
Nature 77, 1908, 324.

f) Aktuelle Fragen.

Fehr, H., Flournoy, Th., Claparède, E., Enquète sur la méthode de travail des mathématiciens. Genève, Georg 1908. [114
8°, 125 S. — Sonderabdruck aus „L'enseignement mathématique". — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 32₁, 1908, 225—229. (J. T.)

Dyck, W. von, Die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Vortrag, gehalten auf dem IV. internationalen Mathematikerkongreß in Rom am 7. April 1908. [115
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 213—227.

[Internationaler Mathematikerkongreß in Rom 1908.] [116
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 14₂, 1908, 481—498; 15₁, 1908, 8—43. (C. L. E. MOORE.) — *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti (Suppl.) 3, 1908, 19—22. — Wiadomości matem. 12, 1908, 79—96. (S. DICKSTEIN.) — Zeitschr. für mathem. Unterr. 39, 1908, 191—197. (H. WIELEITNER.)

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Köln 1908.] [117
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, *129—139*.

[Französische Mathematiker-Versammlung in Clermont-Ferrand 1908.] [118
L'enseignement mathém. 10, 1908, 418—424.

[EULER-Feier in Basel 1907.] [119
St. Pétersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 1907, 476. (O. A. BACKLUND.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor G. A. Bliss in Princeton zum Professor der Mathematik an der Universität in Chicago.

— Professor F. Boll in Würzburg zum Professor der klassischen Philologie an der Universität in Heidelberg.

— „Lieutenant-colonel“ Bourgeois in Paris zum Professor der Geodäsie und Astronomie an der „Ecole polytechnique“ daselbst.

— „Instructor“ A. D. Butterfield in Burlington zum Professor der Mathematik am „Polytechnic institute“ in Worchester.

— Professor A. D. Cole in Poughkeepsie zum Professor der Physik an der „Ohio state university“ in Columbus.

— H. H. Dalaker zum Professor der Mathematik an der Universität von Minnesota in Minneapolis.

— R. S. Dugan in Princeton zum Professor der Astronomie an der Universität daselbst.

— H. Dulac in Poitiers zum Professor der Mathematik an der „Ecole des sciences“ in Algier.

— E. P. R. Duval in Madison zum Professor der Mathematik an der Universität von Oklahoma

— E. Esclangon in Bordeaux zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst

— A. B. Frizell in Cambridge, Mass. zum Professor der Mathematik und Astronomie am „Midland college“ in Atchison, Kansas

— Professor F. W Hanawalt am „Albion college“ zum Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität von Puget Sound

— G. W. Hartwell an der „Columbia university“ zum Professor der Mathematik an der Universität von Kansas in Lawrence.

— Dr. C. Haseman in Bloomington zum Professor der Mathematik an der Universität von Indiana daselbst.

— Dr. H. G. Keppel in Chicago zum Professor der Mathematik an der Universität von Florida.

— Professor M. Lacombe in Zürich zum Professor der Geometrie an der Universität in Lausanne.

— J. N. Lennes in Boston zum Professor der Mathematik an der „Brown university“.

— B. Mc Cullum in Lawrence zum Professor der Physik an der Universität von Kansas daselbst.

— Professor T. E. Mc Kinney in Middletown zum Professor der Mathematik an der Universität von South Dakota.

— Dr. H. Moritz zum Direktor der Sternwarte in Rio de Janeiro.

— Professor A. H. Patterson an der Universität von Georgia zum Professor der Physik an der Universität von North Carolina.

— Professor F. Prohazka in Brünn zum Professor der darstellenden Geometrie an der tschechischen technischen Hochschule in Prag.

— Privatdozent F. Ristenpart in Berlin zum Professor der Astronomie an der Universität in Santiago de Chile.

— Dr. W. H. Roever in Boston zum Professor der Mathematik an der „Washington university“ in St Louis.

— Privatdozent E Schmidt in Bonn zum Professor der Mathematik an der Universität in Zürich.

— Privatdozent S. Tscherny in Kiew zum Professor der Astronomie an der Universität in Warschau.

— Dozent R. Wachsmuth in Frankfurt am Main zum Professor der Physik an der Akademie daselbst.

— L. E. Woodman zum Professor der Physik an der Universität von Maine in Orono.

Todesfälle.

— Henri Becquerel, Ständiger Sekretär der Akademie der Wissenschaften in Paris, geboren in Paris 15. Dezember 1852, gestorben daselbst den 25. August 1908.

— W. R. Cassie, Professor der Physik am „Royal Holloway college for women" in Egham, geboren in Fraserburgh 1861, gestorben den 22. Juni 1908.

— Luiz Cruls, Direktor der Sternwarte in Rio de Janeiro, geboren in Diest (Brabant) den 21. Januar 1848, gestorben in Paris im August (?) 1908.

— Alexis Hansky, Adjunktastronom an der Sternwarte in Pulkowa, gestorben in der Krim den 11. August 1908, 38 Jahre alt.

— Alexander Korkin, Professor der Mathematik an der Universität in St. Petersburg, geboren zu Totma, Wologda den 3. März 1837, gestorben in St. Petersburg den 1. April 1908.

— Elie Mascart, Professor der Physik am „Collége de France" in Paris, geboren zu Quarouble (dép. de Nord) den 20. Februar 1837, gestorben in Poissy den 26. August 1908.

— James Moser, Privatdozent der Physik an der Universität in Wien, geboren in Berlin den 11. März 1852, gestorben auf dem Semmering den 23. September 1908.

— Max Rosenmund, Professor der Geodäsie am Polytechnikum in Zürich, gestorben den 19. August 1908, 51 Jahre alt.

— Laurence Parsons, Earl of Rosse, Astronom, geboren zu Birr Castle, Irland, den 17. November 1840, gestorben den 29 August 1908.

— Charles Taylor, „Master" am St Johns college in Cambridge, geboren in London den 27. Mai 1840, gestorben in Nürnberg den 12. August 1908.

— Adolph Wüllner, Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Aachen, geboren in Düsseldorf den 13. Juni 1835, gestorben in Aachen den 6. Oktober 1908.

Die geplante Euler-Ausgabe.

— In der Versammlung in Glarus hat die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft den 31. August 1908 den folgenden Beschluß gefaßt: 1. Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft erklärt sich bereit, eine Gesamtausgabe der Werke Leonhard Eulers ins Leben zu rufen, unter der Voraussetzung, daß dieses Unternehmen durch die hohen Eidgenössischen und kantonalen Behörden, sowie durch in- und ausländische Körperschaften und Freunde der Wissenschaft unterstützt werde, und daß die zur Durchführung erforderlichen wissenschaftlichen Kräfte ihre Mitwirkung zur Verfügung stellen. 2. Die Schweizerische Naturforschende Gesellschaft beauftragt die Euler-Kommission in Verbindung mit dem Zentralkomitee mit der Durchführung der Vorarbeiten. 3. Nach Beendigung der Vorarbeiten ist ein abermaliger Beschluß der Gesellschaft notwendig, um die Herausgabe in Angriff nehmen zu können.

— In der Versammlung in Köln hat die Deutsche Mathematiker-Vereinigung beschlossen, die Herausgabe der Werke Eulers wirksam zu unterstützen und als Beitrag zu den Kosten die Summe von 5000 Franken zur Verfügung zu stellen.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Wintersemester 1908—1909 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der neueren Astronomie angekündigt.

— An der Technischen Hochschule in Darmstadt hat Professor F. Gräfe für das Wintersemester 1908—1909 eine Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

— An der Universität in Göttingen haben für das Wintersemester 1908—1909 Professor F. Bernstein eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der neueren Mathematik und Professor H. Ambronn ebenfalls eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der Astronomie angekündigt.

— A l'université de Moskwa M. V. Bobynin a professé pendant l'année scolastique 1907—1908 un cours sur l'histoire

des mathématiques dans l'antiquité (une heure par semaine) et un autre cours sur l'histoire des mathématiques modernes (aussi une heure par semaine).

— Das „College of arts and science" an der Universität von Maine in Orono hat für das Herbstsemester 1908 eine Reihe von Vorlesungen über Geschichte der Wissenschaften angekündigt. Professor J. N. Hart wird die Geschichte der Mathematik und Professor Stevens die Geschichte der Physik behandeln.

— At the university of Princeton Professor H. D. Thompson will deliver during the academic year 1908—1909 a course (three hours each weak) on the history of the infinitesimal calculus.

Mathematiker-Versammlungen im Jahre 1908.

— *Deutsche Mathematiker-Vereinigung.* Die Jahresversammlung 1908 der Deutschen Mathematiker-Vereinigung fand zu Köln 20.—23. September statt. In der ersten Sitzung hielt Herr E. Timerding einen Vortrag über die historische Entwickelung des Kraftbegriffs, und in der zweiten Sitzung kam ein Vortrag von Herrn Felix Müller „Über Pläne zur Herausgabe von Werken Leonard Eulers" vor. Andere Vorträge wurden gehalten von den Herren H. Minkowski, G. Hamel, P. Stäckel, R. von Mises, H. Wiener, H. Reissner und H. Jung. Verschiedene Geschäftsberichte wurden erstattet, und am 23. September fand eine Debatte über die Dresdner Vorschläge, betreffend die wissenschaftliche Ausbildung der Lehramtskandidaten der Mathematik und Naturwissenschaften statt.

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie de Belgique à Bruxelles.* Concours de l'année 1909. On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale de l'espace euclidien reglé, avec le résumé des travaux déjà publiés sur lesquels s'appuient les nouvelles recherches. — Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes.

— *Istituto Lombardo in Milano.* Concurso dell'anno 1908. La teoria dei gruppi di trasformaizone fondata specialmente da Lie e sviluppata nell' ultimo trentennio, si è mostrata feconda delle più svariate applicazioni alla geometria e alla analisi matematica. Il lavoro dovrà portare un contributo od un perfezionamento notevole ed originale a questo importante teoria.

Vermischtes.

— Auf Antrag der Deutschen Mathematiker-Vereinigung hat die Universitätsbibliothek in Göttingen sich bereit erklärt, mathematische Manuskripte, Briefe usw., die ihr von der Vereinigung übergeben werden, aufzubewahren und zur wissenschaftlichen Benutzung bereit zu stellen. Ein interessanter Brief von Steiner an Jacobi ist von Herrn Jolles in Berlin dem Archiv geschenkt worden

A Greek multiplication table.

By David Eugene Smith in New York.

It is well known that we have no Greek treatise on the ancient logistic (λογιστική) extant, and that our knowledge of the processes of computation as used in Athens and Alexandria in classical times is therefore very limited. It has been thought from a remark of Herodotus[1]) that the Greeks made considerable use of the abacus in their calculations, and the Salamis abacus[2]) gives some support to this theory. The assertion, however, that the Darius vase at Naples has a picture of a computer using an abacus is entirely without foundation as any one can tell from a critical examination of the piece.[3]) What is represented is an ordinary money changer or tax receiver with coins on a table such as one might see anywhere in the Orient today. The table has no resemblance to an abacus, and the general absence of references to such an instrument in Greek literature shows that relatively little, if any, use was made of it. Indeed, after abandoning the Herodian numerals the Greeks would have had but little need for the abacus, since their alphabetic symbols answered their demands in the matter of computation.[4])

Of the fact that the Greek computation was generally quite independent of *calculi* (ψῆφοι), not differing in general principles from that of Italy in say the fifteenth century, there is an interesting witness in the British Museum[5]) which has never, I believe, been brought to the

1) Hist. II: 36, see Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* I³, p. 88.

2) A. Nagl, *Die Rechenmethoden auf dem griechischen Abakus;* Abhandl. zur Gesch. d. Mathem. 9, 1899, p. 335—357.

3) See also Cantor, *Vorlesungen* I³, p. 132.

4) The best recent article upon this phase of the subject is that of J. G. Smyly, *The employment of the alphabet in Greek logistic,* in the Mélanges Nicole, Genève 1905, p. 521.

5) Add. MS. 34186.

attention of historians of mathematics. It consists of a two-leaved wax tablet of the ordinary form, each leaf being about 15,5 by 22,5 cm., and bordered by a wooden frame giving it the appearance of a modern slate, as shown by the illustration. It was evidently a schoolboy's tablet, and it brings vividly before us the work as its youthful owner left it, perhaps nearly two thousand years ago. Half of one face is, as the reproduction showns, part of the multiplication table as follows[1]):

α α α	(i. e., $1 \times 1 = 1$)	*Γ α Γ*	(i. e., $3 \times 1 = 3$)
B α B	(„ $2 \times 1 = 2$)	*Γ B ϛ*	(„ $3 \times 2 = 6$)
B B Δ	(„ $2 \times 2 = 4$)	*Γ Γ Θ*	(„ $3 \times 3 = 9$)
B Γ ϛ	(„ $2 \times 3 = 6$)	*Γ Δ IB*	(„ $3 \times 4 = 12$)
B Δ η	(„ $2 \times 4 = 8$)	*Γ ε Iε*	(„ $3 \times 5 = 15$)
B ε I	(„ $2 \times 5 = 10$)	*Γ ϛ Iη*	(„ $3 \times 6 = 18$)
B ϛ IB	(„ $2 \times 6 = 12$)	*Γ Z KI*	(„ $3 \times 7 = 21$)
B Z IΔ	(„ $2 \times 7 = 14$)	*Γ H KΔ*	(„ $3 \times 8 = 24$)
B H Iϛ	(„ $2 \times 8 = 16$)	*Γ Θ KZ*	(„ $3 \times 9 = 27$)
B Θ Iη	(„ $2 \times 9 = 18$)	*Γ I λ*	(„ $3 \times 10 = 30$)
B I K	(„ $2 \times 10 = 20$)		

Unfortunately the history of the tablet is unknown. At one time it belonged to an English clergyman, the Reverend G. J. CHESTER, and at his death it was transferred, in 1892, to the British Museum, by his nephew and executor, who tells me that he is unable to give any information as to where or when his uncle obtained it. The Museum authorities believe it to date from the second century A. D., and it probably came from Alexandria or vicinity. The form of the characters, and the mingling of capitals and small letters, both allow of an earlier date. For example there is a Greek papyrus in the British Museum[2]) assigned to the third century B. C. in which the numerals are very similar to those on this tablet, so that the period is quite uncertain.

It seems safe to say that, however, whatever the date assigned, this is the oldest manuscript of the multiplication table extant, save those that have come down to us on the cuneiform cylinders of Babylon.[3])

It will be noticed that the arrangement, with its absence of symbols of operation, is essentially that of RHABDAS (1340), who gives what „the

1) One face of the other part has two lines of iambic verses, probably from MENANDER, written by a schoolmaster and copied by a pupil.

2) No. pap. 577.

3) H. V. HILPRECHT, *Mathematical, metrological and chronological tablets from the temple library of Nippur*. Philadelphia 1906.

Smith: A Greek multiplication table.



very wise PALAMEDES taught" him, and of the Florentine manuscript tables of the fifteenth century.[1]) It is therefore not unreasonable to suppose that in the Greek civilization this arrangement of the table may have continued and may finally have been transmitted to Italy from the eastern capital when the Roman numerals were discarded.

The piece is also interesting as showing the forms of the capital and small letters practically used by the Greeks for numerical purposes at about the time of NICOMACHUS, and as possessing a certain human interest in the picture so delightfully revealed of the school life of the early Christian era.

1) See my *Rara arithmetica*, Boston 1908, p. 460.

Eine indische Methode der Berechnung der Kugeloberfläche.

Von Heinrich Suter in Zürich.

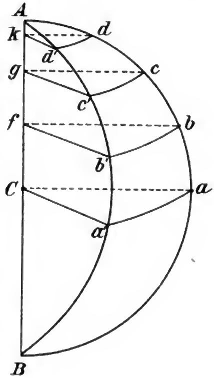
Es ist merkwürdig, daß ein sehr interessantes und eigentümliches indisches Verfahren, die Oberfläche der Kugel zu berechnen, bis jetzt den Geschichtschreibern der Mathematik entgangen ist, obgleich es schon vor 47 Jahren durch den Druck veröffentlicht worden ist.[1]) Es rührt dies jedenfalls davon her, daß sich dasselbe in dem astronomischen Teil des *Siddhānta Śiromani* von Bhāskara befindet, betitelt „Golādhyāya" = Sphärik, dessen Durchlesung von denjenigen, die sich nur mit der Geschichte der reinen Mathematik beschäftigen, nicht für nötig erachtet wurde. Die Verse 58—61 dieses Werkes lauten nach der Übersetzung Wilkinsons (s. die unten angeführte englische Übersetzung p. 123—125), die ich hier in ziemlich freier deutscher Übertragung wiedergebe:

„Nimm die Länge des Äquators einer Kugel = 96 an und teile die Kugeloberfläche in ebenso viele von Pol zu Pol gehende Streifen (sphärische Zweiecke), wie sie von der Natur auf der Ānwlā-Frucht[2]) geformt sind. Wenn du dann die Oberfläche eines solchen Streifens mit Hilfe seiner Teile bestimmst, so findest du den Ausdruck: Summe aller Sinus vermindert um den halben Radius und (diese Differenz) dividiert durch dieselbe Größe (halbe Radius). Da nun die Oberfläche eines solchen Streifens sich so groß als der Durchmesser der Kugel ergibt, so ist also damit bewiesen, daß das Produkt aus dem Durchmesser der Kugel in deren Umfang gleich der Oberfläche der Kugel ist."

1) *Translation of the Surya Siddhānta by Pundit Bāpū Deva Sāstri, and of the Siddhānta Śiromani by the late L. Wilkinson, revised by P. Bāpū Deva Sāstri, from the Sanskrit.* Calcutta 1861.

2) Soll nach einer mir gütigst durch Herrn Prof. A. Kägi in Zürich vermittelten Mitteilung von Herrn Prof. Garbe in Tübingen eine Varietät der Frucht des Mangobaumes sein. Beiden Herren spreche ich an dieser Stelle meinen verbindlichsten Dank aus.

Den Beweis dieser Regel gibt Bhāskara selbst in einem Kommentar in folgender Weise:



Es sei $Ca = r$; der Kreisumfang wird $= 96$ gesetzt und in 96 gleiche Teile geteilt, so ist ein solcher Teil (ab, bc, cd ... seien solche) $= 1$; ebenso sei aa' auch der 96. Teil des Äquators, also auch $= 1$. Denkt man sich die Sehnen aa', bb', cc' ... gezogen, so sind die Dreiecke Caa', fbb', gcc' ... untereinander ähnlich, also hat man z. B. die Proportion:

$$bb' : fb = aa' : Ca,$$

und da $Ca = r$ und $aa' = 1$, so ist $bb' = \frac{fb}{r}$. Ebenso findet man $cc' = \frac{gc}{r}$, $dd' = \frac{kd}{r}$ usw., wo fb, gc, kd ... die Sinus der Bogen Ab, Ac, Ad ... sind. Betrachtet man nun die kleinen Flächenstücke $aa'bb'$, $bb'cc'$ ... als ebene Trapeze, so hat man, da die Höhe aller Trapeze und auch des obersten Dreiecks $= ab = 1$ ist:

$$\text{Sphärisches Dreieck } Aaa' = \frac{aa' + bb'}{2} + \frac{bb' + cc'}{2} + \frac{cc' + dd'}{2} + \cdots$$
$$= \frac{aa'}{2} + bb' + cc' + dd' + \cdots$$

oder die Werte von aa', bb', cc' ... eingesetzt:

$$\text{Sphärisches Dreieck } Aaa' = \frac{1}{2} + \frac{fb}{r} + \frac{gc}{r} + \frac{kd}{r} + \cdots$$
$$= \frac{r + fb + gc + kd + \cdots - \frac{r}{2}}{r}$$

also das Zweieck $AaBa' = \dfrac{r + fb + gc + kd + \cdots - \frac{r}{2}}{\frac{r}{2}}$, w. z. b. w.

Bhāskara setzte nun die 24 Sinus (von $3^3/_4{}^0$ zu $3^3/_4{}^0$) des Quadranten ein und fand diese Fläche $= 30\frac{33}{60}$ ($= 30^p\,33'$); diese Zahl mit 96 multipliziert, gab die Oberfläche der Kugel $= 2932\frac{48}{60}$.[1]) Bhāskara wollte aber nicht nur die Oberfläche der Kugel haben, sondern zeigen, daß dieselbe gleich dem Produkte aus Umfang und Durchmesser sei, er mußte also den Zusammenhang zwischen der Flächenzahl $30\frac{33}{60}$ und den Größen d und π nachweisen; er fand leicht, wir denken durch Versuche, daß

1) Diese Zahl läßt Bhāskara weg.

$96 : \pi = 30\frac{33}{60}$ (π mag $3^{p}\,8'\,30''$, oder $3^1/_7$, oder 3,1416 gesetzt werden)[1]); also war, da $96 =$ Umfang $= d\pi$ ist, die Flächenzahl $30\frac{33}{60} =$ der Längenzahl d, also Oberfläche der Kugel $= 30\frac{33}{60} \cdot 96 = d \cdot d\pi = d^2\pi$.

Dieses Verfahren, die Oberfläche der Kugel durch Summation kleiner Kugeltrapeze zu bestimmen, unter Zuhilfenahme der Sinus, und zugleich der Beweis, daß $O = d \cdot d\pi$ ist, sind gewiß sehr originell und jedenfalls nicht griechischen Quellen entnommen. Trotzdem BHĀSKARA den Quadranten nur in 24 Teile teilte und die bekannten Werte der indischen Sinustafel bezogen auf den Radius 3438 nahm, ist der Fehler nur ein verhältnismäßig kleiner; wir finden nach der Formel $d^2\pi$ für die Oberfläche der Kugel mit dem Umfang 96 die Zahl 2933,5.

Wir wollen jetzt die Methode BHĀSKARAS noch mit unseren heutigen Mitteln prüfen.

Es ist bekanntlich, wenn wir die Summe der Reihe

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \cdots + \sin nx$$

mit S bezeichnen:

$$S = \frac{\sin \frac{1}{2}nx \cdot \sin(\frac{1}{2}nx + \frac{1}{2}x)}{\sin \frac{1}{2}x}.$$

Ist nun $nx = 90^0$, so wird

$$S = \frac{\sin 45^0 \cdot \sin(45^0 + \frac{1}{2}x)}{\sin \frac{1}{2}x} = \frac{1}{2}\cot\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}.$$

Es ist also das sphärische Zweieck nach BHĀSKARAS Regel

$$= \frac{S - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \cot\frac{1}{2}x.$$

Nimmt man nun wie BHĀSKARA $x = 3^3/_4{}^0$ an, so ist das Zweieck $= \cot 1^0\,52'\,30'' = 30{,}55 = 30\frac{33}{60}$; es ist aber $\cot\frac{1}{2}x = \frac{\cos\frac{1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}$; wenn x sehr klein ist, so kann man $\cos\frac{1}{2}x = 1$ und $\sin\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$ setzen und erhält so: $\cot\frac{1}{2}x = \frac{2}{x}$, oder, wenn der Radius $= r$ gesetzt wird: $\cot\frac{1}{2}x = \frac{2r}{x}$; da nun BHĀSKARA $x = aa' = 1$ annahm, so erhielt er:

$$\text{Zweieck} = \cot\frac{1}{2}x = 2r = \text{Durchmesser}.$$

Je kleiner x ist, desto besser wird natürlich die Gleichung $\cot\frac{1}{2}x = \frac{2}{x}$ erfüllt.

1) Wir neigen zur Ansicht hin, BHĀSKARA habe den PTOLEMÄISCHEN Wert genommen, weil er die Fläche des Zweiecks in Sexagesimalzahlen ausdrückt

Teilen wir nun allgemeiner den Quadranten in n gleiche Teile und nehmen den Radius $= r$ an, so ist ein solcher Teil $aa' = x = \frac{2r\pi}{4n} = \frac{r\pi}{2n}$. Man findet nun auf analoge Weise wie vorher, da $aa' = x = 1$ angenommen wurde:

$$\text{Sphärisches Zweieck} = (aa')^2 \cdot \cot \tfrac{1}{2}x = \frac{(aa')^2 \cdot 2r}{x}$$

und da $x = aa'$ ist:

$$\text{Sphärisches Zweieck} = aa' \cdot 2r = \frac{r\pi}{2n} \cdot 2r = \frac{r^2\pi}{n}.$$

Die ganze Oberfläche O hat aber $4n$ solcher Zweiecke, also

$$O = \frac{r^2\pi}{n} \cdot 4n = 4r^2\pi.$$

Nachschrift: Nachdem dieser Artikel schon geschrieben war, machte mich Herr Eneström darauf aufmerksam, daß vielleicht eine Verwandtschaft dieser Ableitung des Bhāskara mit einer Abhandlung Keplers bestehen könnte, mit welcher sich S. Günther und G. Eneström seinerzeit[1]) beschäftigt haben. Die Verwandtschaft besteht aber nur darin, daß in beiden Arbeiten eine Summation von Sinus vorkommt (bei Kepler eigentlich die Summation oder das Integral von $\sin\varphi \cdot d\varphi$); Kepler nahm aber diese Summation zu einem ganz anderen Zwecke vor als Bhāskara Auch kannte letzterer wahrscheinlich den Satz bei Pappus nicht, den auch Kepler bei seiner Untersuchung benutzt hat, und der über das Verhältnis der Flächen von Kugelkalotten mit parallelen Grundkreisen handelt.[2])

1) Vgl. Biblioth. Mathem. 2_2, 1888, p. 81—87, und 3_2, 1889, p. 65—66.

2) Dieser Satz findet sich übrigens schon bei Archimedes (*Opera omnia*, edid. Heiberg, II p. 177 und p. 207) und auch bei Heron (*Opera*, edid. Schöne, III p. 89).

Die erste Herleitung von Differentialen trigonometrischer Funktionen.

Von G. Eneström in Stockholm.

In den gewöhnlichen mathematisch-historischen Handbüchern werden Aufschlüsse über die erste Herleitung von Differentialen der einfachsten algebraischen Funktionen gegeben, und auch über Differentiation von Logarithmen und Exponentialgrößen kann man ziemlich leicht historische Notizen bekommen. Will man aber wissen, wo die Differentiale der einfachen trigonometrischen Funktionen zuerst hergeleitet worden sind, so bringen die Handbücher nur sehr unvollständige Auskunft. Beispielsweise verweist das Register der 2. Auflage des 3. Bandes der Cantorschen *Vorlesungen* unter dem Stichwort: „Differentiren trigonometrischer Functionen" auf die Seiten 214, 412—414, aber aus diesen Stellen ersieht man nur, daß Leibniz 1693 die Relation

$$a^2\left(d \text{ arc sin } \frac{x}{a}\right)^2 = a^2 dx^2 + x^2\left(d \text{ arc sin } \frac{x}{a}\right)^2$$

oder

$$dy^2 = (d \sin y)^2 + \sin^2 y dy^2$$

kannte, und daß in der 1722 erschienenen posthumen Arbeit *Aestimatio errorum in mixta mathesi* von Cotes die Ausdrücke für $d \sin x$, $d \operatorname{tg} x$ und $d \sec x$ zusammengestellt sind. Diese Notizen sind natürlich allzu fragmentarisch, um den Leser, der wirkliche Auskunft über die Frage sucht, befriedigen zu können, und da auch die übrigen in Betracht kommenden mathematisch-historischen Arbeiten kaum weitere Aufschlüsse hierüber mitteilen[1]), scheint es mir nicht unangebracht zu sein, die Frage zum Gegenstand eines besonderen Artikels zu machen.

1) In H. G. Zeuthens *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert* (Leipzig 1903) habe ich gar keine Notizen auffinden können. A. von Braunmühl hat im Register des 2. Bandes (Leipzig 1903) seiner *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* ein Stichwort „Differentiation trigonometrischer Funktionen", aber der einzige Verweis (auf S. 78) bezieht sich auf Cotes, und Braunmühl sagt nur, daß

Bekanntlich hat LEIBNIZ in seiner epochemachenden Abhandlung aus dem Jahre 1684 die Differentiale der Ausdrücke x^a und $\sqrt[b]{x^a}$ angegeben und er hat ferner gezeigt, wie auf Grund dieser einfachen Formeln die Differentiale zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke hergeleitet werden können[1]); dieselben Lehrsätze hat HÔPITAL 1696 mitgeteilt[2]), aber weder bei LEIBNIZ noch bei HÔPITAL wird etwas über Differentiation von trigonometrischen Funktionen gesagt. Dieser Umstand kann auffällig erscheinen, ist aber in Wirklichkeit leicht zu erklären. Erstens kamen vor dem Ende des 17. Jahrhunderts keine Gleichungen vor, die explizit trigonometrische Funktionen enthielten, denn man hatte damals keine Zeichen, weder für die goniometrischen, noch für die zyklometrischen Funktionen; aus diesem Grunde wurden die trigonometrischen Funktionen durch neue Buchstaben bezeichnet, und aus der Gleichung war natürlich nicht ersichtlich, ob ein Buchstabe eine trigonometrische Funktion oder eine andere Größe bezeichnete.[3]) Zweitens konnten die Differentiale von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{arc}\sin x$, $\operatorname{arc}\cos x$ unmittelbar unter Zuhilfenahme des sogenannten „charakteristischen Dreiecks" hergeleitet werden. Wenn es sich um die Lösung eines Problems handelte, wobei nach unserem Verfahren eine Differentiation trigonometrischer Funktionen erforderlich wäre, so konnte man darum das Resultat sofort aus der geometrischen Figur ausfindig machen. Bekanntlich nannte LEIBNIZ „charakteristisches Dreieck" eines Punktes einer gegebenen Kurve das unendlich kleine rechtwinklige Dreieck mit den Seiten dx, dy, ds, wenn x, y, s bzw. Abszisse, Ordinate und Bogenlänge bezeichnen.[4]) Nimmt man an, daß die Kurve ein Kreis mit der Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ sei, so findet man sofort aus der Figur

$$dy : ds = \sqrt{a^2 - y^2} : a, \quad -dx : ds = \sqrt{a^2 - x^2} : a,$$

dieser „die Regeln für die Differentiation trigonometrischer Funktionen wenigstens erstmalig zusammengestellt hat". J. G. HAGENS *Synopsis der höheren Mathematik* (3, Berlin 1900—1905, S. 18—19) gibt gar keine Auskunft über die Frage, ebensowenig wie die *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* (II:1:1, Leipzig 1899, S. 62—63) und das *Formulario mathematico* von G. PEANO (5, Torino 1908, S. 285—286).

1) G. W. LEIBNIZ, *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus;* Acta erud. 1684, S. 467—472.

2) DE L'HÔPITAL, *Analyse des infiniments petits pour l'intelligence des lignes courbes,* Paris 1696, prop. IV; seconde éd., Paris 1715, S. 6—9.

3) Die Angabe BRAUNMÜHLS in der Biblioth. Mathem. 1_3, 1900, S. 71: „JACOB BERNOULLI schrieb sogar schon ziemlich konsequent sin., tang. und sec. mit Nachsetzung des Bogens" bezieht sich nicht auf die Schreibung von Formeln, sondern auf die Herleitung derselben (vgl. Acta erud. 1691, S. 287).

4) Siehe G. W. LEIBNIZ, *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum;* Acta erud. 1686, S. 298.

und da

$$s = \text{arc sin}\,\frac{y}{a} = \text{arc cos}\,\frac{x}{a},$$

wird also

$$d\,\text{arc sin}\,\frac{y}{a} = \frac{a\,dy}{\sqrt{a^2 - y}},\quad d\,\text{arc cos}\,\frac{x}{a} = -\,\frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Anderseits ist

$$y = a\sin s,\quad x = a\cos s,\quad \sqrt{a^2 - y^2} = a\cos s,\quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\sin s,$$

folglich

$$d\sin s = \cos s\,ds,\quad d\cos s = -\sin s\,ds.$$

In Wirklichkeit müssen also die Formeln für $d\sin x$, $d\cos x$, $d\,\text{arc sin}\,x$, $d\,\text{arc cos}\,x$ schon den ersten Bearbeitern der Differentialrechnung bekannt gewesen sein[1]), und es muß lediglich als ein Zufall betrachtet werden, daß Leibniz nicht schon 1684 Anlaß hatte, wenigstens ein paar derselben in seiner oben erwähnten Abhandlung anzugeben. Einen solchen Anlaß bekam er indessen 1686, als er die Abhandlung *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* veröffentlichte; in dieser Abhandlung kommt im Vorübergehen[2]) die folgende Bemerkung vor:

$$\text{sit arcus } a,\ \text{sinus versus } x,\ \text{fiet } a = \int dx : \sqrt{2x - xx},$$

und da sin vers $a = 1 - \cos a$, so enthält die Bemerkung die Formel

$$da = \frac{d(1 - \cos a)}{\sqrt{2(1 - \cos a) - (1 - \cos a)^2}} = -\,\frac{d\cos a}{\sqrt{1 - \cos^2 a}}$$

oder wenn man $\cos a = y$ setzt,

$$d\,\text{arc cos}\,y = -\,\frac{dy}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

Selbstverständlich kann man ebensoleicht aus der Leibnizschen Bemerkung die inverse Formel

$$d\cos a = -\sin a\,da$$

1) Eigentlich könnte man sagen, daß die Formeln für $d\sin x$, $d\cos x$, $d\,\text{arc sin}\,x$, $d\,\text{arc cos}\,x$ schon bei der Erfindung der Differentialrechnung als bekannt betrachtet werden konnten. Beispielsweise findet sich in einer 1659 erschienenen Schrift Pascals sowie in dem 1670 gedruckten zweiten Teile der Wallisschen Arbeit *Mechanicorum sive tractatus de motu* ein Satz, der mit der Formel $\int_0^x \sin x\,dx = 1 - \cos x$ durchaus identisch ist (siehe Pascal, *Oeuvres* 5, Paris 1819, S. 312; Wallis, *Opera mathematica* 1, Oxoniae 1695, S. 760). Ebenso hat Barrow in seinem 1670 erschienenen *Lectiones geometricae* einen Satz angegeben, der in unserer mathematischen Sprache durch die Formel $\int \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = a\,\text{arc cos}\,\frac{x}{a}$ ausgedrückt werden könnte (siehe seine *Mathematical works*, ed. by W. Whewell, Cambridge 1860, S. 292 der zweiten Paginierung).

2) G. W. Leibniz, *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum;* Acta erud. 1686, S. 297.

herleiten. Bei einer flüchtigen Lektüre der soeben erwähnten Abhandlung von LEIBNIZ könnte man vielleicht glauben, daß darin noch Formeln für d arc sin x und d sin x enthalten seien, denn an einer Stelle[1]) bemerkt LEIBNIZ: „in aequationibus differentialibus, qualis paulo ante erat $a = \int dx : \sqrt{1 - xx} \ldots$“, und in dieser Bemerkung findet sich ja die Formel für arc sin x, aber ich bin geneigt, hier $1 - xx$ als Druckfehler statt $2x - xx$ anzusehen. Dagegen findet sich in einer sieben Jahre später erschienenen Abhandlung[2]) von LEIBNIZ der folgende Passus

> Sit arcus circuli Y et sinus rectus X, radius vero sit a; constat ex nostra methodo differentiali, generalem relationem inter arcum et sinum posse exprimi hac aequatione: $a^2\overline{dy}^2 = a^2\overline{dx}^2 + x^2\overline{dy}^2$,

woraus man ja sofort teils

$$d \text{ arc sin } \frac{x}{a} = \frac{a\,dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

teils

$$d \sin y = \cos y\,dy$$

herleiten kann.

Daß die Formeln für d arc sin x, d arc cos x, d sin x, d cos x zu derselben Zeit wohl bekannt waren, geht auch aus verschiedenen Abhandlungen der Brüder BERNOULLI hervor. Beispielsweise gibt JACOB BERNOULLI 1691 die Gleichung an[3])

$$OC = \frac{r\,dz}{\sqrt{rr - zz}},$$

wo OC das Differential des Bogens eines Kreises mit dem Radius r bedeutet und z der Cosinus des Bogens ist, und die Gleichung enthält also die Formel

$$d \text{ arc cos } \frac{z}{r} = \frac{r\,dz}{\sqrt{r^2 - z^2}}.$$

Daß im zweiten Gliede das Minuszeichen fehlt, hat für JACOB BERNOULLI keine Bedeutung, weil er später alle Quadratwurzeln durch Quadrieren entfernt.

Ebenso kommen in Abhandlungen von JOHANN BERNOULLI aus dem Jahre 1694 Gleichungen vor, aus denen man unmittelbar die Formeln für

1) A. a. O. S. 299.

2) G. W. LEIBNIZ, *Supplementum geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae methodi generalissimae per series infinitas;* Acta erud. 1693, S. 179.

3) JACOB BERNOULLI, *Specimen alterum calculi differentialis in dimetienda spirali logarithmica, loxodromiis nautarum et areis triangulorum sphaericorum: una cum additamento quodam ad problema funicularium, aliisque;* Acta erud. 1691, S. 287.

d arc sin x, d arc cos x (freilich ohne Minuszeichen) und $d \sin x$ herleiten kann.[1])

Daß auch die Formeln für d arc tg x und d tg x vor dem Ende des 17. Jahrhunderts bekannt waren, kann nicht bezweifelt werden. Leibniz wußte schon 1674[2]), daß

$$\text{arc tg}\, x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \cdots,$$

und da Leibniz 1713 in einem Brief an Chr. Wolff ausdrücklich angibt, er habe diese Formel aus der Reihe

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

durch Integration erhalten[3]), so ist es wohl sicher, daß er sehr früh die Formel

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tg}\, x$$

kannte.[4]) Die erste gedruckte Schrift, wo die Formel für d arc tg x ausdrücklich angegeben wird, ist indessen meines Wissens die *Analyse démontrée* (1708) Reyneaus; hier werden[5]) erst die Formeln für d arc sin vers $\frac{x}{r}$ aus arc sin $\frac{x}{r}$ hergeleitet, dann die Formel für d arc tg $\frac{x}{r}$

$$du = \frac{rr\,dx}{rr + xx},$$

wo u den Bogen, r den Radius des Kreises bedeutet und $x = r$ tg u. Vielleicht hat Reyneau seine Herleitung aus Johann Bernoullis Vor-

1) Johann Bernoulli, *Constructio facilis curvae recessus aequabilis a puncto dato, per rectificationem curvae algebraicae;* Acta erud. 1694, S. 396. — *Additamentum effectionis omnium quadraturarum et rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam;* Acta erud. 1694, S. 439.

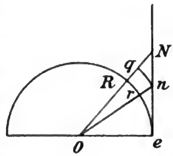
2) Vgl. *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausgegeben von C. I. Gerhardt, 5, Halle 1858, S. 97.

3) Siehe Acta erud. Suppl. 5, 1713, S. 265. *Leibnizens Mathematische Schriften* 5, S. 383.

4) Vgl. G. W. Leibniz, *Specimen novum analyseos pro scientia infiniti, circa summas et quadraturas;* Acta erud. 1702, S. 218: „$\int \frac{dz}{zz+1}$ pendere ex quadratura circuli a me primum cum quadratura mea arithmetica est inventum." — Johann Bernoulli, *Solution d'une problème concernant le calcul intégral, avec quelques abrégés par raport à ce calcul;* Mém. de l'acad. d. sc. de Paris 1702, S. 305: „$\int a\,dz : (bb + zz)$ dépend de la quadrature du cercle."

5) Ch. Reyneau, *Analyse démontrée* 2, mit dem Spezialtitel: *Usage de l'analyse*, Paris 1708, S. 682–683.

lesungen über die Differentialrechnung entnommen[1]), und ich teile hier unten diese Herleitung wörtlich mit.[2])



Si l'on prend l'arc Rr infiniment petit, & que du centre O on mene les deux secantes ORN, Orn à la tangente enN, & qu'on tire du centre O avec le rayon On l'arc nq, en nommant le rayon $Oe\,(r)$, la tangente $eN\,(x)$, Nn sera dx; la secante ON sera $=\sqrt{rr+xx}$, sa difference qN sera $\frac{xdx}{\sqrt{rr+xx}}$, & les triangles semblables OeN, Nqn, rectangles en e & en q, donneront $ON(\sqrt{rr+xx})$. $Oe(r) :: Nn(dx) \cdot qn = \frac{rdr}{\sqrt{rr+xx}}$; & les secteurs semblables ORr, Onq donneront $On(\sqrt{rr+xx}) \cdot Or(r) :: qn\left(\frac{rdx}{\sqrt{rr+xx}}\right) \cdot Rr\,(du) = \frac{rrdx}{rr+xx}$.

Vier Jahre später gab Johann Bernoulli die Formel für $d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ an mit der Bemerkung: „notum est ex calculo differentiali".[3])

Wann die Formeln für $d \operatorname{arc} \operatorname{cotg} x$, $d \operatorname{arc} \sec x$, $d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$, $d \operatorname{cotg} x$, $d \sec x$, $d \operatorname{cosec} x$ zum erstenmal ausdrücklich angegeben worden sind, habe ich nicht versucht zu ermitteln, da die Frage fast ohne Interesse ist. Wie schon am Anfange dieses Artikels erwähnt wurde, kommt die Formel für $d \sec x$ in einer 1722 erschienenen posthumen Schrift von Cotes vor, und beiläufig bemerke ich, daß Bougainville 1754 die Formel für $d \operatorname{arc} \sec x$ hergeleitet hat.[4]) Eine vollständige Zusammenstellung der Ausdrücke für die Differentiale der trigonometrischen Funktionen nebst Herleitung findet sich in Eulers Differentialrechnung.[5])

---

1) Siehe den Brief von Johann Bernoulli an Leibniz vom 8. April 1711; *Commercium philosophicum et mathematicum* 2, Lausanne 1745, S. 258

2) Schon vor dem Erscheinen der Arbeit Reyneaus hatte Chr. Wolff in einem Briefe an Leibniz vom 29. Januar 1707 die Formel $d \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{dx}{1+x^2}$ hergeleitet (siehe *Briefwechsel zwischen Leibniz und Christian Wolf*, herausg. von C. I. Gerhardt, Halle 1860, S. 72) und eine kürzere Herleitung, die wesentlich mit der Reyneauschen übereinstimmt, veröffentlichte er 1710 im 4. Bande der *Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften* (siehe Aufl. 3, Halle 1725, S. 1816).

3) Johann Bernoulli, *Angulorum arcuumque sectio indefinita, per formulam universalem expressa, sine serierum auxilio: et hinc deducta aequatione angularium prompta formatio;* Acta erud. 1712, S. 275—276.

4) De Bougainville, *Traité du calcul intégral* 1, Paris 1754, S. 25.

5) L. Euler, *Institutiones calculi differentialis,* Petropoli [Berlin] 1755, 1: § 195—198, 201—205; Ausgabe Pavia 1787, S. 134—136, 139—142.

Jakob Bernoulli und die Jacobischen Thetafunktionen.

Von G. Eneström in Stockholm.

In einem Brief an P. H. Fuss aus dem Jahre 1848[1]) gibt C. G. J. Jacobi an, daß in Eulers Abhandlung *Découverte d'une loi toute extraordinaire des nombres* zum erstenmal Reihen aufgetreten sind, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, und bemerkt dabei, daß diese Reihen für ihn ein besonderes Interesse haben, weil er darauf die Theorie der elliptischen Transzendenten gegründet habe. Indessen ist diese Angabe Jacobis nicht ganz genau, denn schon 60 Jahre früher waren Jakob Bernoulli und Leibniz auf Reihen gestoßen, deren Exponenten eine Reihe zweiter Ordnung bilden. Da diese Tatsache, soviel ich weiß, bisher nicht beachtet worden ist, erlaube ich mir, hier über die fraglichen Abhandlungen von Jakob Bernoulli und Leibniz Auskunft zu geben.

Im Jahre 1685 stellte Jakob Bernoulli im Journal des sçavans[2]) folgendes Problem aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung:

> *A* & *B* jouënt avec un dez, à condition que celui qui jette le premier as aura gagné. *A* jouë une fois, puis *B* une fois, après *A* jouë deux fois de suite, puis *B* deux fois, puis *A* 3 fois de suite, & *B* aussi 3 fois, &c.
>
> Ou bien, *A* jouë une fois, puis *B* deux fois de suite, puis *A* trois fois de suite, puis *B* quatre fois, &c. jusqu'à-ce que l'un d'eux gagne.
>
> On demande la raison de leur sort?

Es handelt sich also darum, für jeden von zwei Spielern, *A* und *B*, die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß er der erste sein wird, der mit

1) Siehe P. Stäckel und W. Ahrens, *Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. v. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers;* Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 291.

2) *Problème proposé par Mr. Bernoulli, mathématicien de la ville de Basle;* Journal des sçavans 1685, S. 314. Ich gebe den Wortlaut des Problems nach dem Abdruck in den *Opera* Jakob Bernoullis (I, Genevae 1744, S. 207) wieder.

einem Würfel 1 Auge wirft, unter zwei verschiedenen Voraussetzungen in betreff der Ordnungsfolge der Würfe, nämlich:

$$\text{I.}\quad \begin{matrix} A & B & A & B & A & B \dots \\ 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & 3 \dots \text{Würfe;} \end{matrix}$$

$$\text{II.}\quad \begin{matrix} A & B & A & B & A & B \dots \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \dots \text{Würfe.} \end{matrix}$$

Für einen Mathematiker des 20. Jahrhunderts erfordert die Lösung dieses Problems eigentlich keine Gedankenarbeit, denn wenn α $\left(\text{d. h. } \frac{1}{6}\right)$ und β $\left(\text{d. h. } \frac{5}{6}\right)$ bzw. die Wahrscheinlichkeiten des Eintreffens und des Nichteintreffens des fraglichen Wurfes sind, so sind die gesuchten Wahrscheinlichkeiten im Falle

$$\text{I. für } A\colon\ \alpha + \alpha\beta^2 + \alpha\beta^3 + \alpha\beta^6 + \alpha\beta^7 + \alpha\beta^8 + \alpha\beta^{12} + \alpha\beta^{13} + \alpha\beta^{14} + \alpha\beta^{15} + \cdots$$
$$\text{„ } B\colon\ \alpha\beta + \alpha\beta^4 + \alpha\beta^5 + \alpha\beta^9 + \alpha\beta^{10} + \alpha\beta^{11} + \alpha\beta^{16} + \alpha\beta^{17} + \alpha\beta^{18} + \cdots$$
$$\text{II. für } A\colon\ \alpha + \alpha\beta^3 + \alpha\beta^4 + \alpha\beta^5 + \alpha\beta^{10} + \alpha\beta^{11} + \alpha\beta^{12} + \alpha\beta^{13} + \alpha\beta^{14} + \cdots$$
$$\text{„ } B\colon\ \alpha\beta + \alpha\beta^2 + \alpha\beta^6 + \alpha\beta^7 + \alpha\beta^8 + \alpha\beta^9 + \alpha\beta^{15} + \alpha\beta^{16} + \alpha\beta^{17} + \cdots$$

und da offenbar $\alpha = 1 - \beta$, wird die Lösung des Problems im Falle

$$\text{I. für } A\colon\ 1 - \beta + \beta^2 - \beta^4 + \beta^6 - \beta^9 + \beta^{12} - \beta^{16} + \cdots$$
$$\text{„ } B\colon\ \beta - \beta^2 + \beta^4 - \beta^6 + \beta^9 - \beta^{12} + \beta^{16} - \cdots$$
$$\text{II. für } A\colon\ 1 - \beta + \beta^3 - \beta^6 + \beta^{10} - \beta^{15} + \cdots$$
$$\text{„ } B\colon\ \beta - \beta^3 + \beta^6 - \beta^{10} + \beta^{15} - \cdots$$

wo $\beta = \frac{5}{6}$.

Eigentlich braucht man nur die Wahrscheinlichkeit für A zu berechnen, denn wenn es sich um eine unendliche Zahl von Würfen handelt, ist in jedem Falle die Summe der zwei fraglichen Wahrscheinlichkeiten $= 1$, was auch sofort aus den obigen Lösungen hervorgeht.

Das von Jakob Bernoulli gestellte Problem scheint die Sachkundigen nur wenig interessiert zu haben, und da im Laufe von 5 Jahren keine Lösung veröffentlicht wurde, brachte der Fragesteller selbst eine solche, freilich ohne Herleitung, in den Acta eruditorum 1690.[1]) Die Lösung gebe ich hier unten nach dem Originaldruck wörtlich wieder[2]):

---

1) Am Ende (S. 223) der Abhandlung *Quaestiones nonnullae de usuris, cum solutione problematis de sorte alearum, propositi in Ephem. Gall. A. 1685, artic. 25;* Acta erud. 1690, S. 219—223. In den *Opera* Jacob Bernoullis ist (I, S. 427) das Wort „alearum" des Titels in „aleatorum" verändert.

2) Der Abdruck der *Opera* Jakob Bernoullis (I, S. 430—431) hat die auffällige Potenzenbezeichnung verbessert, so daß z. B. $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ statt $\boxed{2}\ \frac{5}{6}$ steht.

Sors Collusoris A ad sortem Collusoris B in priori casu se habet ut $1 + \boxed{2}\,\frac{5}{6} + \boxed{6}\,\frac{5}{6} + \boxed{12}\,\frac{5}{6} + \boxed{20}\,\frac{5}{6}$ &c. $- \frac{5}{6} - \boxed{4}\,\frac{5}{6} - \boxed{9}\,\frac{5}{6} - \boxed{16}\,\frac{5}{6}$ &c. in posteriori, ut, $1 + \boxed{3}\,\frac{5}{6} + \boxed{10}\,\frac{5}{6} + \boxed{21}\,\frac{5}{6} + \boxed{36}\,\frac{5}{6}$ &. $- \frac{5}{6} - \boxed{6}\,\frac{5}{6} - \boxed{15}\,\frac{5}{6} - \boxed{28}\,\frac{5}{6}$ &c. ad unitatis complementum. Harum serierũ termini repraesentant totidem potestates fractionis $\frac{5}{6}$, quarum indices crescunt differentiis servantibus inter se progressionem Arithmeticam, cujus communis excessus ibi est binarius, hic quaternarius.

Jakob Bernoulli hebt also ausdrücklich hervor, daß die Exponenten der Zahlenreihen eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, deren konstante Differenz im ersten Falle 2, im zweiten Falle 4 sei. Einen Versuch, die Zahlenreihen zu summieren, macht Bernoulli nicht.

Kurze Zeit nach der Veröffentlichung der Lösung Bernoullis brachten die Acta eruditorum eine zweite, die mit einer Herleitung des Resultates versehen war. Die Lösung rührte von Leibniz her[1]), und da der betreffende Aufsatz von Gerhardt in seiner Ausgabe von Leibnizens mathematischen Werken nicht wieder abgedruckt ist, gebe ich hier unten die Lösung wörtlich wieder:

Sit $5 : 6 = n$ erit $1 : 6 = 1 - n$.

In casu priore,

$1 \;\; n \;\; n^2 \;\; n^3 \;\; n^4 \;\; n^5 \;\; n^6 \;\; n^7 \;\; n^8 \;\; n^9 \;\; n^{10} \;\; n^{11}$ &c.

$A \;\; B \;\; A \;\; A \;\; B \;\; B \;\; A \;\; A \;\; A \;\; B \;\; B \;\; B$ &c.

Sors ipsius A,

$1 + n^2 + n^3 + n^6 + n^7 + n^8 + n^{12} + n^{13} + n^{14} + n^{15} +$ &c.; mult. per $1 - n$.

unde facta actu ipso multiplicatione, prodibit

$1 - n^1 + n^2 - n^4 + n^6 - n^9 + n^{12} - n^{16}$ &c.

At Sors ipsius B,

$n + n^4 + n^5 + n^9 + n^{10} + n^{11} + n^{16} + n^{17} + n^{18} + n^{19}$ &c.; mult. per $\overline{1 - n}$

unde facta actu ipso multiplicatione, prodibit

$n^1 - n^2 + n^4 - n^6 + n^9 - n^{12} + n^{16}$ &c.

In casu posteriore:

$1 \;\; n \;\; n^2 \;\; n^3 \;\; n^4 \;\; n^5 \;\; n^6 \;\; n^7 \;\; n^8 \;\; n^9 \;\; n^{10}$ &c.

$A \;\; B \;\; B \;\; A \;\; A \;\; A \;\; B \;\; B \;\; B \;\; B \;\; A$ &c.

Sors ipsius A,

$1 + n^3 + n^4 + n^5 + n^{10} + n^{11} + n^{12} + n^{13} + n^{14}$ &c. mult. per $1 - n$

seu facta multiplicatione,

$1 - n^1 + n^3 - n^6 + n^{10} - n^{15}$ &c.

At Sors ipsius B

$n + n^2 + n^6 + n^7 + n^8 + n^9 + n^{15} + n^{16} + n^{17} + n^{18} + n^{19} + n^{20}$ &c. mult. per $1 - n$

seu facta multiplicatione,

$n^1 - n^3 + n^6 - n^{10} + n^{15} - n^{21}$ &c.

1) Am Anfang (S. 359) der Abhandlung *Ad ea, quae vir clarissimus J. B. mense majo nupero in his Actis publicavit, responsio;* Acta erud. 1690, S. 358—360.

Et in utroque casu $A+B=1$, posito unitatem esse totum jus in praemium ludi. Eademque methodus succedit in casibus aliis similibus, etiamsi plures essent lusores & tesserae, facilisque hinc solutio in numeris quantumlibet exactis habetur. Perplacet autem problema, quod cum simplex admodum videatur, ad series tamen non satis adhuc examinatas ducit.

Wie man sieht, unterscheidet sich das Verfahren Leibnizens kaum von dem jetzt geläufigen, und er hebt ausdrücklich hervor, daß die Frage von besonderem Interesse sei, weil sie auf noch nicht näher untersuchte Reihen führe.

Jakob Bernoulli selbst ist später noch einmal auf das Problem zurückgekommen, nämlich in seiner *Ars conjectandi*, wo er die Frage ausführlich behandelte und bemerkte, daß sein Verfahren für eine beliebige Ordnungsfolge der Würfe gültig ist.[1] Indessen hat die Behandlung für den Zweck dieses Artikels kein Interesse; nur im Vorübergehen erwähne ich, daß Jakob Bernoulli als Näherungswert der Wahrscheinlichkeit für A im ersten Falle $\frac{59679}{100000}$, im zweiten Falle $\frac{52392}{100000}$ angibt. Die beiden Werte hat er durch direkte Summation ermittelt.

Meines Wissens hat die von Jakob Bernoulli gestellte Frage keine weiteren Untersuchungen veranlaßt[2]), und der Grund dazu ist leicht ersichtlich. Das Problem selbst hat ja eigentlich kein besonderes Interesse, und die Summierung der Reihen konnte mit den Hilfsmitteln des 18. Jahrhunderts gar nicht erledigt werden. Vom mathematisch-historischen Gesichtspunkte aus liegt die Sache freilich etwas anders, denn wir haben hier einen kleinen Beitrag zur Vorgeschichte der Jacobischen Thetafunktionen.[3]) Die zwei Reihen, die im ersten Falle des Problems vorkommen, haben, wenn $q=\beta$ gesetzt wird, bzw. die Summe $\frac{1}{2}\beta^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0)$ und $\frac{1}{2}(\vartheta_3(0)-1)$, so daß in diesem Falle die gesuchten Wahrscheinlichkeiten sind: für A

$$\frac{1}{2}\left(1+\beta^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0)-\vartheta_3(0)\right)$$

und für B

$$\frac{1}{2}\left(1-\beta^{-\frac{1}{4}}\vartheta_2(0)+\vartheta_3(0)\right).$$

1) Jakob Bernoulli, *Ars conjectandi*, Basileae 1713, S. 51—56.

2) Montmort hat in seinem *Essay d'analyse* die Frage Jakob Bernoullis abgedruckt und einige Bemerkungen über die Lösung des allgemeinen Problems hinzugefügt; siehe *Essay d'analyse sur les jeux de hazard*, Seconde édition, Paris 1713, S. XXXVI, 217—218.

3) Um die Mitte des 18. Jahrhunderts hatten die Potenzreihen, deren Exponenten eine arithmetische Reihe zweiter Ordnung bilden, auch die Aufmerksamkeit Daniel Bernoullis geweckt. Am 14. April 1742 schrieb dieser an Euler (siehe P. H. Fuss, *Correspondance mathématique* 2, St. Pétersbourg 1843, S. 493): „Ich möchte wissen, ob sich Ew. methodi nicht auch erstrecken auf die series, in welchen die Exponenten nicht progressione arithmetica gehen, als z. Ex., si a est numerus fractus, invenire summam seriei $a+a^4+a^9+a^{16}+$ etc. Dergleichen problemata würden ein ganz neues Licht in mathematicis geben.“ Leider ist die Antwort Eulers verloren.

Setzt man im zweiten Falle $\beta = q^2$, wird die Reihe für A:

$$1 - q^{1\cdot 2} + q^{2\cdot 3} - q^{3\cdot 4} + q^{4\cdot 5} - q^{5\cdot 6} + \cdots + (-1)^n q^{n(n+1)} + \cdots,$$

eine Reihe, deren allgemeines Glied sich also nur durch den Faktor $(-1)^n$ von dem allgemeinen Glied der Reihe für $\frac{1}{2} q^{-\frac{1}{4}} \vartheta_2(0)$ unterscheidet. Anderseits kann diese Reihe auf folgende Weise ausgedrückt werden:

$$1 - q^{-\frac{1}{4}} \left[q^{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - q^{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + q^{\left(\frac{7}{2}\right)^2} - q^{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \cdots + (-1)^{n-1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} + \cdots \right],$$

und die Reihe hat also eine große Ähnlichkeit mit der Reihe für $\vartheta_0(0)$, sowie mit der Hermiteschen Funktion $\theta_{\mu,1}(0)$. Setzt man

$$t(h, \mu) = \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n h^{\frac{1}{4}(2n+\mu)^2},$$

so ist einerseits

$$1 - q^{-\frac{1}{4}} \left[q^{\left(\frac{3}{2}\right)^2} - q^{\left(\frac{5}{2}\right)^2} + q^{\left(\frac{7}{2}\right)^2} - q^{\left(\frac{9}{2}\right)^2} + \cdots \right] = 1 - q^{-\frac{1}{4}} t(q, 1),$$

anderseits, wenn $q = e^{\omega \pi i}$,

$$\theta_{\mu,1}(0) = t(q, \mu) + t(q, -\mu) + q^{\frac{1}{4}\mu^2}.$$

Auffälligerweise scheint die zweite Reihe Jakob Bernoullis dennoch weder durch Thetafunktionen noch durch andere bisher näher untersuchte Funktionen summiert werden zu können.

Aus Jacobis Vorlesungen über elliptische Funktionen 1835—1836.

Von S. Gundelfinger in Darmstadt.

Herr L. Schlesinger hat in seinem Aufsatz *Über den Begriff der analytischen Funktion bei Jacobi* usw. (Biblioth. Mathem. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 88—96) mehrmals auf meine Skizze über Jacobi (Frankf. Zeitung Nr. 203, 23. Juli 1904) als Beleg hingewiesen. Kürzlich hat auch Herr A. Krazer in seiner Rektoratsrede *Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale* (Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung **18**, 1909, S. 61, 68) auf diese Skizze Bezug genommen. Aus diesem Grunde ist es vielleicht angebracht, die angezogenen Vorlesungen aus Jacobis Kolleg über elliptische Funktionen vom Winter 1835/36 abzudrucken.

Das hier benützte Manuskript sowie ein anderes stammt nach einer Mitteilung der Fockschen Buchhandlung in Leipzig aus dem Nachlasse des verstorbenen Professors Puchta und ist, völlig undatiert, als Vorlesungen Jacobis bezeichnet. Die wesentlich neuen darin enthaltenen Gesichtspunkte (besonders die Ableitung der doppelten Periode, vermöge der Theorie der Verzweigungspunkte) ließen anfangs vermuten, daß es sich nicht um authentische, sondern erweiterte Vorlesungen Jacobis handle, zumal Weierstrass nichts davon in die Gesamtausgabe von Jacobis Werken aufgenommen hat. Durch die Güte des Herrn Geheimrat Auwers wurde ich instand gesetzt, festzustellen, daß beide Manuskripte authentisch sind, und zwar das eine Manuskript eine wörtliche Abschrift der Borchardtschen Ausarbeitung von Jacobis Kolleg 1839/40, von der auch Weierstrass einen Teil in die Gesamtausgabe aufgenommen hat. Ein angebundenes kleineres Manuskript stellte sich als eine wörtliche Abschrift des Schlusses („Über das Abelsche Theorem“) jener [Rosenhainschen] Ausarbeitung vom Winter 1835/36 heraus. Das zweite Manuskript stimmt offenbar dem ganzen Inhalte nach und teilweise auch in den Redewendungen mit

eben dieser Ausarbeitung Rosenhains überein, ist jedoch gekürzt und stellenweise besser stilisiert.

36. Vorlesung aus Jacobis Kolleg 1835/36.

. . . .

Setzen wir Sin am $u = y$ oder $u = \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2)}}$, so müssen wir sagen: Für denselben Werth von y kann dieses durch u bezeichnete Integral alle Werthe annehmen, die in der Form $u + 4mK + 2m'K'\sqrt{-1}$ enthalten sind, wo m und m' jede beliebige ganze Zahl sein können. Man kann dieses mit demselben Rechte behaupten, wie man sagt, daß, wenn man $u = \int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}$ setzt, dieses Integral alle Werthe annehmen kann, die in der Formel $u + 2m\pi$ enthalten sind, oder wie man sagt, daß, wenn man $u = \int_1^y \frac{\partial y}{y}$ setzt, dieses Integral alle Werthe annehmen kann, die in der Form $u + 2m\pi\sqrt{-1}$ enthalten sind. Wie man diese Vieldeutigkeit der Integrale zu fassen habe, wird in den Principien der Integralrechnung nicht auseinandergesetzt, und es ist hierzu eine Ergänzung der Elemente nöthig. Denn es wird Bedürfniß bleiben, daß man auch durch die Definitionen, welche die Integralrechnung giebt, die Vieldeutigkeit der Ausdrücke sicher erkenne. Und daß man sich von dieser Vieldeutigkeit, selbst bei den Kreisbogen, keine genaue Vorstellung gemacht hat, ist die Ursache gewesen, weshalb die Grundlage der elliptischen Transcendenten so lange verborgen geblieben ist.

Von der Vieldeutigkeit der Integrale, die unter dem Integralzeichen einen vieldeutigen Ausdruck haben.

Eine Quelle der Vieldeutigkeit, die aber von der hier stattfindenden verschieden zu sein scheint, ist es, wenn die zu integrirende Function für irgend einen reellen Werth oder auch einen imaginären der Variabeln unendlich werden kann. Diese Ursache hat Cauchy in einer Abhandlung: *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires,* Paris 1825, sehr gründlich erörtert. Aber seine Principien sind nicht anwendbar auf den Fall, wo die Vieldeutigkeit eines unter dem Integralzeichen sich befindenden Ausdruckes die Vieldeutigkeit der Werthe des Integrales herbeiführt.[1]) Man merke hierbei, daß ganz entgegengesetzt,

1) Herr L. Schlesinger, der für mich gütigst eine Korrektur samt Revision gelesen und an allen dunkeln Stellen des mir gehörigen Manuskriptes noch einmal eine genaue Vergleichung mit der Ausarbeitung Rosenhains vorgenommen hat, be-

wie man sich solche Integrale zu denken pflegt, man in solchen Integralen dem vieldeutigen Ausdruck unter dem Integralzeichen jeden seiner Werthe nach Belieben beilegen kann, wenn man nur die Bedingung festhält, welche die Definition eines Integrales nothwendig erfordert, daß man von jedem Werthe, den die zu integrirende Function für einen Werth der Variabeln annimmt, zu einem andern, den sie für einen folgenden Werth der Variabeln erhält, ohne irgend einen Sprung übergeht, eine Bedingung, durch welche die angedeutete Willkührlichkeit modificirt wird. Hat man z. B. das Integral $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, und man hat, $x = \frac{4}{5}$ gesetzt, $\sqrt{(1-x^2)} = \frac{3}{5}$, so darf man einen nächstfolgenden Werth, den $\sqrt{(1-x^2)}$ für $x = \frac{4}{5} \pm \delta$ annimmt, wo δ eine sehr kleine Größe bedeutet, nicht nahe an $-\frac{3}{5}$ liegend annehmen. Denn sonst müßte man von $+\frac{3}{5}$ bis $-\frac{3}{5}$ einen Sprung machen, der das Wesen des Integrales aufheben würde. Durch diese Beschränkung wird die Willkührlichkeit zum Theile compensirt, und es kann, wenn man nur für einen ersten Werth das Zeichen gewählt hat, nur noch eine Willkühr eintreten für einen solchen Werth der Variabeln, für welchen zwei der Werthe, die die vieldeutige Function annehmen kann, einander gleich werden, und hierin scheint die allgemeinste Bestimmung über die Vieldeutigkeit der Werthe der Integrale zu liegen, welche irgend eine rationale oder irrationale Größe unter dem Integralzeichen enthalten. Wenn nämlich der Ausdruck vieldeutig ist, so daß er für einen Werth der Variabeln mehrere Werthe erhalten kann, so sind diese Werthe um endliche Größen von einander entfernt. Hat man also einen Werth angenommen, und soll für einen unendlich nahe gelegenen Werth der Variabeln der Werth der Function bestimmt werden, so kann man in keinen der Werthe des anderen Systems hineingerathen. Nur wenn zwei Werthe einander gleich werden, so daß von diesem Werthe, welcher zweien Systemen gemeinsam ist, ein doppeltes Fortschreiten zu den Werthen des einen oder des andern Systemes stattfinden kann, tritt eine Willkührlichkeit ein. Hier kann man nun nach der Annahme, daß man zwischen den Werthen der vieldeutigen Function ganz beliebig wählen kann, wenn man nur das Gesetz der Continuität nicht verletzt, auch ganz beliebig von solch einem gemeinschaftlichen Werthe aus zu irgend einem Werthe des einen oder des anderen Systemes fortschreiten.

---

merkt zu diesem Satze: „Jacobi sieht hier — in Riemanns Weise ausgedrückt —, daß eine Fläche mehrfach zusammenhängend sein kann entweder dadurch, daß sie Löcher hat, oder dadurch, daß sie mehrblättrig ist." Übrigens hat Jacobi in der Borchardtschen Ausarbeitung die Periodizität des Integrals $\int\sqrt{1-x^2}dx$ dargelegt, um zu zeigen, daß nicht das Unendlichwerden des Integrandus innerhalb der Integrationsgrenzen die Vieldeutigkeit des Integrals bewirke.

Angenommen, y sei eine solche vieldeutige Function von x und das Integral von 0 bis x zu nehmen, für $x = a$ aber würden zwei Werthe der vieldeutigen Function einander gleich! Man zerlege nun

$$\int_0^x y\partial x = \int_0^a y\partial x + \int_a^x y\partial x.$$

Das erste Integral werde nun auf die Art genommen, daß es alle Werthe von 0 bis a umfaßt, und sind von diesen die Anfangswerthe bestimmt, so sind es auch alle folgenden. Wenn man aber nun bei a angekommen ist, so hat man einen doppelten Weg. Denn da hier zwei Werthe zusammenstoßen, so kann man von $x = a$ ab einmal die Werthe gleich y setzen, dann aber auch y_1 statt y nehmen, ohne daß die Bedingung der Continuität verletzt wird Man erhält so zwei verschiedene Werthe für das Integral, entweder

$$\int_0^x y\partial x = \int_0^a y\partial x + \int_a^x y\partial x,$$

oder

$$\int_0^x y\partial x = \int_0^a y\partial x + \int_a^x y_1\partial x.$$

Ist z. B

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \text{Arc Sin } x,$$

so können wir wegen der Werthe $+\sqrt{(1-x^2)}$ und $-\sqrt{(1-x^2)}$ des Nenners sagen:

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} + \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

und

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}.$$

Denn wenn wir von 0 bis 1 gehen und dann zurück von 1 bis x, so haben wir den ganzen Werth. Wenn wir aber bei $x = 1$ angekommen sind, so haben wir einen continuirlichen Uebergang zu $+\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ und zu $-\frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, da für $x = 1$ beide Werthe in einander übergehen. Man wird also für Arc Sin x auch diesen Werth finden

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} + \int_x^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = 2\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

wo wir die Gränzen von $\int_1^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ umgekehrt haben, oder wir werden den Werth

$$\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \pi - \text{Arc Sin}\, x$$

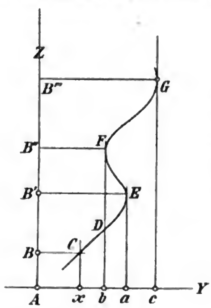
erhalten. Wenn wir nun zwei Werthe haben, für welche y gleich y_1 wird, wie $x = +1$ und $x = -1$, so können wir beliebig oft von einer Gränze zur anderen hin- und zurückgehen. Wäre die Function unter dem Integralzeichen nicht vieldeutig, so würden sich die beiden Integrale von -1 bis $+1$ und von $+1$ bis -1 aufheben, ist sie aber vieldeutig, so wird dieses nicht geschehen, wenn man, bei einer Gränze angelangt, immer zu dem anderen Systeme von Werthen übergeht. Wenn man z. B. in dem Systeme y bis an die Gränze wo y gleich y_1 gekommen ist, so kann man nun in dem Systeme y_1 fortgehen.

Bedeutet allgemein z die Ordinate einer Curve, welche mehrere Zweige hat, die aber continuirlich fortläuft, so kann man zuerst von 0 bis x integriren, und man erhält den Raum AC, dann aber auch von 0 bis a, wo man den Raum $AaEB'$ erhält. Von E kann man nun einmal nach C, aber ebensogut auch nach F übergehen u. s. w. fort. Man wird überhaupt soviele Werthe bekommen, als man an Punkte gelangt, von denen aus man nach verschiedenen Richtungen fortgehen kann.[1])

37. Vorlesung.

Damit diese Betrachtungen nicht falsch verstanden werden, muß man noch folgende wichtige Bemerkung beifügen. Wenn unter dem Integralzeichen ein vieldeutiger Ausdruck steht, so hat man im Allgemeinen so-

1) Im Texte findet sich folgende Figur zur Erläuterung:



Man vgl. zur Bedeutung von $a, b \ldots$ auch S. 217 Z 21—26.

viele verschiedene Transcendenten, als der Ausdruck Deutungen zuläßt, und auch soviele verschiedene Relationen zwischen dem Integral und den Intervallen. Aber es kann der Fall eintreten, daß der Differentialgleichung $\partial u = z \partial y$, wo z eine mehrdeutige Function von y ist, eine Integralgleichung entspricht, in der y durch u auf eine unzweideutige Weise gegeben ist, und nur auf diese Fälle beziehen sich unsere zuletzt gemachten Bemerkungen. Man habe z. B. die Gleichung

$$y = u - \frac{u^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{u^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \cdots,$$

durch welche y für jeden reellen und imaginären Werth von u einen vollkommen bestimmten unzweideutigen Werth hat, in welcher y durch u vollkommen rational ausgedrückt ist. Eine so bestimmte Relation entspricht der Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}} = \partial u,$$

wo die Quadratwurzel nun die Bestimmung hat, daß, wenn $u = 0$ ist man sie $= +1$ setzen muß, wie erhellt, wenn man die gegebene Relation differentiirt. Es wird dann

$$\frac{\partial y}{\partial u} = 1 - \frac{u^2}{1 \cdot 2} + \frac{u^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \cdots$$

Will man von der Betrachtung dieser Differentialgleichung aus, die zwischen y und u stattfindenden Relationen für den ganzen Umfang von Werthen ergründen, welche die Größen annehmen können, so ist dieses nur möglich, wenn man jene Annahme macht, daß man während der Integration die Quadratwurzel nach Belieben annehmen kann, jedoch so, daß die Continuität nicht verletzt wird. So daß also, wenn man $u = \int\limits_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}}$ setzt, wo die Integration von $u = 0$ anfängt, und wo man festsetzte, für $u = 0$ solle $\sqrt{(1-y^2)}$ einen der Werthe ± 1 haben, auch für den nächstfolgenden und vorhergehenden Werth keine Zweideutigkeit stattfindet, bis man für den Werth $y = 1$ oder $y = -1$ zu einem solchen Werthe von $\sqrt{(1-y^2)}$ gelangt, für welchen seine beiden Werthe einander gleich werden, und von diesen Werthen ab kann man das Zeichen willkührlich wählen.

Dieses wollen wir nun für unseren Fall verallgemeinern. Wenn wir

$$u = \int \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2)}}$$

setzen, wo das Integral von 0 an bis zu irgend einem Werthe y genommen werden soll, und wo wir blos die Bedingung beifügen, daß die Quadrat-

wurzel für $u = 0$ den Werth $+ 1$ haben soll, und wenn wir wissen, daß sich y durch u auf eine allgemein gültige, unzweideutige Weise ausdrücken läßt, wie dieses in unserer Formel der Fall war, indem der Ausdruck, in welchem wir y durch u darstellten, für jeden reellen oder imaginären Werth von u convergirte und von allgemeinen Quadratwurzelgrößen frei war, so kann das Integral, durch welches u ausgedrückt ist, so genommen werden, daß zwar in der Nähe von $y = 0$ die Quadratwurzel ganz bestimmt ist, weil zu den negativen Werthen man nur durch einen Sprung gelangen könnte; so wie man aber zu einem Werthe von y gelangt, für den die Quadratwurzel verschwindet, so kann man sie von da ab in einem beliebigen Sinne nehmen, welchen Sinn man aber beibehalten muß, bis die Quadratwurzel etwa abermals verschwindet, wo man dann den Sinn der Quadratwurzel beliebig annehmen kann. Man kann sich so beliebig oft von einem Werthe, für den die Quadratwurzel verschwindet, zu einem andern, für welchen sie auch verschwindet, fortbewegen, wenn man nur zuletzt bei dem Werthe von y, bis zu dem die Integration gehen soll, stehen bleibt.

Hieraus folgt, daß man den Werth, welchen das Integral annimmt, wenn man es von einem Werthe von y, für den die Quadratwurzel verschwindet, bis zu einem anderen erstreckt, für den sie wieder verschwindet, eine beliebige gerade Anzahl Male genommen zu einem Werthe von u hinzufügen kann. Man denke sich, daß man während der Integration zu einem dieser Werthe kommt, den wir a nennen wollen, und welcher für unsern Fall ± 1 und $\pm \frac{1}{k}$ ist, so kann man von diesen Werthen an das Quadratwurzelzeichen beliebig nehmen. In demselben Sinne integrirt man bis zu einem Werthe b, für den die Quadratwurzel auch verschwindet, und dann wieder zurück nach a. Indem man aber von b an die Quadratwurzel im entgegengesetzten Sinne nimmt, ist man wieder nach a zurückgekehrt. Aber zu dem Werthe des Integrales ist, wenn man die Quadratwurzelgröße mit $\varDelta$ bezeichnet, ein Werth hinzugekommen

$$\int_a^b \frac{\partial y}{\varDelta} - \int_b^a \frac{\partial y}{\varDelta},$$

wo $\varDelta$ in diesen Integralen mit demselben Vorzeichen genommen wird, und das (—) Zeichen steht deshalb, weil wir annehmen, in dem Integrale von b bis a werde $\varDelta$ in dem entgegengesetzten Sinne genommen als in dem von a bis b genommenen. Der Werth dieses Ausdruckes ist aber $= 2\int_a^b \frac{\partial y}{\varDelta}$, und da man dieß beliebig oft wiederholen kann, so kann man durch Integrationen, nach denen man immer zu denselben Werthen $y = a$ zurück-

kehrt, zu dem Integrale einen Werth $=2m\int_a^b \frac{\partial y}{\Delta}$ hinzufügen, wo m eine beliebige ganze Zahl bedeutet, die positiv oder negativ sein kann, da der Sinn, in dem man Δ nimmt, willkührlich ist Wenn man also von 0 bis y zu integriren hat, so integrirt man zunächst von 0 bis a, dann von a bis b, dann von b bis a, wiederum von a bis b und dieses m Male hin und zurück und zuletzt noch zurück von a bis y. Dann wird der Werth, den man findet, derselbe sein, wie der Werth des Integrales, wenn man direct alle Werthe von 0 bis y genommen hätte, ohne die Integration bis a auszudehnen, $+2m\int_a^b \frac{\partial y}{\Delta}$. Man integrirt zuerst von 0 bis a, zuletzt aber zurück von a bis y, und dieses ist dasselbe, als hätten wir nur alle Werthe von 0 bis y genommen. Aber auch die letzte Integration von a bis y kann man in einem Sinne nehmen, welcher dem, in dem man von 0 bis a integrirt hat, entgegengesetzt ist, und dann erhält man nicht denselben Werth, als wenn man nur die zwischen 0 und y liegenden Werthe genommen hätte, sondern man bekommt

$$\int_0^a \frac{\partial y}{\Delta} - \int_a^y \frac{\partial y}{\Delta},$$

wo Δ wieder mit demselben Vorzeichen genommen ist. Dieses ist aber so viel als

$$2\int_0^a \frac{\partial y}{\Delta} - \int_0^y \frac{\partial y}{\Delta},$$

wenn man nämlich mit $\int_0^y \frac{\partial y}{\Delta}$ die directe Integration über die Werthe bezeichnet, die zwischen 0 und y liegen. Die verschiedenen Werthe, die wir finden, werden also sein, entweder

$$2m\int_a^b \frac{\partial y}{\Delta} + \int_0^y \frac{\partial y}{\Delta},$$

oder

$$2m\int_a^b \frac{\partial y}{\Delta} + 2\int_0^a \frac{\partial y}{\Delta} - \int_0^y \frac{\partial y}{\Delta}.$$

Dasselbe kann man nun aber für jeden Werth von a und b, wenn es mehrere solche Werthe giebt, wie für unseren Fall vier, wieder thun, und

man erhält daher, wenn man das Intervall zwischen zwei Werthen, für welche Δ verschwindet, ein ganzes Intervall nennt, folgende Regel:

Man kann zu einem Werthe eines solchen unbestimmten Integrales noch den Werth, welchen es für ein ganzes Intervall erhält, eine beliebige gerade Anzahl Male hinzufügen, und zwar dieses für jedes ganze Intervall, welches zu der Function Δ gehört, d. h. für dessen Gränzen die Function Δ verschwindet. Oder man kann auch das unbestimmte Integral von dem doppelten Werthe desselben, welchen es von 0 bis zu einer Gränze des ganzen Intervalls genommen annimmt, abziehen.

Für den Fall, wo Δ lauter gerade Potenzen von y enthält, ist der doppelte Werth des Integrales von 0 bis zu einer Gränze eines ganzen Intervalles genommen, gleich dem für das ganze Intervall genommenen Werthe. Dann kann man sagen, wenn man der Kürze wegen ein Integral für ein ganzes Intervall auch ein ganzes Integral nennt, daß man zu einem Werthe des Integrals entweder ein gerades Vielfaches eines ganzen Integrales addiren, oder einen Werth des Integrales von einem eine ungerade Anzahl Male genommenen ganzen Integrale abziehen kann. Für unseren Fall haben wir nun eigentlich vier ganze Integrale, nämlich:

1. von -1 bis $+1$,
2. von 1 bis $\frac{1}{k}$,
3. von $\frac{1}{k}$ durch $\pm\infty$ bis $-\frac{1}{k}$,
4. von $-\frac{1}{k}$ bis -1.

Wenn man nämlich für das dritte Intervall zur Variabeln $\frac{1}{y}$ nimmt, so zerfällt dieses in zwei von $\frac{1}{y}=k$ bis 0 und von $\frac{1}{y}=0$ bis $-k$. Es könnte scheinen, als wenn man hier die Vielfachen von vier verschiedenen Größen zu u hinzufügen könnte, weil man vier ganze Integrale hat, und doch haben wir nur zwei solche Integrale gefunden, nämlich K und $K'\sqrt{-1}$. — Dies kommt daher, daß die vier ganzen Integrale nicht alle von einander verschieden sind. Von diesen vier Integralen sind nämlich zwei reell und zwei imaginär. Die beiden reellen sind

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial y}{\Delta} \quad \text{und} \quad \int_{+\frac{1}{k}}^{-\frac{1}{k}}\frac{\partial y}{\Delta},$$

für welches letztere man sich y durch $\pm\infty$ gehend denken muß. Für das erste Integral bleiben während der Integration alle Factoren unter dem Quadratwurzelzeichen positiv; in dem Intervall für das zweite Integral

werden während der Integration alle Factoren negativ, und deshalb die Größe unter dem Quadratwurzelzeichen wieder positiv. Beide reelle Integrale sind aber einander gleich; denn setzt man $y = \frac{1}{kx}$, so verwandelt sich das Integral in

$$\int \frac{-\partial x}{kx^2 \sqrt{\left(1-\frac{1}{k^2x^2}\right)}\sqrt{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-k^2x^2)}},$$

welches wieder die Form des vorgelegten Integrales ist, nur mit dem Unterschiede, daß, wenn in dem letzten die Gränzen von -1 bis $+1$ genommen werden, sie im ersten von $-\frac{1}{k}$ bis $\frac{1}{k}$ zu nehmen sind, und zwar so, daß y von einer Gränze zur andern, wie dort durch 0, so hier durch $\pm\infty$ geht. Ebenso wie die beiden reellen werden nun auch die beiden imaginären Integrale einander gleich, und so erhalten wir nur zwei ganze Integrale, die man zu dem Werthe von u hinzufügen kann Von diesen zwei ganzen Integralen ist hier das eine reell, das andere gleich einer reellen Größe multiplizirt in $\sqrt{-1}$, das reelle $= 2K$, das imaginäre $= \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\partial y}{\Delta}$. Um dieses auf ein anderes zu reduciren mit den Gränzen 0 und 1, setze man

$$y^2 = \operatorname{Sin}^2\varphi + \frac{1}{k^2}\cos^2\varphi$$

und wenn man nun φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ nimmt, so geht dieser Ausdruck von $\frac{1}{k}$ bis 1. (Allgemein bewegt sich der Ausdruck $m^2\cos^2\varphi + n^2\operatorname{Sin}^2\varphi$, wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, continuirlich von m^2 bis n^2.) Aus unserer obigen Substitution erhalten wir durch Differentiation

$$y\partial y = \operatorname{Sin}\varphi\cos\varphi\left(1-\frac{1}{k^2}\right)\partial\varphi,$$

ferner

$$1 - y^2 = \cos^2\varphi\left(1-\frac{1}{k^2}\right), \qquad 1-k^2y^2 = k'^2\operatorname{Sin}^2\varphi,$$

oder

$$y = \frac{1}{k}\sqrt{(1-k'^2\operatorname{Sin}^2\varphi)}, \qquad y\partial y = -\frac{k'^2}{k^2}\operatorname{Sin}\varphi\cos\varphi\,\partial\varphi,$$

$$\sqrt{(y^2-1)} = \frac{k'}{k}\cos\varphi, \qquad \sqrt{(1-k^2y^2)} = k'\operatorname{Sin}\varphi.$$

Wenn wir nun die zweite Gleichung durch das Product der drei übrigen dividiren, so finden wir

$$\frac{-\partial\varphi}{\sqrt{(1-k'^2\operatorname{Sin}^2\varphi)}} = \frac{\partial y}{\sqrt{(y^2-1)}\sqrt{(1-k^2y^2)}},$$

und wenn φ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ genommen wird, so wird y genommen von $\frac{1}{k}$ bis 1, und wenn wir das (—) Zeichen weglassen, wird das eine Integral genommen von 0 bis $\frac{\pi}{2}$, das andere von 1 bis $\frac{1}{k}$. Also:

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-k^2y^2)}} = K'\sqrt{-1},$$

weil wir jetzt $\sqrt{(1-y^2)}$ statt $\sqrt{(y^2-1)}$ geschrieben haben, so daß das zweite ganze Integral $= K'\sqrt{-1}$ ist. Wir erhalten so dasselbe Resultat, zu dem wir durch andere Betrachtungen gekommen sind, daß nämlich der allgemeine Werth des Integrales

$$u + 4mK + 2m'K'\sqrt{-1},$$

oder

$$(4m+2)K + 2m'K'\sqrt{-1} - u$$

sein wird.

38. Vorlesung.

Von den zwei ganzen Integralen ist nun wohl das eine reell. Wenn aber auch k imaginär wäre, so würden die beiden ganzen Integrale imaginär sein. Diese Vorstellung, durch welche hier die Vieldeutigkeit erklärt wird, steht den sonst allgemeinen Erklärungen entgegen, weil dieselben fordern, daß das Quadratwurzelzeichen ein ganz bestimmtes sei. Aber wenn man unsere Erklärung erst kennt, so wird man glauben, daß man unsere Erklärung schon immer gehabt hätte. Wäre dieß aber der Fall, so hätte man die doppelte Periode schon früher gefunden, und wäre früher schon auf ein Paradoxon gerathen, welches zu den seltensten der Analysis gehört.

Abel hat durch Aufstellung eines sehr umfassenden Theoremes den Versuch möglich gemacht, die Methoden, welche man bei den elliptischen Functionen anwendet, auf die schwierigere Classe von Functionen auszudehnen, bei denen der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen auf eine höhere Ordnung als die vierte steigt. Wir wollen z. B.

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{[(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)(y-a_5)(y-a_6)]}}$$

betrachten, wo $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$ sein möge. Wir haben hier 6 ganze Intervalle, für deren Gränzen die Quadratwurzelgröße verschwindet. In drei Intervallen wird die Quadratwurzelgröße imaginär, in dreien reell.

Imaginär wird sie sein, wenn y zwischen a_1 und a_2, a_3 und a_4, a_5 und a_6 liegt, so daß man, um unter dem Wurzelzeichen einen positiven Ausdruck zu erhalten, noch ein $(-)$ Zeichen hinzufügen muß; reell wird sie, wenn y zwischen a_2 und a_3, a_4 und a_5 und zwischen a_6 und $+\infty$ und $-\infty$ bis a_1 liegt, welche zwei letzteren wir als ein ganzes Intervall betrachten. Nennen wir wieder Δ den Quadratwurzelausdruck, so hat Jacobi den merkwürdigen Satz[1]) bewiesen, daß

$$\int_{a_1}^{a_2}\frac{\partial y}{\Delta}-\int_{a_3}^{a_4}\frac{\partial y}{\Delta}+\int_{a_5}^{a_6}\frac{\partial y}{\Delta}=0$$

$$\int_{a_2}^{a_3}\frac{\partial y}{\Delta}-\int_{a_4}^{a_5}\frac{\partial y}{\Delta}+\int_{a_6}^{a_1}\frac{\partial y}{\Delta}=0$$

ist, wo man die Wurzelgröße in allen drei Ausdrücken mit demselben Zeichen zu nehmen hat.[1]) Dieser Satz läßt sich auch auf den Fall ausdehnen, wenn unter der Quadratwurzel ein Product aus $2n$ reellen, linearen Factoren steht. Wenn man hier auch die reellen ganzen Integrale mit abwechselnden Zeichen addirt, so ist die Summe Null, und ebenso bei den imaginären. Wir sehen hieraus für den Fall von 6 Factoren, daß sich zwei ganze Integrale immer auf eines reduziren, ebenso, wie wir im Falle von vier Faktoren bewiesen, daß

$$\int_{-1}^{1}\frac{\partial y}{\Delta}=\int_{\frac{1}{k}}^{-\frac{1}{k}}\frac{\partial y}{\Delta}$$

ist. Es reduzirt sich also die Anzahl der ganzen Integrale immer auf zwei weniger, als die Anzahl der linearen Factoren beträgt.

Wir wollen die zwei reellen doppelten ganzen Integrale a und b nennen und die imaginären doppelten $a'\sqrt{-1}$ und $b'\sqrt{-1}$; alsdann hat nach unseren Betrachtungen der allgemeine Werth des Integrales die Form

$$u+ma+nb+m'a'\sqrt{-1}+n'b'\sqrt{-1},$$

wo m, n, m', n' beliebige ganze Zahlen sind. Statt u schreibe man der Allgemeinheit wegen $v+v'\sqrt{-1}$, weil es ja auch imaginär sein könnte. Nun kann man immer die Zahlen m, n so bestimmen, daß $v+ma+nb$ von irgend einer gegebenen Größe um weniger abweicht, als eine noch

1) Man vgl. die Entwickelungen Jacobis im Journ. für Mathem. 13, 1835, S. 55—78, §§ 4 und 6 und die Preisschrift Rosenhains (Ostwalds Klassiker 65, S. 81—82).

so kleine gegebene Größe beträgt. Oder: man kann also die ganzen Zahlen so bestimmen, daß der ganze Ausdruck einem beliebigen andern $w + w'\sqrt{-1}$ unendlich nahe kommt, so daß ein solches Abelsches Integral solche und so viele Unbestimmtheiten zuläßt, daß es für jeden Werth des Intervalles jeden beliebigen reellen und imaginären Werth annehmen kann, so daß man zwischen Integral und Variabeln keine analytische Relation statuiren kann, indem die Unbestimmtheiten, welche die verschiedenen Wege mit sich bringen, auf denen man zu dem Endwerthe der Variabeln gelangt, das Integral gänzlich unbestimmt machen, so daß jeder Werth der Variabeln jedem Werthe des Integrals entspricht. Bei den elliptischen Integralen bildeten alle Werthe, welche das Integral annehmen konnte, in ihrem reellen und in ihrem imaginären Theile eine arithmetische Reihe, mit endlichen Differenzen, so daß alle discret waren, hier aber bilden sie ein Continuum.[1]) Es schien daher, daß man es ganz aufgeben müßte, auf die Abelschen Integrale die Methoden der Analysis anzuwenden, und namentlich die Methoden der elliptischen Transcendenten. Andererseits aber trug das von Abel über diese Integrale gefundene Theorem bestimmte Kennzeichen an sich, daß dieses dennoch möglich sein müße.

In noch höherem Grade findet dieses Paradoxon statt, wenn die Größe unter dem Quadratwurzelzeichen auf einen noch höheren Grad als den sechsten steigt. Wie nun dieses Paradoxon zu lösen ist und wie man hier die analytischen Beziehungen zwischen Variabeln und Integralen zu fassen hat, findet man in Jacobis Abhandlung: *de functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis, quibus theoria transcendentium Abelianorum innititur* (Crelle, XIII) und in einer zweiten: *Considerationes generales de transcendentibus Abelianis* (Crelles Journal 9. Bd. S. 394ff.). Wir kehren nun wieder zu unseren Entwickelungen zurück.[2])

1) In seinem schon zitierten Aufsatz (Biblioth. Mathem. 6_3, 1906/7, S. 92) gebraucht Herr L. Schlesinger zur Charakterisierung der Art, wie Jacobi die hier besprochenen Verhältnisse aufgefaßt hat, fast dieselben Worte, ohne damals die Vorlesung Jacobis gekannt zu haben.

2) Ausführlich hat Jacobi im Winterkolleg 1835/36, Vorlesungen 67—75, das von ihm aufgestellte Umkehrungsproblem im Falle der vierfach periodischen Funktionen behandelt. Wir wollen hier wegen ihrer hervorragenden historischen Wichtigkeit aus Vorlesung 74 folgende Stelle zum Abdruck bringen:

„Die besondere Gattung von Periodicität, auf welche wir hier stoßen, ist folgende: Wir haben hier Functionen zweier Variabeln, die wir mit $\lambda(u, v)$ bezeichnen wollen, zu betrachten, so daß es immer zwei reelle und zwei imaginäre Constanten a, b, c, d (resp. a', b', c', d') von der Art gibt, daß die Function $\lambda(u, v)$ ungeändert bleibt, wenn man zu gleicher Zeit

1. u um a, v um a' 2. u um b, v um b'
3. u um c, v um c' 4. u um d, v um d'

Periodisch nennt man eine Function, wenn sie die Eigenschaft hat, daß, wenn man die Variable um eine gewisse Constante ändert, der Werth der Function ungeändert bleibt. Denkt man sich nun, daß man der Variabeln alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ giebt, so werden dieselben Werthe wiederkehren und Reihen bilden. Hier, wo Sin am eine doppelte Periode, eine reelle und eine imaginäre, hat, muß man sich vorstellen, daß u die Form $v + v'\sqrt{-1}$ annehme, und man dann dem v und v' alle Werthe von $-\infty$ bis ∞ beilegt. Man braucht aber nur den Werth von Sin am u zu kennen, welcher dem Werthe von v in irgend einem Intervalle entspricht, das die Größe $4K$ umfaßt, also von $v = a$ bis $v = a + 4K$, und für die Werthe von v' von $v' = b$ bis $v' = b + 2K'$, wo a und b reell sind. Wenn man für alle diese Werthe die Werthe von Sin am $(v + v'\sqrt{-1})$ kennt, so kennt man sie auch für alle Werthe von $-\infty - \infty\sqrt{-1}$ bis $+\infty + \infty\sqrt{-1}$, indem dieselben Werthe ganz in derselben Ordnung wiederkehren, wenn man v und $4K$ oder v' und $2K'$ ändert. Von dieser periodischen Wiederkehr haben die Functionen den Namen der doppelt periodischen Functionen. Sie sind durch die elliptischen Functionen in die Analysis eingeführt und umfassen den ganzen Begriff der Periodizität, denn JACOBI hat in der erwähnten Abhandlung (CRELLE, XIII) nachgewiesen, daß eine dreifach periodische Function keinen analytischen[1]) Sinn hat.

Die Constante, um welche man die Variable vermehren kann, so daß der Werth der Function ungeändert bleibt, heißt der Index[2]) der Periode,

ändert, so daß, wenn man diese Aenderung wiederholt, und mit einander die einzelnen Aenderungen verbindet, und wenn ferner m, n, p, q irgend welche positive oder negative ganze Zahlen bedeuten, immer die Gleichung stattfindet:

$$\lambda(u, v) = \lambda(u + ma + nb + pc + qd,\ v + ma' + nb' + pc' + qd').$$

Dieses ist nun eine ganz neue Gattung von Periodicität; ihr Charakter besteht darin, daß sie sich auf Functionen mit zwei Variabeln bezieht, und daß beide Variabeln zu gleicher Zeit ihre Perioden durchlaufen, so daß man nie eine Variabele allein ändern kann, ohne die andere zu ändern, wenn nämlich die Function ungeändert bleiben soll. Von dieser Periodicität kommt kein ferneres Beispiel in der ganzen Analysis vor, und daher ist es schwer, eine deutliche Vorstellung davon zu geben. Dieses hindert aber nicht zu glauben, daß diese Auffassungsart die richtige sei. Der Umstand, daß der Erfinder [JACOBI] von der Notwendigkeit x_1 und x_2 als Functionen von u und v zu betrachten, früher überzeugt war [CRELLE, Bd. **9** l. c.], als der Zweifel über die vielfachen Perioden ihm aufstieß [CRELLE, Bd. **13** S. 55—61], und noch mehr, daß diese Auffassungsart den Zweifel beseitigt, scheint ihre Richtigkeit zu verbürgen."

Diese Stelle zeigt mehr als jede andere, welchen Wert JACOBI auf den Existenzbeweis der vierfach periodischen Funktionen gelegt hat.

1) In dem Manuskript des Herausgebers heißt es nur „keinen Sinn hat", in der Ausarbeitung ROSENHAINS dagegen „keinen analytischen Sinn" hat.

2) Bekanntlich gebraucht man seit EISENSTEIN (Journ. für Mathem. **35**, 1847, S. 175) anstatt „Periodenindex" das Wort „Periodizitätsmodul", und zwar nach dem Vorschlag von GAUSS.

vorausgesetzt, daß nicht schon ein aliquoter Theil der Constante dieselbe Eigenschaft hat.

Schlußbemerkung des Herausgebers.

Von sachkundiger Seite wurden Bedenken geäußert gegen die von mir in der eingangs erwähnten Skizze über JACOBI ausgesprochene Behauptung, dieser habe in den hier veröffentlichten Vorlesungen eine der Hauptentdeckungen von PUISEUX, die Erklärung der Periodizität mit Hilfe der Lehre von den Verzweigungspunkten und des Kontinuitätsprinzips, vorweggenommen. Diese Bedenken scheinen mir völlig ungerechtfertigt. In seiner berühmten Arbeit *Recherches sur les fonctions algebriques* (Journ. de mathém. **15**, 1850, S. 365ff.) sagt PUISEUX S. 478—479 wörtlich:

C'est à M. CAUCHY qu'il appartient d'avoir expliqué la véritable idée qu'on doit se faire d'une intégrale prise entre les limites imaginaires et de ses valeurs multiples: la proposition que je donne à ce sujet, n° 9, a été démontrée par lui il y a déjà longtemps [1825] . . . Les théorèmes des n°s 10, 11, 12, qui en sont des corollaires, reviennent à ceux qu'énonce M. CAUCHY dans le tome déjà cité des Comptes rendus (T. XXIII 1846) p. 253 et 692; ils acquièrent seulement une signification plus précise lorsqu'on sait, par les théorèmes des n°s 6 et 7 . . .

Die hier zuletzt erwähnten Sätze PUISEUX' in Nr. 6 und 7 bringen gegenüber CAUCHY als wesentlich neuen Bestandteil, daß bei der Abänderung des Integrationsweges kein Punkt überschritten werde, für den zwei Wurzeln der Fundamentalgleichung einander gleich werden.[1]) Daß JACOBI bei der Bestimmung der Perioden immer von einem Verzweigungspunkte zum anderen geradlinig[2]) integriert, war ihm durch die ganze Anlage seiner Vorlesung 1835/36 geboten und vermöge seiner Beschränkung auf überall endlich bleibende Integrale erlaubt; wie ja auch RIEMANN bei der Bestimmung der Periodizitätsmoduln die geschlossenen Linien, die von der einen Seite des Querschnittes nach seiner anderen Seite führen, zu geraden Linien verengert, wenn die Integrale in den Verzweigungspunkten endlich bleiben. Die auffallende Ähnlichkeit zwischen dem JACOBIschen und dem RIEMANNschen Verfahren erwähnt auch H. WEBER in einer Anmerkung zu S. 77 der ROSENHAINschen Preisarbeit [OSTWALDS Klassiker **65**, S. 92] „die Mehrdeutigkeit der Funktion, die ROSENHAIN [richtiger JACOBI, nach ROSENHAINS eigener Aussage, S. 79 Z. 3—1 v u.]

1) Siehe auch BRILL und NOETHER, *Entwickelung der Theorie der algebraischen Funktionen* (Leipzig 1894), S. 198 Z. 22—24.

2) Man vgl. dagegen JACOBIS *Werke* II, p. 516 Z. 16—24, sowie die Fußnote des Herrn SCHLESINGER l. c. S. 92.

umständlich analytisch definiert, wird klar und anschaulich erst durch Einführung der Riemannschen Flächen."

Endlich möge daran erinnert werden, daß die Rosenhainsche Abhandlung beim Sekretariat der „Académie des Sciences" am 30. September 1846 eingegangen und daß der **15**. Band des Journal de mathématiques (Liouville) 1850 erschienen ist. Wie schwer das ganze Jacobische Prinzip zu erfassen war, wird am besten durch einen Brief Rosenhains an Jacobi erläutert (Journ. für Mathem. **40**, 1850, S. 360 Z. 6—9). Selbst wenn Puiseux die erste Anregung zu seinen fundamentalen Untersuchungen durch Rosenhains Preisarbeit empfangen hätte, so würde die Durchführung für die Perioden der allgemeinen Abelschen Integrale Puiseux' unvergängliches Verdienst bleiben.

Développements relatifs au projet d'un „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques".

Par Gino Loria à Genova.

I.

Dans une communication que je fis à la Section historique du IV Congrès des mathématiciens (Rome, Avril 1908) j'ai soulevé la question de déterminer les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques. Après avoir signalé quelques routes qu'on pourrait suivre pour atteindre ce but, je me suis arrêté particulièrement sur la compilation, par un groupe de spécialistes, d'un „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques", dont voici le plan:

1. Généralités sur la nature, le but et la méthode de la recherche historique; la „méthode historique".

2. Méthodes employées pour l'étude „scientifique" de la littérature; bornes de leur applicabilité aux recherches sur l'évolution d'autres manifestations de la pensée. Les ouvrages de consultation en général (dictionnaires, encyclopédies, histoires des universités et des sociétés savantes, etc.). Chronologie et métrologie.

3. Des différentes directions que l'on peut suivre dans les études sur l'histoire des sciences en général et des mathématiques en particulier. Analyse des principales histoires générales des mathématiques. Les biographies et les corréspondances des savants illustres.

4. Nécessité de considérer séparément ce qui se rapporte aux temps antérieurs à l'invention de l'imprimerie de ce qui a trait aux temps postérieurs. Recherches sur l'histoire des mathématiques dans l'Antiquité et au Moyen-âge. Generalités sur l'étude des manuscrits. Catalogues de manuscrits etc.

5. a) Les mathématiques des Grecs. b) Les mathématiques des Romains. c) Les mathématiques des peuples de l'Orient. d) Les mathématiques au Moyen-âge.

6. Le livre imprimé et son histoire. Notions de bibliographie.

7. Liste des œuvres complètes des grands mathématiciens modernes. Les receuils académiques et les journaux scientifiques.[1])

Ma communication ayant eu lieu à la dernière séance (je dirai mieux, à la dernière heure) du Congrès, malgré l'extrême bienvieillance de MM. E. PICARD et M. SIMON qui la présidaient, il a été impossible de la faire suivre par la discussion que je désirais si vivement, autant pour l'aspiration théorique d'éclaircir une question qui me paraissait très-importante, que pour arriver au but pratique de la formation d'un comité de rédaction de ce „Manuel“.

Ma communication ayant déjà eu l'honneur d'être publiée dans le premier cahier de l'Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik, tout le monde est à même de juger de la valeur théorique et pratique de mes propositions. Or par des communications privées j'ai pu constater qu'il ne leur est pas manqué un bon accueil, mais qu'il est nécessaire d'éclaircir quelques points de détail que, faute de temps, il ne m'a pas été possible d'approfondir assez dans ma lecture. Et pour cela j'accepte l'hospitalité qui m'est toujours largement accordée par la Bibliotheca Mathematica.

II.

Au début de ma communication citée plus haut j'ai remarqué que la plus grande diversité d'opinions règne aujourd'hui sur la route qu'on doit suivre dans les recherches sur l'histoire des mathématiques; car les uns (comme p. ex. M. ZEUTHEN) s'occupent presque exclusivement des œuvres sans payer qu'une fraction d'attention aux auteurs, tandis que d'autres (p. ex. M. FAVARO) se plaisent particulièrement des détails biographiques et bibliographiques, et un trop grand nombre trouvent bon de *séparer les decouvertes mathématiques de tout ce qui a trait à l'histoire générale de la pensée et à l'histoire politique*, montrant de la sorte le mathématicien comme un être isolé, qui n'a aucun rapport avec le monde où il vit et qui se soustrait à toute influence extérieure. Or (il faut le reconnaitre!) en général cela n'a pas de conséquences regrettables lorsqu'il s'agit de l'histoire d'une petite branche de science ou de recherches de détail, ayant pour but de fixer la date d'une certaine découverte ou l'époque de quelque

1) Après la lecture et la publication de ma communication romaine parut le *Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften von* FELIX MÜLLER (Abh. zur Gesch. der Mathem. 27) dont le programme a beaucoup de points de contact avec celui du dernier chap. du „Manuel“. Je crois bon de citer encore le volume que vient de publier la „R. Society of London“: *Catalogue of scientific Papers 1800—1900. Subject Index, Vol. I, Pure mathematics* (Cambridge 1908).

savant, ou bien de resoudre quelque question analogue, c'est-à-dire dans les travaux qui se rapportent à celle que Nesselmann[1]) appelle „histoire pragmatique". Mais si on ne veut pas exclure la possibilité de s'élever à des considérations d'ordre général, c'est-à-dire atteindre le niveau de celle que M. Eneström[2]) a proposé d'appeller „histoire scientifique"[3]), la séparation de l'histoire des mathématiques de l'histoire générale de la culture et de celles des autres sciences peut avoir, suivant mon sentiment, des résultats on ne peut plus fâcheux.

Pour justifier cette opinion je remarque avant tout que la connexion intime et profonde dont je viens de parler a été reconnue par l'historien dont la sympathie pour l'histoire pragmatique est mise hors de doute par sa passion absolument pathologique (voir même criminelle) pour le document: je parle (est-ce nécessaire de le dire?) de G. Libri, qui, dans le préambule de sa célèbre *Histoire des sciences mathématiques en Italie* a proclamé hautement la nécessité „de montrer que l'état intellectuel des peuples est toujours lié à leur état moral et politique"; de manière qu'il se vit obligé de „faire marcher de front l'histoire des idées et celle des hommes pour les éclairer l'une par l'autre".[4]) Conformément

1) Voyez *Die Algebra der Griechen* (Berlin 1842) p. 6 ligne 19.

2) Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, p. 2.

3) C'est sans doute à cette espèce d'histoire que songeait Montucla lorsqu'il écrivait ces mémorables paroles: „L'histoire d'une science n'est pas celle de tous les auteurs, qui en ont écrit, mais seulement de ceux qui ont contribué par leurs travaux à en réculer les bornes: l'énumération exacte des premiers est l'ouvrage du bibliographe et non de l'historien" (*Histoire des mathématiques*, Nouv. éd., T. 2, p. 648). On peut répéter la même chose par rapport aux lignes suivantes de Hankel: „La storia della matematica non deve semplicemente enumerare gli scienziati e i loro lavori, ma essa deve altresì esporre lo sviluppo interno delle idee, che regnano nella scienza" (Bullet. di bibliogr. d. sc. matem. 5, 1872, p. 300). Il est bon d'ajouter que la distinction nette entre ces deux manières de considérer l'histoire d'une science a été faite par P. Tannery dans son admirable essai sur *Le vrai problème de l'histoire des mathématiques grecques* (*La géométrie grecque*, Paris 1887, p. 1—17) et que la plus grande partie des publications que nous voyons paraître appartiennent à l'histoire pragmatique (exemples: les „Kleine Bemerkungen" sur l'ouvrage de Cantor, les savantes notes de l'*Encyklopädie der math. Wiss.* et de la traduction française de cette ouvrage, la partie historique de mes *Spezielle algebraische und transcendenten Kurven*, le colossal *Bericht über die oscillierenden Funktionen* de Burkhardt, etc.); c'est bien naturel car ils servent à accumuler des matériaux pour les futures synthèses historiques et d'ailleurs les dangers et les difficultés qu'offre l'„histoire scientifique" sont bien connus à quiconque s'est essayé dans cette sorte de travaux et ont été magistralement décrits par M. Stäckel dans son analyse des *Vorlesungen* de Cantor (Götting. gelehrten Anzeigen 1900, p. 251—264).

4) Voyez T. I., p. XII. Qu'il me soit permis de remarquer que c'est avec un grand étonnement que je lus dans un savant article qui vient de paraître (B. Lefebvre, *A propos d'une histoire des mathématiques;* Revue des questions scienti-

à cette opinion il a employé tout le tome I de son grand ouvrage à tracer ce tableau éloquent que tout le monde connaît des differentes influences exercées sur la pensée italienne par les peuples qui les premiers atteignirent un haut dégré de civilisation.

Cette opinion a été adoptée plus tard par A. ARNETH, dont la *Geschichte der reinen Mathematik* (Stuttgart 1852) a une introduction „Über die Auffassungsweisen der Mathematik", où il est essayé de prouver que „als Geschichte des reinen Denkens darf sie (die Geschichte der Mathematik) nicht getrennt werden von der Entwickelungsgeschichte des menschlichen Geistes, also von der allgemeinen Kulturgeschichte".[1])

Vingt-cinq ans plus tard C. I. GERHARDT commençait sa *Geschichte der Mathematik in Deutschland* (München 1877) en déclarant qu'il avait eu l'intention „die Geschichte der Mathematik in Deutschland auf den Hintergrund der allgemeinen deutschen Kulturgeschichte zu zeichnen" et qu'il n'avait pu suivre ce programme pour des causes indépendantes de sa volonté. Cet abandon d'un si beau plan a été justement regretté par C. OHRTMANN[2]) et par tout le monde avec lui. — D'ailleurs M. CANTOR a fait implicitement adhésion à la nécessité de considérer le développement de la pensée mathématique conjointement à toutes les autres manifestations de la vie intellectuelle d'un peuple dans une certaine époque, car il a débuté par un ouvrage ayant pour titre *Mathematische Beiträge zum Kulturleben der Völker* (Halle a. S. 1863) et chaque Section du T. I de ses *Vorlesungen* commence par un résumé de l'histoire politique et littéraire d'un des grands peuples de l'Antiquité; enfin c'est M. CANTOR que recemment a écrit les lignes suivantes: „Das Bild des gesamten Kulturlebens dient als Hintergrund, von welchem mathematische Charakterzüge sich hell abheben und selbst dazu dienen, jenen Hintergrund zu hellen."[3])

Encore plus nette apparaît la même pensée chez CONRAD H. MÜLLER dont les remarquables *Studien zur Geschichte der Mathematik, insbesondere des mathematischen Unterrichts an der Universität Göttingen im 18. Jahrhundert* (Abh. zur Gesch. der mathem. Wiss. **18**, 1904) acquièrent une signification hors ligne parce qu'elles parurent sous le patronnage d'un mathématicien tel que FELIX KLEIN; j'ajoute qu'un passage d'une

fiques publiée par la société scientifique des Bruxelles 12_3, 1907, p. 594; réimprimé en supplément du journal Mathésis, cahier de Mars 1909) que „les volumes du trop célèbre LIBRI ne sont qu'une collection de notes et de documents".

1) P. 5.

2) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik **10** (1878), p. 24.

3) Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p. 115.

publication récente de ce célèbre mathématicien prouve l'accord complet entre le maître et l'élève.[1])

Il me serait facile d'ajouter d'autres preuves de l'adhésion générale[2]) dont jouit la thése dont il s'agit[3]); si je ne le fais pas c'est que, même si je réussisais à établir qu'elle jouit à présent du „consensum omnium", je n'arriverai pas à vaincre la résistance d'oppositeurs isolés. A cet effet il vaut bien mieux que je cite quelques faits qui me semblent capables de prouver que la vraie raison de certains phénomènes offerts par l'histoire des mathématiques resterait tout-à-fait inconnue si on s'était astreint à consulter exclusivement la littérature mathématique.

Il est superflu que je m'arrête sur les Mathématiques grecques, car personne ne pourrait soutenir qu'on puisse comprendre l'admirable floraison dûe à Euclide, Archimède et Apollonius sans avoir recours à la considération de l'évolution de la pensée philosophique des Hellènes depuis Thalès, Pythagore et Platon jusqu'à la fondation à Alexandrie du célèbre Museum.

De même la pénétration en Italie et la diffusion en toute l'Europe des ouvrages grecques traduits en Arabe apparaîtrait comme un fait extrêmement étrange si on n'avait pas sous les yeux toute l'histoire du peuple auquel Mahomet imprima pendant quelques siècles un élan si étonnant. Et comment pourrait-on séparer les études générales d'érudition, grâce auxquelles les Italiens exhumèrent les chefs-d'œuvre des mathématiques anciennes, de ce grand et fécond mouvement des esprits, auquel le Petrarque a contribué si puissamment et qu'on appelle ordinairement „humanisme"? Et comment pourrait-on comprendre et expliquer la constitution et le développement en Italie de la perspective, précisement

1) Je fais allusion au volume *Elementar-Mathematik vom höheren Standpunkt aus,* 1 (Leipzig 1908) où, à propos de la publication des tables des logarithmes de Rheticus, on lit la remarque suivante: „Sie müssen das alles immer auf den Hintergrund der allgemeinen Geschichte beziehen; so sind wir im Zeitalter der Reformation, und wissen ja, daß damals Wittenberg und ebenso auch die freie Reichsstadt Nürnberg Hauptzentren des geistigen Lebens geworden waren. Doch allmählich verschiebt sich während der Reformationskämpfe der Schwerpunkt des politischen und geistigen Lebens immer mehr von den Städten nach den Fürstenhöfen hin; und während bisher alles in Nürnberg gedruckt wurde, erscheint das gewaltige Tafelwerk Räthicus unter pekuniärer Unterstützung des Kurfürsten von der Pfalz und trägt dadurch seinen Namen *Opus palatinum.*"

2) Il va sans dire que je parle ici de ce que M. Cantor (Biblioth. Mathem. 4_3, 1903, p. 114) appelle „*Geschichte* der Mathematik" à la différence de la „Geschichte der *Mathematik*".

3) Si je m'étais permis de sortir du champ strictement mathématique j'aurais pu puiser une nouvelle adhésion, „mutatis mutandis" dans le volume de N. Tommaseo, *Storia civile nella letteraria* (Torino 1872).

dans l'époque où ma patrie produisait les plus grands maîtres dans l'art du pinceau, si on ne tenait compte de la liaison qui existe entre un des arts majeurs (la peinture) et cette branche si importante des mathématiques (la perspective) qu'on peut bien considérer comme la mère de la géométrie projective?

J'ajoute que le futur historien des mathématiques en France (je veux dire dans les pays où on parle le français), pour expliquer l'apparition d'ouvrages tels que *La langue des calculs* de CONDILLAC et le *Développement nouveau de la partie elementaire des mathématiques* de L. BERTRAND sera obligé de faire noter l'influence extraordinaire de J. J. ROUSSEAU sur ses contemporains; et lorsqu'il fera le tableau des découvertes mathématiques accomplies en France à partir de la moitié du 18e siècle, il sera obligé de parler de cette révolution générale des esprits dont l'*Encyclopédie méthodique* est la première manifestation et la mort de LOUIS XVI la conséquence la plus éclatante.

Quoique j'aie dit plus haut que ceux qui s'occupent de l'histoire pragmatique peuvent souvent se passer de considérer la liaison entre l'histoire des mathématiques et l'histoire générale, il faut reconnaître que cette considération s'est montrée utile même dans les recherches rélatives à des questions tout-à-fait spéciales. Je me rappelle en effet que P. TANNERY, pour résoudre le problème *A quelle époque vivait DIOPHANTE?*[1]) fit remarquer les prix du vin donnés dans une des questions résolues par le célèbre mathématicien grec, et, comme ils correspondent à une époque de famine, il en tira la conséquence qu'il doit avoir vécu après l'époque des Trente tyrans. On sait d'ailleurs que M. CANTOR[2]), pour donner une explication acceptable du violent acharnement avec lequel fut combattue en Angleterre et en Allemagne la question de priorité dans l'invention du calcul infinitésimal, eut recours à la considération des opinions politiques de NEWTON et LEIBNIZ; le premier un des membres les plus phanatiques du parti *tory* et l'autre le protégé et le conseiller intime du duc d'Hannovre, qui était alors le candidat du parti *whig* au trône d'Angleterre.

C'est juste de reconnaître que, la tendence moderne des mathématiciens ayant été depuis environ deux siècles de s'isoler en général du monde extérieur et des autres sciences, la liaison dont j'ai parlé se manifeste moins utile pour l'historien des sciences exactes dans notre époque que pour l'historien de l'Antiquité et de la Renaissance. Il y a toutefois des exceptions. On peut p. ex. citer des chapitres très-importants de la mécanique qui sont indissolublement liés aux théories modernes de la physique (théorie des electrones,

1) Bullet. d. sc. mathém. 3_2, 1879, p. 261—269.

2) Voyez l'article *Sir ISAAC NEWTON* dans Nord und Süd, Janvier et Février 1881.

ondes hertziennes, etc.) et les origines des belles recherches de G. Hauck sur la Photogrammetrie théorique resteraient cachées si on ne remarquait pas la liaison de cette théorie avec la haute Géodésie ou, si l'on préfère, avec la Géographie mathématique. J'ajoute encore que, l'histoire de l'enseignement étant un chapitre de l'histoire des sciences, lorsque on devra faire l'histoire des méthodes d'instruction dans les 19e et 20e siècles et qu'on devra parler de cette tendance révolutionnaire contre les anciens programmes, dont sont à présent agitées toutes les nations les plus évoluées, on sera forcé (même si on ne fait pas adhésion aux doctrines du „matérialisme historique") pour l'expliquer d'avoir recours au merveilleux développement de toutes les branches de la technique, qui s'est manifesté dans ce dernier demi-siècle et aux luttes internationales, non sanglantes mais acharnées, qui se combattent aujourdhui dans toutes les régions du monde industriel et commercial.

III.

Dans ma communication j'ai encore remarqué que, l'histoire des mathématiques, comme toute branche d'histoire, étant une reconstruction du passé à l'aide des sources d'information encore existantes, les procédés qu'on y employe ne sont pas différents, dans le fond, de ceux dont on fait usage, p. ex., dans l'histoire de la littérature; par conséquence j'ai exprimé la conviction que le futur historien des mathématiques devait recevoir une préparation analogue à celle qu'on donne aux jeunes-gens qui aspirent à devenir des littérateurs „scientifiques".

Pour justifier cette proposition je n'ai qu'à mettre sous les yeux de mes lecteurs un excellent petit livre qu'un maître de haute renommée a forgé à l'usage de ses élèves. C'est l'*Avviamento allo studio critico delle lettere italiane* par M. Guido Mazzoni, dont la 2e édition parut à Florence en 1907. Il commence par un chapitre sur „Le manuscrit", donnant tous les renseignements essentiels sur la nature, la classification, la nomenclature etc. des manuscrits avec une bibliographie riche mais non exagérée des sources auxquelles on doit avoir recours pour se familiariser avec le maniement des documents les plus précieux. Or je demande: tout cela est il plus nécessaire à l'historien de la littérature qu'à l'historien d'une branche de science positive, et en particulier à l'historien des mathématiques? . . . — Le II chapitre de l'ouvrage de M. Mazzoni donne une foule d'informations analogues rélatives au „Livre imprimé"; et je pourrais à son égard répéter ce que je viens de dire par rapport au chapitre I. Le III chapitre donne des notices sur „les bibliothèques", leurs organisations, leurs richesses et leurs situations, naturellement avec des suffisantes références bibliographiques et des con-

sidérations spéciales pour l'Italie; or combien de fois, dès le debut de ma modeste carrière d'historien, n'ai-je dû regretter de ne pas avoir des notices sur l'existence et sur la situation des sources dont j'avais besoin! . . . — Le chapitre suivant de l'*Avviamento* donne des renseignements précieux sur les meilleurs ouvrages de consultation: bibliographies, encyclopédies, dictionnaires biographiques, etc.; or ce sont des ouvrages qui rendent de tels services aux savants de toute spécialité que leurs auteurs méritent d'être considérés comme des vrais bienfaiteurs de l'humanité. Tout historien doit, donc, en connaître l'existence et le maniement; au contraire je me suis aperçu que la plus grande partie de ceux qui commencent à écrire sur l'histoire des mathématiques ne supposent même pas qu'il y ait des auxiliaires si précieux.[1]) S'il y a quelque personne qui doute des services que peuvent rendre à l'historien de tels ouvrages, je l'invite à consulter les savants articles que B. Boncompagni a répandus dans son Bullettino. Et pour donner une autre preuve (hélas! bien plus minuscule) j'ajoute que je ne serais jamais arrivé à prouver que J. J. Rousseau n'appartient pas à la catégorie des mathématiciens, si je n'avais pas connu l'existence de l'ouvrage de Quérard sur *Les supercheries littéraires* qui m'apprit que l'auteur des *Elémens de géométrie par J. J. Rousseau*, publiés à Paris en 1801, est bien différent de l'auteur du *Contrat social.*[2]) — Après cette digression (que les lecteurs de la Bibliotheca Mathematica voudront bien me pardonner!) je reviens à M. Mazzoni, pour remarquer que son chapitre consacré à l'histoire de la littérature en général pourra être très-utile à ceux qui se préparent à devenir des historiens des mathématiques, pour les informations exactes qu'on y trouve sur les bibliographies des différentes regions et sur les académies (italiennes, il va sans dire). Le reste de son livre a une liaison très-éloignée avec notre sujet; par conséquent c'est inutile que nous en parlions.

IV.

J'ai encore dit dans ma communication que je crois nécessaire de faire connaître à tous ceux qui vont se vouer à l'histoire des mathématiques les lignes générales de la „méthode historique“, tout au moins pour déraciner l'opinion (si répandue parmi les jeunes gens) que pour écrire un article d'histoire des mathématiques il suffit de faire l'analyse d'un livre ou de quelques mémoires, en y ajoutant quelques fois des conjectures, ayant généralement une bonne base logique, mais manquant

1) Combien d'entre eux ignorent même l'existence et la valeur extraordinaire du *Handwörterbuch* de Poggendorff!

2) Voyez la note „*Uniquique suum*“ publié dans le Bollett. de bibl. e storia delle sc. mat. 8, 1905, p. 65—67.

tout-à-fait de preuves historiques. J'essayerai de justifier cette opinion par une courte analyse de l'ouvrage le plus estimé et le plus répandu sur la „méthode historique". Je parle du *Lehrbuch der historischen Methode* de E. Bernheim, professeur à l'université de Greifswald, et précisément des chapitres III et IV que je connais par la bonne traduction qu'en fit M. Crivellucci, professeur à l'université de Pise.[1]) Ces deux chapitres traitent l'un de l'„Euristique ou doctrine des sources", l'autre de la „Critique des sources".

Le premier débute par une classification des sources (restes, traditions, monuments etc.) et sera sans doute d'une grande utilité à ceux qui cultivent la „préhistoire" des mathématiques; nous y trouvons ensuite des précieux renseignements sur les recueils de sources, les répertoires de sources et les ouvrages généraux de bibliographie; nous lisons après un paragraphe très-étendu sur les sciences auxiliaires de l'histoire et il est évident que tout ce qu'on y lit relativement à la philologie, à la paléographie, à la numismatique, à la généalogie et aux répertoires bibliographiques, enfin à la chronologie constitue une préparation tout-à-fait indispensable pour le futur historien des temps antérieurs à l'époque contemporaine.

Comme les sources de l'histoire des mathématiques sont au fond de la même nature que les sources rélatives à toute autre branche d'histoire, l'utilité de l'autre des chapitres cités de l'ouvrage de M. Bernheim est de toute évidence. Car il commence par un exposé des procédés qu'on emploie dans la „critique extérieure" des documents, c'est-à-dire des moyens qu'on emploie pour en déterminer l'authenticité, les temps, les lieux, les auteurs etc. On trouve ensuite la description des procédés correspondants de la „critique intérieure" et après un résumé des procédés par lesquels on fait la „comparaison" des sources pour arriver à un jugement définitif sur la vérité des faits. Le chapitre se clôt par des conseils pratiques extrêmement bons sur la manière d'ordonner les matériaux, soit suivant l'ordre chronologique ou géographique, soit par matières. Or je crois hors de discussion que tout cela constitue un précieux recueil de règles et de connaissances que sans doute tout historien des mathématiques arrive à acquérir, mais peu à peu et après avoir dépensé une somme considérable de temps et de force vive. Or, le but que se propose le „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques", étant précisément d'épargner aux futurs historiens les douloureuses incertitudes et les faux pas qui rendirent si pénible la carrière de ceux qui durent chercher tous seuls leur route, en donnant une application nouvelle de la loi de Mach sur l'„économie de la pensée",

1) *Manuale del metodo storico,* Pisa 1897.

il est évident qu'il devra embrasser une exposition suffisante de la „méthode historique" telle qu'elle résulte du livre que je viens d'examiner.

Le manque d'un tel aide n'a pas eu de conséquences déplorables sur les travaux des maîtres, car ils surent y suppléer par la force de leur talent; mais ses effets sont évidents dans certains travaux qui, quoique présentés comme des contributions à l'„histoire" des mathématiques, ne peuvent au contraire qu'aspirer au rang de travaux de „biographie" ou „bibliographie" ou tout au plus d'„euristique", car ils se bornent à énumérer des sources ou des faits sans en faire la comparaison et la critique et sans en fixer la signification et la place dans l'histoire générale de la pensée. Des travaux de telle sorte possèdent sans doute un considérable degré d'utilité lorsqu'ils sont faits avec intelligence et avec conscience, mais ils ne peuvent pas aspirer à être considérés comme définitifs. Or, le but qu'on doit se proposer dans toute branche d'enseignement étant de mettre l'élève en condition d'arriver jusqu'au bout de son chemin, sans avoir toujours besoin d'un collaborateur (tel que vient de proposer M. Eneström[1]), c'était mon strict dévoir de rédiger pour mon „Manuel" un plan qui, suivant mon opinion, permit d'atteindre ce noble but. Puisse la rédaction de ce livre être effectuée et l'histoire des mathématiques s'accroître de nouveaux culteurs et de travaux importants!

1) Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, p. 13.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik".

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen". BM = Bibliotheca Mathematica.

1³: 12, 15, 22, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61. — **1³: 33,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 307. — **1³: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 61—64. — **1³: 163—165,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1³: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 64—65.

1³: 198. In dem Abschnitt über Zenon von *Elea* heißt es: „Nach der als Stoa bezeichneten Halle, in welcher Zenon in Athen seine Vorträge hielt, nannte man seine Schüler die Stoiker. Zu diesen unmittelbaren Schülern gehörte Posidonius von Alexandria." Dieser Passus, ein, vielleicht aus der S. 545 zitierten Abhandlung von E. Hoppe entnommener, Zusatz der 3. Auflage, bezieht sich (wie übrigens auch in der Hoppeschen Abhandlung ersichtlich) auf Zenon von *Kittium*, und ist also wieder zu streichen.

Leipzig. A. Rüstow.

1³: 201. Der Kommentar des Philoponus zur Physik des Aristoteles sollte nach der von H. Vitelli besorgten neuen Berliner Akademieausgabe (1887—88) zitiert werden. Das gilt auch noch für S. 203. Und nicht nur für Philoponus. In der Tat ist schon wiederholt (z. B. BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 307—310) darauf hingewiesen worden, daß eine große Anzahl der Cantorschen Zitate aus griechischen Schriftstellern nach den neuen, verbesserten Ausgaben, insbesondere denen der Berliner Akademie und der Bibliotheca Teubneriana, zu revidieren ist. Jede einzelne Stelle namhaft zu machen, würde aber wohl viel zu weit führen. Ferdinand Rudio.

1³: 202, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 307—309. — **1³: 203,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 65, 309.

1³: 206. Zu dem, was hier über *τμῆμα* gesagt wird, könnte wegen der großen Bedeutung, die die Interpretation dieses Wortes für das Referat des Eudemus besitzt, in einer späteren Auflage hinzugefügt werden, daß das Wort

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

τμῆμα vor EUKLID tatsächlich auch in der Bedeutung Sektor (wofür EUKLID dann τομεύς sagt) gebraucht worden ist. Das geht deutlich aus einigen Stellen bei ARISTOTELES hervor, von denen ich eine, auf die Herr T. L. HEATH mich aufmerksam zu machen die Güte hatte, hier wiedergebe. Die Stelle (*De caelo* II 8, 290ᵃ 2—4) lautet: μεῖζον γὰρ τῶν ἀφαιρουμένων ὑπὸ τῶν ἐκ τοῦ κέντρου τὸ τοῦ μείζονος κύκλου τμῆμα. Hier ist also τμῆμα ein von zwei Radien abgeschnittenes Stück, d. h. ein Sektor. (S. meine *Notiz zur griechischen Terminologie* in der Vierteljahrsschrift d. Naturf. Gesellsch. in Zürich **53**, 1908, S. 481.)

FERDINAND RUDIO.

1³ : 213, 225, 236, 245, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 65. — **1³ : 257,** siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 139. — **1³ : 270, 287, 297, 298, 310,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 66. — **1³ : 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 174—176. — **1³ : 351,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 66. — **1³ : 365, 368,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 177.

1³ : 372. Mit der Angabe (Z. 16—20): „Wir bemerken beiläufig, daß die in ARCHIMEDS Kreisrechnung vorkommenden angenäherten Quadratwurzeln entgegen dem, was EUTOKIUS zu verstehen gibt, nicht alle nach HERONS Vorschrift $\left(\sqrt{a^2 \pm b} \sim \frac{1}{2}\left(a + \frac{a^2 \pm b}{a}\right) = a \pm \frac{b}{2a}\right)$ gefunden werden. Es gelingt z. B. nicht, die Grenzwerte $\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$ (S. 316) zu finden" können wir uns nicht einverstanden erklären; nimmt man an, daß die Griechen wußten, daß man bei der Quadratwurzelausziehung durch Erweiterung mit einer Quadratzahl genauere Werte bekommen kann, was, wie wir wissen, den Arabern bekannt war und von ihnen praktiziert wurde, so finden wir die genannten beiden Werte auf folgende Weise:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{15}\sqrt{675} = \frac{1}{15}\left(26 - \frac{1}{52}\right) = \frac{1351}{780}$$
$$\sqrt{3} = \frac{1}{17}\sqrt{867} = \frac{1}{17}\left(29 + \frac{13}{29}\right);$$

um nicht zu große Zahlen zu erhalten, suchte man $\frac{13}{29}$ durch einen Bruch mit kleinerem Zähler und Nenner zu ersetzen; dies erreichte man durch Subtraktion von 1 bzw. 2 von Zähler und Nenner (nach EUKLIDES V, 5), so erhielt man den Bruch $\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$ und hieraus

$$\sqrt{3} = \frac{1}{17}\left(29 + \frac{4}{9}\right) = \frac{265}{153}$$

oder: $\sqrt{3} = \frac{1}{17}\sqrt{867} = \frac{1}{17}\left(30 - \frac{11}{20}\right)$; $\frac{11}{20}$ nach analoger Überlegung wie vorhin durch $\frac{10}{18} = \frac{5}{9}$ ersetzt, gibt:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{17}\left(30 - \frac{5}{9}\right) = \frac{265}{153}$$

oder:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{51}\sqrt{7803} = \frac{1}{51}\left(88 + \frac{59}{176}\right) = \frac{1}{51}\left(88 + \frac{1}{3}\right) = \frac{265}{153}.$$

Bei dieser Gelegenheit dürfen wir vielleicht erwähnen, daß der Wert $\frac{26}{15}$ für $\sqrt{3}$ auf diese Weise sehr einfach erhalten wird:

$$\sqrt{3} = \frac{1}{3}\sqrt{27} = \frac{1}{3}\left(5 + \frac{1}{5}\right) = \frac{26}{15}.$$

H. SUTER.

1³ : 372, 374, 376, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 411—418. — **1³ : 380,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 66—67. — **1³ : 388,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 177.

1³ : 401—402. Was hier Herr CANTOR über die Stereometrie HERONS sagt, ist ganz unrichtig; er folgt merkwürdigerweise hier der HULTSCHschen Ausgabe der *Stereometrica* statt der SCHÖNEschen Ausgabe der *Metrica*, die er doch S. 364 und nachher noch öfters zitiert; auch meine Rezension dieser *Metrica* (Biblioth. Mathem. 7_3, 1906, p. 98—104) hat CANTOR ganz unberücksichtigt gelassen. Dort und hier hätte er finden können, daß HERON zwischen Pyramidenstumpf und Obelisk wohl zu unterscheiden wußte, daß er beide richtig berechnet hat, und zwar letzteren nach der Formel (p. 117):

$$h\left[\left(\frac{a+c}{2}\right)\left(\frac{b+d}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{a-c}{2}\right)\left(\frac{b-d}{2}\right)\right],$$

die man auch bei BHĀSKARA (*Līlāvatī*, edid. BANERJI, p. 129—130), aber in der Form:

$$\frac{h}{6}[ab+cd+(a+c)(b+d)]$$

findet. Auch auf diese Leistung der Inder hat CANTOR in der Besprechung der indischen Geometrie (S. 649—657) nicht aufmerksam gemacht; sie hätte ihn wohl noch mehr in seiner Ansicht der Abhängigkeit der indischen Geometrie von HERON bestärkt.

H. SUTER.

1³ : 406, 409, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 177—178.

1³ : 409. Z. 19 sollte der Verweis auf S. 198 gestrichen werden (vgl. oben die Bemerkung zu 1³ : 198) und statt desselben könnte auf S. 7, Fußnote 2 der von Herrn CANTOR S. 545 zitierten Abhandlung von E. HOPPE verwiesen werden.

G. ENESTRÖM.

1³ : 410, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 178. — **1³ : 429,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1³ : 431,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 139—140. — **1³ : 432,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1³ : 433,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 179.

1³ : 447. Es wäre zu wünschen, daß endlich einmal „der kleine Astronom“ aus der Literatur verschwinden würde. Denn abgesehen von dem entschieden komischen Beigeschmack, den diese Bezeichnung hat, ist zu sagen, daß die Übersetzung auch inkorrekt ist. In der Tat ist *μικρὸς ἀστρονομούμενος* gar nicht persönlich zu deuten, sondern es ist zu ergänzen: *τόπος*. Wenn auch dieses Wort in der Überschrift des 6. Buches fehlt (Überschriften sind bekanntlich bei den griechischen Schriftstellern wenig maßgebend), so beginnt dieses selbst doch gleich mit den Worten: „*Πολλοὶ τῶν τὸν ἀστρονομούμενον τόπον διδασκόντων* . . .“ HULTSCH übersetzt mit „astronomiae disciplina“, was wir ja auch für die deutsche Übersetzung benutzen könnten. Wir haben aber hier ein Wort, das der ursprünglichen Bedeutung von *τόπος* viel näher kommt, nämlich: „Gebiet“ (Wissensgebiet, Lehrgebiet), und so könnte denn „der kleine Astronom“ passend durch „das kleine astronomische Gebiet“ ersetzt werden. Den Gegensatz dazu bildet bekanntlich die große *Syntaxis* des PTOLEMAEUS.

FERDINAND RUDIO.

1^3 : 448. Die Übersetzung „Sammelwerke analytischer Natur“ bedeutet ja gewiß gegenüber der früheren, auf Chasles und Hultsch zurückgehenden Übersetzung von *τόπος ἀναλυόμενος* durch „Aufgelöster Ort“ (lieu résolu, locus resolutus) einen großen Fortschritt, sie ist aber trotzdem noch nicht richtig. Denn wenn auch das Ganze als Sammelwerk bezeichnet werden kann, so sind doch die einzelnen Bücher der Sammlung nicht auch selbst wieder Sammelwerke. Der Plural ist also ganz ungerechtfertigt. Gow (*A short history of greek mathematics*, Cambridge 1884), auf den sich Cantor dabei stützt, und der das Verdienst hat, nachdrücklich darauf hingewiesen zu haben, daß *τόπος* hier in dem Sinne der Rhetorik zu nehmen ist (immerhin darf gesagt werden, daß Hultsch in dem Index zu Pappus den locus resolutus aufgegeben und durch locus de resolutione, id est doctrina analytica ersetzt hat), benutzt die Ausdrücke „storehouse“ und „treasury of Analysis“. Nun werden ja gewiß „Magazin“ und „Schatzkästlein“ gelegentlich als Titel von Büchern gewählt, die man als „Fundgrube“ bezeichnen will. Aber dadurch würde doch *τόπος* eine Nebenbedeutung erhalten, für die sich in der griechischen Literatur kaum ein Beleg beibringen ließe. Die *κοινοὶ τόποι* (Gemeinplätze) könnten hierfür nicht herangezogen werden. Ich schlage daher auch hier (s. meine Bemerkung zu 1^3 : 447) die Übersetzung „Gebiet“ vor. Es wäre dann also zu sagen: „das Gebiet der Analysis“ oder „das analytische Gebiet“.

Ferdinand Rudio.

1^3 : 452, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 179. — **1^3 : 459**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 309—310. — **1^3 : 464**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 179. — **1^3 : 470**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S 311. — **1^3 : 471**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 413. — **1^3 : 476**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 71—72. — **1^3 : 488**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1^3 : 498**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180. — **1^3 : 500, 502**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 67. — **1^3 : 503—504**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180—181.

1^3 : 503—504. Der ganze Absatz: „Johannes Philoponus . . . am Leben gewesen sein kann.“, ist zu streichen. Darauf hat auch schon Herr Eneström (BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 180) hingewiesen. Es hat in der Tat keinen Zweck, ausführlich das Märchen wiederzugeben, wonach Philoponus sich beim Kalifen Omar vergeblich für die Erhaltung der Bibliothek von Alexandria verwandt habe, um dann zum Schlusse hinzuzufügen, die Sache beruhe auf einem Irrtum, da ja Philoponus 100 Jahre früher gelebt habe.

Der berichtigende Zusatz, durch den Cantor die vorausgehende Erzählung am Schlusse als irrig annulliert, ist durch eine Bemerkung von Tannery (BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 267) veranlaßt worden. Es verlohnt sich aber doch, auch an dieser Stelle zu sagen, daß der Irrtum und die Quelle des Irrtums schon viele Jahrzehnte früher, nämlich schon 1847, von August Nauck aufgedeckt worden sind. In seinem in der Allgemeinen Enzyklopädie von Ersch und Gruber (sect. III, vol. **23**, p. 465) veröffentlichten Artikel „Philoponus“ bringt Nauck zunächst mehrere gewichtige Argumente dafür, daß das Leben des Philoponus in den Ausgang des 5. und in das 6. Jahrhundert n. Chr. falle, darunter auch eine von Philoponus selbst herrührende Angabe, aus der das Jahr 529 als Abfassungszeit des Werkes gegen Proklus hervorgeht, und fährt dann fort: „Die widersprechenden Angaben können gegen die Triftigkeit der obigen Argumente kaum in Betracht kommen. Zunächst muß des Philoponos eigene Angabe (Philop. in Aristot. *Phys.* lit. S. p. 3: *φαμὲν γὰρ ἐνεστηκέναι νῦν*

καὶ ἐνιαυτὸν καὶ μῆνα καὶ ἡμέραν· ἐνιαυτὸν Διοκλητιανοῦ ἔτος τλγ΄, μῆνα Παχών, ἡμέραν δεκάτην), aus der sich das Jahr 617 ergeben würde, offenbar korrupt sein, und es liegt nahe, statt *τλγ΄* zu vermuten *σλγ΄* (517)."

Diese Konjektur ist seit langer Zeit allgemein angenommen, und so findet sich denn die Lesart *ἔτος σλγ΄*, unter Hinweis auf NAUCK, auch in der aus dem Jahre 1888 stammenden, von H. VITELLI besorgten Berliner Akademieausgabe (PHILOP. in ARISTOT. *Phys.* IV—VIII, p. 703) Freilich zitiert CANTOR diesen Kommentar, wo er von ihm zu sprechen hat (**1**³: 201 und 203), nicht nach dieser, sondern nach der alten Ausgabe. FERDINAND RUDIO.

1³ : 509, 510, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 67. — **1³ : 512,** siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 140—141. — **1³ : 513, 515, 528, 545,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 68—69. — **1³ : 551,** siehe BM **9**₃, 1908/9, S. 141—142. — **1³ : 563—564,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 69.

1³ : 567. Meines Erachtens sollte die Bemerkung (Z. 34—35): „aber nach einer arithmetisch vernünftigen Ausführung dieses Gedankens fahndet man vergebens" ein wenig modifiziert werden. Allerdings ist bei MARTIANUS CAPELLA die Behandlung der vieleckigen Zahlen oberflächlich und dunkel, zuweilen sogar unrichtig (z. B. die Bemerkung über fünfeckige Zahlen), aber dennoch gibt es wirklich vernünftige Ausführungen, wie z. B. die folgenden: „Aliae [figurae] vel triangulae fiunt, atque eae, quae quatuor angulos habent, vel quadratae sunt . . .; est autem triangulus in paucissimis tribus, quadratum in paucissimis quatuor", die ja auf folgende Weise übersetzt werden können: „Einige figurierte Zahlen sind dreieckig, einige viereckig . . .; die kleinste dreieckige Zahl ist drei, die kleinste viereckige vier". G. ENESTRÖM.

1³ : 576, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 69—70, 181; **9**₃, 1908/9, S. 142. — **1³ : 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70. — **1³ : 706,** siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70, 181.

1³ : 710. CANTOR bemerkt (Z. 23—24): „Dieser Schriftsteller (d. h. ALBĪRŪNĪ) ist in Iran geboren". In der 2. Auflage hieß es S. 668: „Dieser Schriftsteller ist von arabischem Geschlechte im nordwestlichen Indien zur Welt gekommen". Dieses war unrichtig und das erstere ist ungenau; Iran ist sehr groß und unbestimmt, man rechnet dazu Persien, Transoxanien, Afghanistan usw. Das richtige ist, daß ALBĪRŪNĪ ein Iranier (Perser) war und nach den Forschungen SACHAUS (*Chronologie orientalischer Völker,* Leipzig 1878, p. XVII f.) sehr wahrscheinlich in einer Vorstadt Chwārizms geboren wurde. H. SUTER.

1³ : 713, siehe BM **8**₃, 1907/8, S. 70.

1³ : 715. Hier hatte CANTOR seine wenn auch ungenaue Berichtigung auf S. 710 vergessen und schreibt: „ALBĪRŪNĪ, nach unserer früheren Darstellung (S. 710) dem Nordwesten Indiens entstammend, hatte nach anderer Meinung seine Heimat in einem kleinen Orte Bīrūn der Landschaft Chwārizm, und diese Meinung, wenn auch mutmaßlich irrig, war verbreitet genug, ihm den Namen ALCHWĀRIZMĪ bei manchen zuzuziehen." Hier vermengt also Herr CANTOR die 2. und 3. Auflage seines Buches: „S. 710" bezieht sich auf die 3. Auflage, der „Nordwesten Indiens" aber steht in der 2. H. SUTER.

1^3: 715—716, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1^3: 717,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1^3: 718,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71.

1^3: 718. Was die Abhandlung Alkindīs über das „Multiplizieren mit der Zahl der Gerstenkörner" anbetrifft, so handelt es sich hier höchstwahrscheinlich um die bekannte Schachaufgabe. H. Suter.

1^3: 719, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 183—184. — **1^3: 720,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71. — **1^3: 730,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1^3: 734,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71.

1^3: 736. Hier ist Nallinos vortreffliche Ausgabe von Albattānīs Astronomie nicht genannt, obgleich der 1. und 3. Teil schon 1903, bzw. 1899 erschienen und beide Teile in der Bibliotheca Mathematica besprochen worden sind. H. Suter.

1^3: 736—737, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1^3: 738,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72.

1^3: 742. Hier könnte vielleicht erwähnt werden, daß bei Gābir ben Ibrahim el-Ṣābī (um die Mitte des 10. Jahrhunderts) der Satz vorkommt, daß unter 4 Punkten A, B, C, D einer Geraden die Relation bestehe:

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD.$$

Einen Beweis dieses Satzes hat bekanntlich Euler in den Novi comment. acad. sc. Petrop. **1** (1747/8), gedruckt 1750, S. 49—51 gegeben, und auf ganz dieselbe Weise beweist el-Ṣābī den Satz, nämlich mit Hilfe des Satzes über die Ergänzungsparallelogramme (vgl. BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 23—25). Wahrscheinlich ist der Satz griechischen Ursprungs (Pappus?), er kann als ein Grenzfall (Radius des Kreises $= \infty$) des Ptolemäischen Lehrsatzes betrachtet werden. H. Suter.

1^3: 743, 748, 750, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 72.

1^3: 763. In der Fußnote 1 erwähnt Herr Cantor den von mir (*Die Mathem. u. Astron. der Araber,* p. 57, Nr. 122) behandelten Muh. b. Ahmed b. Ḥibbān el-Bustī und bemerkt, daß derselbe kaum mit dem Albusti, der von el-Karchī (Ausgabe von A. Hochheim, I, p. 4) erwähnt wird, identisch sein könne. Dies ist aus verschiedenen Gründen ganz richtig, und ich habe diese Identität auch nirgends behauptet oder vermutet. Dagegen glaube ich in diesem Ahmed b. ʿAlī el-Bustī (entgegen meiner früheren l. c. p. 85, Nr. 193 geäußerten Ansicht) den nach Jāqūt (*Geograph. Wörterbuch,* edid. Wüstenfeld, I, 488) und Ibn el-Athīr (*Chronicon,* edid. Tornberg, IX, 175) im Šaʿbān 405 (1015) gestorbenen Abū'l-Ḥasan Ahmed b. ʿAlī el-Battī zu erkennen, einen feinen Adīb (d. h. literarisch Gebildeten), von dem auch Ibn el-Athīr eine gelungene Anekdote erzählt. Statt el-Battī kann sehr leicht el-Bustī gelesen werden. H. Suter.

1^3: 764, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 185. — **1^3: 766,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 143. — **1^3: 770,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 185. — **1^3: 771,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 143.

1^3: 779. Herr CANTOR bemerkt: „In der ebenen Trigonometrie kennt er (NAṢĪR ED-DĪN) den Sinussatz usw.“ Aber der Sinussatz war schon EL-BIRŪNĪ bekannt (*Chronology of ancient nations,* edid. SACHAU, p. 166, arab. Text, p. 184), worauf C. A. NALLINO zuerst hingewiesen hat (vgl. seine Ausgabe AL-BATTĀNĪS, I, p. LXXIII, und Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, p. 82); es ist übrigens sehr wahrscheinlich, daß ihn EL-BATTĀNĪ schon kannte. H. SUTER.

1^3: 780, 781, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 72. — **1^3: 792,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 143—144. — **1^3: 794,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 72.

1^3: 795. Die Angabe: „IBN AFLAḤ stützt sich bei seinen Beweisen auf eine Regel der vier Größen, welche in folgendem Satze besteht, und von welcher eine Vorahnung sich in der Schrift des TĀBIT IBN KURRAH über den Satz des MENELAUS (S. 736) vorfand“ ist nicht ganz zutreffend. Besser wäre: welche schon ABŪ'L-WEFĀ in seinem Almagest angewandt hat, die aber wahrscheinlich TĀBIT schon gekannt hat, und die sich eigentlich schon bei MENELAUS (nur mit Sehnen statt Sinus ausgedrückt) findet (vgl. A. v. BRAUNMÜHL, *Vorlesungen über Gesch. d. Trigonom.* I, p. 17, 47, 58). H. SUTER.

1^3: 798, siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 144. — **1^3: 800,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 73; **9_3**, 1908/9, S. 144—145. — **1^3: 801,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 185—186; **9_3**, 1908/9, S. 145. — **1^3: 802,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1^3: 805—806,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 73.

1^3: 809—810. Die Versuche, den Gründen der Behauptung IBN EL-BENNĀS, die Regel der beiden Fehler beruhe auf Geometrie, nachzuforschen, können jetzt als beendigt betrachtet werden, nachdem (BM 8_3, 1907/8, p. 24—27; 9_3, 1908/9, p. 1—12) verschiedene Abhandlungen über Beweise arabischer Mathematiker zu dieser Regel veröffentlicht worden sind. H. SUTER.

1^3: 815, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 73. — **1^3: 838,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 415.

1^3: 842. In betreff des Briefes von MARTY an SUTER (Fußnote 5) wird auf die Historisch-literarische Abteilung des 29. Bandes der Zeitschrift für Mathematik und Physik verwiesen, ohne Angabe der Seitenzahl. In diesem Falle ist die Unvollständigkeit des Verweises besonders unangenehm, denn der Brief findet sich (S. 179) am Ende eines von Herrn CANTOR herrührenden Berichtes über eine Schrift von STEIN mit dem Titel *Das Bildungswesen des Mittelalters,* und wer kann erraten, daß er an dieser Stelle zu suchen ist? Das Register des Bandes gibt keine Auskunft hierüber. G. ENESTRÖM.

1^3: 855, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 73.

1^3: 857. Der Passus: „Die Sprache, in welcher der Betreffende (JOSEPHUS sapiens) schrieb, war ohne Zweifel nicht die arabische, sondern die lateinische, denn was hätte sonst ADALBERO mit dem Buche anfangen können usw.“ sollte

modifiziert werden. Natürlich war das Buch, welches Gerbert verlangte, lateinisch geschrieben, aber warum kann es nicht eine lateinische Übersetzung einer arabischen Arbeit eines gewissen Jūsuf = Joseph gewesen sein? Daß schon im 10. Jahrhundert Übersetzungen aus dem Arabischen vorhanden gewesen sein müssen, beweist die Abhandlung des Hermannus Contractus über das Astrolabium, sowie der Brief Gerberts an Lupitus von Barcelona, den Herr Cantor sofort nachher erwähnt. H. Suter.

1^3**: 857, 859, 862, 863,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1**^{3}**: 867,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1**^{3}**: 869, 875—876, 877, 878,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74—76. — **1**^{3}**: 881,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 415—416. — **1**^{3}**: 882, 889, 893,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 77—78. — **1**^{3}**: 900,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1**^{3}**: 901,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 145—146. — **1**^{3}**: 902,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78—79. — **1**^{3}**: 906,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 188—189.

1^3 : 906. Warum die Lesart „ad Adelhardum Baiotensem" und der Schluß daraus, daß man „einen im übrigen unbekannten Atelhard von Bayeux anzunehmen habe", da doch die Ausgabe Henrys (im Supplement der Histor.-literar. Abteilung der Zeitschr. für Mathem. **25**, 1880, p. 131—132) nur die Lesarten „Bathoniensem" und „Batensem" hat? — Auch irrt sich Herr Cantor, wenn er in der Fußnote sagt, er habe die Vermutung Helceph = Al-Kāfī, die von L. Rodet stamme, jener Ausgabe Henrys entnommen; in dieser Ausgabe (p. 132) findet sich allerdings die Vermutung Rodets, aber sie leitet Helceph von einem ganz anderen Worte, nämlich „al-qeyf = examen, étude, discussion, recherche approfondie" ab. H. Suter.

1^3**: 908,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79; **9**$_3$, 1908/9, S. 146—147. — **1**^{3}**: 909,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79. — **1**^{3}**: 910,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 416. — **1**^{3}**: 911,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79—80.

2 : 5, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286; **8**$_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351. — **2 : 8,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2 : 9,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 147. — **2 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **9**$_3$, 1908/9, S. 147—148. — **2 : 11,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 14—15,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 17,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 20,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **3**$_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274; **9**$_3$, 1908/9, S. 148.

2 : 26. Außer den Aufgaben, die durch die Regel Ta yen gelöst werden, finden sich in der 8. Abteilung des 12. Abschnittes des *Liber abbaci* auch andere unbestimmte Aufgaben, die von Interesse sind. Beispielsweise gibt es eine Erratungsaufgabe (S. 308 der Boncompagnischen Auflage), die mathematisch auf folgende Weise ausgedrückt werden kann:

> A, B, C sind drei ganze ungleiche Zahlen, und man weiß, daß $A + B + C = 9$, $90 - (2A + 9B + 10C) = k$. Welche sind die drei Zahlen?

Leonardo führt die Division von k durch 8 aus und gibt als Lösung $A = E\left(\frac{k}{8}\right)$, $B = R\left(\frac{k}{8}\right)$, wo $E\left(\frac{k}{8}\right)$ der Quotient und $R\left(\frac{k}{8}\right)$ der Rest ist. Wie die Lösung gefunden wurde, sagt er nicht, aber daß sie richtig ist, ersieht man leicht, denn aus der ersten Gleichung folgt

$$90 = 10\,A + 10\,B + 10\,C,$$

also ist $k = 10\,A + 10\,B + 10\,C - (2\,A + 9\,B + 10\,C) = 8\,A + B,$

und da B kleiner als 8 sein muß, gibt es offenbar nur eine einzige Lösung, nämlich die des Leonardo. Hier ist also eine anscheinend ziemlich verwickelte unbestimmte Aufgabe ohne Herumtasten erledigt.

G. Eneström.

---

2 : 30, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351—352; **3**$_3$, 1902, S. 239—240; **6**$_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **6**$_3$, 1905, S. 310; **8**$_3$, 1907/8, S. 190. — **2 : 37,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **9**$_3$, 1908/9, S. 148. — **2 : 39,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 209.

---

2 : 39. Meines Erachtens wäre es besser, statt (Z. 32—33): „die Behauptung, jede Gleichung $x^2 + c = bx$ habe zwei Wurzelwerte" zu sagen: „die Behauptung, jeder Gleichung $x^2 + c = bx$ können zwei Wurzelwerte genügen". Die Modifikation der Ausdrucksweise ist anscheinend belanglos, aber in Wirklichkeit liegt die Sache etwas anders. Leonardos eigene Worte sind:

> Semper, cum radices equantur censui et numero, soluuntur questiones dupliciter. Vnde in quibusdam questionibus quandoque cadet una solutio, quandoque alia.

Leonardo hebt also durch den Zusatz ausdrücklich hervor, daß bei gewissen Aufgaben zuweilen die eine Lösung (d. h. $x = \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c}$), zuweilen die andere (d. h. $x = \frac{1}{2}b + \sqrt{\frac{1}{4}b^2 - c}$) paßt. Daß gewisse Aufgaben zwei Lösungen haben, sagt er dagegen nicht ausdrücklich, und die Frage, wie viele Wurzeln die Gleichung $x^2 + c = bx$ hat, zieht er gar nicht in Betracht.

G. Eneström.

---

2 : 41, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **8**$_3$, 1907/8, S. 80—81; **9**$_3$, 1908/9, S. 72—73. — **2 : 45,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 148—150. — **2 : 46,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 51,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 106; **9**$_3$, 1908/9, S. 150. — **2 : 52,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 190—191. — **2 : 53,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2 : 59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311. — **2 : 61,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—209, 286—287; **9**$_3$, 1908/9, S. 150. — **2 : 63,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 206. — **2 : 65,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 151. — **2 : 67,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2 : 70,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 417. — **2 : 73,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 77,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 152. — **2 : 82,** 87, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502. — **2 : 88,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **6**$_3$, 1905, S. 395.

---

2 : 89. Die Angabe: „Im *Algorithmus demonstratus,* wo Alles an Buchstaben erörtert wird, fehlt jede Vorschrift darüber" sollte gestrichen werden, weil sie zum mindesten irreleitend ist, und weil die nur zum Teil richtige Bemerkung „wo Alles an Buchstaben erörtert wird" in diesem Zusammenhang keinen Sinn hat. Zuerst ist es nicht klar, was „darüber" bedeuten soll; im vorhergehenden hat Herr Cantor erwähnt, bei welcher Stelle jede einzelne Rechnungsart nach Sacroboscos Vorschriften anfangen soll, und unmittelbar vor dem von mir zitierten Passus steht: „Aus dem gleichen Grunde kann [bei Sacrobosco] die Verdoppelung und Multiplikation ebenso wie die Division und Wurzelausziehung links bei der höchsten Stelle beginnen." Man kann also „darüber" auf die vier soeben erwähnten Rechnungsarten (oder vielleicht auf

Verdoppelung und Multiplikation?) beziehen; das Wort „darüber“ kann anderseits auf alle Rechnungsarten hinweisen. Aber wie man auch die Cantorsche Angabe deuten will, muß sie beanstandet werden. Der Umstand, daß ein Rechnungsverfahren an Buchstaben erörtert wird, hat hier keine Bedeutung, wie aus dem folgenden Auszug aus dem Multiplikationsverfahren im *Algorithmus demonstratus* hervorgeht:

c b a k h g	Sit numerus *abc* multiplicandus per numerum *ghk* multiplicantem, scribo primum inferiorem sub ultima superioris. Multiplico itaque digitum figure *c* in digitum figure *k*.

Aber „prima“ bedeutet die niedrigste und „ultima“ die höchste Stelle nach unserer Ausdrucksweise, und aus den zitierten Zeilen sieht man sofort, 1. daß im *Algorithmus demonstratus* die Multiplikation links beginnt; 2. daß die Vorschrift genau dieselbe gewesen wäre, wenn man die gegebenen Zahlen z. B. durch 123 und 456 dargestellt hätte. In betreff der übrigen Rechnungsarten fehlen im *Algorithmus demonstratus* bestimmte Vorschriften bei Addition („ab alterutra parte incipiens digitum figure inferioris addo digito figure superioris“), Verdoppelung (die als Addition von zwei gleichen Zahlen betrachtet wird) und Halbierung (die Vorschrift paßt ebensogut, wenn man links, wie wenn man rechts beginnt). Dagegen geht aus den Vorschriften deutlich hervor, daß man bei Subtraktion rechts, bei Multiplikation (vgl. oben), Division und Wurzelausziehung links beginnen soll.

G. Eneström.

---

2 : 89, 90, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503. — **2 : 91—92,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503; **5**$_3$, 1904, S. 409—410; **6**$_3$, 1905, S. 395—396; **8**$_3$, 1907/8, S. 191; **9**$_3$, 1908 9, S. 152. — **2 : 97,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 98—99,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 269—270; **6**$_3$, 1905, S. 106—107; **7**$_3$, 1906/7, S. 210. — **2 : 100,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **8**$_3$, 1907/8, S. 81; **9**$_3$, 1908, S 73—74. — **2 : 101,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325; **6**$_3$, 1905, S. 396; **9**$_3$, 1908/9, S. 152—153. — **2 : 104—105,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 503; **4**$_3$, 1903, S. 397—398; **9**$_3$, 1908/9, S. 153. — **2 : 106,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 380. — **2 : 111,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 114,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 153. — **2 : 116,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406; **9**$_3$, 1908/9, S. 153—154. — **2 : 117—118,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107, 311. — **2 : 122,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 503—504; **6**$_3$, 1905, S. 397. — **2 : 126,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406; **6**$_3$, 1905, S. 210. — **2 : 127,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 406. — **2 : 128,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504; **8**$_3$, 1907/8, S. 191—192. — **2 : 129,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 132,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 515—516. — **2 : 143,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504. — **2 : 144,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 381. — **2 : 145,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 287. — **2 : 148,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2 : 150—151,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288. — **2 : 155—156,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 410—411; **7**$_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 311—312; **7**$_3$, 1906/7, S. 87—88; **9**$_3$, 1908/9, S. 154. — **2 : 163,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 504; **6**$_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 382.

2 : 165. Daß Zucchero Bencivenni „Mancherlei astronomischen und mathematischen Inhaltes aus dem Arabischen in das Italienische“ übersetzte, ist wohl in betreff der wichtigsten Angaben lediglich eine Mutmaßung des Herrn Cantor. Herr Cantor verweist nur auf Libri, dessen Angabe lautet: „Zuccheri Bencivenni . . . traduisit en italien plusieurs ouvrages scientifiques; nous nous bornerons à citer ici le Traité de la sphère d'Alfragan.“ Daß Bencivenni überhaupt eine mathematische Schrift übersetzt hat, ist mir durchaus unbekannt, und auch in einem anderen Punkte ist mir die Cantorsche Notiz verdächtig. Nach der *Bibliographie générale de l'astronomie* von Houzeau

und LANCASTER (**1**:1, Bruxelles 1887, S. 465), deren Angaben freilich nur mit großer Vorsicht zu benutzen sind, gibt es in Florenz einen „Trattato della sfera, tradotto dal franchese (!) in italiano", der von ALFRAGANUS verfaßt und von ZUCCHERO BENCIVENNI übersetzt ist. Nun sagt LIBRI gar nicht, daß BENCIVENNI aus dem Arabischen übersetzt hat, und auch diese Angabe der *Vorlesungen* ist wohl eine Mutmaßung des Herrn CANTOR. G. ENESTRÖM.

2:**166**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2**:**175**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2**:**178—179**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 192—193. — **2**:**206**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 318.

2:208. Die Bemerkung (Z. 3—4): „allerdings nicht in quadratischer Anordnung" (es handelt sich um die Multiplikationstabelle LEONARDOS) ist an sich durchaus richtig, aber da im 1. Bande der *Vorlesungen* in betreff des BERNELINUS eine ähnliche Bemerkung fehlt, wird der Leser dadurch leicht irregeleitet, so daß er annimmt, die Einmaleinstafel des BERNELINUS habe eine quadratische Anordnung gehabt (vgl. BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 415). G. ENESTRÖM.

2:**210**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2**:**218**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2**:**219**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2**:**222**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398. — **2**:**224—226**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155. — **2**:**228**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 193. — **2**:**229**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 194. — **2**:**230**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 195—196; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155—157. — **2**:**232, 234, 237, 238, 240**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 196—199. — **2**:**242**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 199—200. — **2**:**243**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200. — **2**:**245**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383. — **2**:**246**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 283; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200. — **2**:**247**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383—384.

2:247. Hier spricht CANTOR von der bekannten Dresdner Algebra und bemerkt, daß im 6. Kap. derselben die sogenannte „regula sermonis" (das Umkehrungsverfahren) erwähnt sei, und daß dasselbe einem ISAAK Sohn SALOMONIS zugeschrieben werde. In einer neuen Auflage könnte CANTOR statt seiner Vermutungen über diese Persönlichkeit anführen, daß diese Angabe höchstwahrscheinlich dem *Liber augmenti et diminutionis* (siehe LIBRI, *Hist. des sciences mathém. en Italie,* I, p. 312) entnommen sei, daß sie aber unrichtig sei, indem dieser Erfinder daselbst heiße JOB filius SALOMONIS divisor (d. i. EIJŪB B. SOLEIMĀN, der Erbteiler), deren es bei den Arabern mehrere dieses Namens gab (vgl. P. TANNERY BM $\mathbf{2}_3$, 1901, p. 45, 46 und H. SUTER, ibid. $\mathbf{3}_3$, 1902, p. 350—354). H. SUTER.

2:**249**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200—201. — **2**:**250**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8 S. 82. — **2**:**253**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353.

2:272. Der Zusatz (Z. 12—13): „welches aus jener Übersetzung in allgemeine Benutzung längst eingedrungen war" soll gestrichen werden (vgl. BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 71—72). G. ENESTRÖM.

2:**273**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2**:**274**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2**:**281**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2**:**282, 283**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2**:**284**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 157—158. — **2**:**286, 287, 289, 290, 291**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2**:**296**.

siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354. — **2:304,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 201. — **2:305,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88.

2: 306. Im Rechenbilde am Anfange der Seite findet sich ein Schreibfehler; die Ziffer 2, die durch die Subtraktion 2245 — 3 . 781 erhalten wird, soll nicht unter, sondern vor 6 stehen. Das richtige Bild ist also:

2345 | 2678
781 ——

Borghi sagt selbst (Ausg. Venedig 1560, Bl. 21[a]): „auanzera . 2 . el qual metti apresso le tre figure che separasti, e dira . 2678 .“ G. Eneström.

2: 308. Möglicherweise sind Auszüge aus Paciuolos kürzerem Lehrbuche vom Jahre 1476 noch vorhanden. Es gibt nämlich ein ungedrucktes Rechenbuch von Stefano delli Stefani aus dem Jahre 1522 (jetzt in der Plimptonschen Bibliothek in New York), das zahlreiche Auszüge, die offenbar auf Paciuolo zurückgehen, enthält. Nach Libri sind diese Auszüge nicht aus der *Summa* entnommen („not from the Summa printed in 1494, never quoted by Stefani“), und Libri vermutet, daß die Quelle des Stefani das Lehrbuch vom Jahre 1476 war (siehe E. Narducci, *Catalogo di manoscritti ora posseduti da D. Baldassarre Boncompagni,* ed. 2, Roma 1892, S. 123). Aus welchem Grunde Libri behaupten kann, daß die *Summa* selbst von Stefani nicht benutzt worden ist, habe ich freilich nicht ermitteln können.

Ein ungedrucktes Lehrbuch der Arithmetik, Algebra und Geometrie von Luca Paciuolo in 17 Abteilungen enthält Cod Vatic. 3129 (siehe Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **7**, 1874, S. 259). G. Eneström.

2:313, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2:314,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2:317,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2:318,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 158. — **2:319,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 201—202. — **2:320,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88—89.

2: 320. Die Vermutung, daß das Zeichen + aus dem Buchstaben *p* bei sehr raschem Schreiben entstanden ist, verdient gar keine Beachtung. Aus einer früheren Bemerkung (siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 155—157) geht hervor, daß das Zeichen + bei Widman (1489) ganz einfach „und“ bedeutete, so daß es noch nicht ein rein mathematisches Zeichen war. Nun kommt im Mittelalter ein + ähnliches Zeichen für „et“ vor (vgl., was Herr Cantor S. 231 mitteilt), und dies ist sicherlich der Grund, warum Widman „und“ durch + bezeichnete. Später wurde dies Zeichen ein rein mathematisches Symbol, und man hat nicht den geringsten Anlaß anzunehmen, daß das Pluszeichen auch auf einem zweiten Wege in die Mathematik eingeführt worden ist

G. Eneström.

2:322, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399; **8**$_3$, 1907/8, S. 202—203. — **2:325,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314.

2: 327. Meines Erachtens sollte der folgende Passus (Z. 28—31): „Beide Aufgaben sind unrichtig gelöst, verdienen aber darum nicht weniger Beachtung, da sie das erste bekannte Vorkommen von Wahrscheinlichkeitsaufgaben

in einem Lehrbuche der Rechenkunst darstellen" gestrichen oder wenigstens wesentlich modifiziert werden. Zuerst ist zu bemerken, daß bei PACIUOLO nicht die leiseste Andeutung von Wahrscheinlichkeitsaufgaben vorkommt. Im Gegenteil beziehen sich seine Aufgaben auf Spiele, bei denen die Übung oder Fähigkeit eine mehr oder weniger wichtige Bedeutung hat, z. B. Ballspiel („giocare a palla"), Schießen („balestrare", „giocare a larco"), Wettlaufen („corsa a piede"), Wettrennen („corsa a cavallo"). Um zu zeigen, wie frei Herr CANTOR die erste Aufgabe übersetzt hat, bringe ich hier den Originaltext und die CANTORsche Übersetzung nebeneinander zum Abdruck:

PACIUOLO.	CANTOR.
Una brigata gioca apalla a . 60 . el gioco e . 10 . per caccia . e fanno posta duc . 10 . Acade per certe accidenti che non possano fornire e luna parte a . 50 . e laltra . 20 . se dimanda che tocca per parte de la posta.	Ein Spiel, welches auf 6 gewonnene Punkte gespielt wird, muß in einem Augenblicke unterbrochen werden, in welchem der eine Spieler auf 5, der andere auf 2 steht; wie ist der Einsatz zwischen ihnen zu teilen?

Auf ähnliche Weise sind bei PACIUOLO die übrigen Aufgaben formuliert, und er behandelt sie als Gesellschaftsrechnungen; er betrachtet also die durch die gewonnenen Punkte repräsentierte Übung der Teilnehmer als deren Einsätze.

Aber auch wenn man die Aufgaben als Wahrscheinlichkeitsaufgaben betrachtet, kann man nicht ohne weiteres sagen, daß die Lösungen unrichtig sind, denn die Aufgaben sind in Wirklichkeit unbestimmt. Ziehen wir beispielsweise die soeben abgedruckte Aufgabe in Betracht, so kann diese nicht als Wahrscheinlichkeitsaufgabe gelöst werden, bevor man weiß, wie groß die Wahrscheinlichkeit zu treffen ist, und aus den Angaben kann man höchstens schließen, daß diese Wahrscheinlichkeit für die erste Gruppe von Schützen gleich $\frac{5}{k}$, für die zweite Gruppe gleich $\frac{2}{k}$ ist, wo $k \geqq 5$. Was bei PACIUOLO in erster Linie beanstandet werden sollte, sind nicht die Lösungen, sondern seine Behauptung: „La verita e questa: chio diro e la retta via". Denn unter verschiedenen Annahmen sind verschiedene Lösungen möglich.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 328, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 339,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 351,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 203. — **2 : 360,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314. — **2 : 375,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 75. — **2 : 379,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 81; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 395,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 211. — **2 : 398,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 204; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 158—160. — **2 : 399,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107—108; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 204—205. — **2 : 401, 405,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 89. — **2 : 413, 419,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 205—206.

---

2 : 419. Die Frage, was TZWIVEL mit der „alemannischen Gewohnheit" der Auswischung der Zeichen meint, dürfte ziemlich leicht beantwortet werden können, wenn man das nur vier Jahre früher erschienene *Enchiridion* von

Huswirt gelesen hat; auffälligerweise übergeht Herr Cantor bei seinem Berichte (S. 417—419) über diesen Traktat stillschweigend gerade die zwei Umstände, woraus die Antwort entnommen werden kann, nämlich

1. daß sich im Titel des *Enchiridion* die Worte „sine figurarum (more ytalorum) deletione" finden;
2. daß bei Huswirt Addition, Subtraktion und Multiplikation unterwärts (d. h. wie jetzt) ausgeführt werden.

Die „alemannische Gewohnheit" der Auswischung der Zeichen bedeutet also höchstwahrscheinlich nur das damals in Deutschland allgemein benutzte Überwärtsrechnen im Gegensatz zu dem aus Italien herstammenden Unterwärtsrechnen. Zieht man ferner in Betracht, daß die Rechenbücher von Huswirt und Tzwivel etwa gleichzeitig von demselben Buchdrucker (Heinrich Quentell) in Köln herausgegeben wurden, so liegt es sehr nahe, zu vermuten, daß die Worte „more ytalorum" und „more alemannorum" eine Art von Buchhändlerreklame waren. Huswirts Rechenbuch wandte sich an die Reformfreunde, während Tzwivels Traktat seine Käufer unter die Konservativen zu suchen hatte.

Herr D. E. Smith, der selbst in seinen *Rara arithmetica* (Boston 1908, S. 86) auf die Ähnlichkeit der Titel der zwei fraglichen Rechenbücher hingewiesen hat, ist der Ansicht, daß sich der Ausdruck „per figurarum (more alemannorum) deletionem" auf eine am Anfange des 16. Jahrhunderts in Norddeutschland vorkommende Gewohnheit beziehe, welche darin bestände, daß die Ziffern bei dem Überwärtsrechnen nicht ausgewischt wurden. Diese Erklärung, für welche Herr Smith keinen Beleg bringt, scheint mir unnötigerweise verwickelt. Nach dem Auszug bei Kästner (*Geschichte der Mathematik* **1**, Göttingen 1796, S. 83) gibt Tzwivel ohne weiteres an, daß bei der Addition die Ziffern des oberen Addendus weggewischt werden sollen, obgleich er kein Bild einer Addition mit weggewischtem Addendus bringt. G. Eneström.

2 : 420, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 83, 206. — **2 : 421, 422,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 206. — **2 : 425,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 426,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 427,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 314—315; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 428,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 208; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 160. — **2 : 429,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 201—202; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 208—209. — **2 : 430,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 434,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 160—161. — **2 : 437—438,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 209—210. — **2 : 440,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 441,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 161. — **2 : 442,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 444,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 210.

---

2 : 446. Nicht erst am Ende der Stifelschen Ausgabe von Rudolffs Algebra kommen die befreundenden Zahlen 220 und 284 vor. Schon im Anhange des 2. Kapitels (S. 45 der Ausgabe 1615) weist Stifel nach, daß „alle partes aliquote von 220. machen 284 und wiederumb, alle partes aliquote von 284. so eben machen 220" G. Eneström.

2 : 449, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 452,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 454,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 242.

2 : 457. In der Fußnote soll die Angabe „jetzt Florentiner Codex A" gestrichen und „einer Abschrift des Vallaschen Codex" statt „des Vallaschen Codex" gesetzt werden. Wie Herr Heiberg S. XXI des dritten Bandes seiner

ARCHIMEDESausgabe ausdrücklich hervorhebt, ist die ARCHIMEDEShandschrift GEORG VALLAS durchaus verschollen; die ausführliche Geschichte dieser Handschrift hat Herr HEIBERG übrigens selbst im Philologus **42**, 1883, S. 421—437 erzählt. In der „Biblioteca Laurenziana" findet sich eine ARCHIMEDEShandschrift mit der Signatur XXVIII, 4°, die nach HEIBERG eine sehr gute Abschrift der verschollenen Handschrift VALLAS enthält, und jene Handschrift wird in der HEIBERGschen ARCHIMEDESausgabe mit F bezeichnet. Ist vielleicht in den *Vorlesungen* „Codex A" ein Schreibfehler für „Codex F" und hat Herr CANTOR geglaubt, daß die HEIBERGsche Bezeichnung die wirkliche Signatur der Handschrift sei?

G. ENESTRÖM.

2 : 471, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 161. — **2 : 474,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140—141; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 161.

2 : 474. J'ai sous les yeux le traité *De lateribus et angulis triangulorum* de COPERNIC (Wittemberg 1542) La remarque de VON BRAUNMÜHL (*Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie* **1**, Leipzig 1899, p. 140—141) rapportée par M. ENESTRÖM (BM $\mathbf{9}_3$, 1908, p. 161) est exacte, les variantes du texte du traité *De lateribus* et des chap. 13 et 14 du livre I *De revolutionibus orbium coelestium* sont de peu d'importance. Il est au surplus aisé de s'en assurer, car ces variantes sont toutes données au bas des pages de l'édition *De revolutionibus* de Thorn 1873, où elles sont marquées de la lettre R. Comme le dit encore fort bien VON BRAUNMÜHL, il en est tout autrement des tables des sinus qui diffèrent notablement entre elles, mais je n'ai rien à ajouter à la description qu'il en donne.

H. BOSMANS.

2 : 476, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 75. — **2 : 479—480,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 290—291, 385; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 75.

2 : 480. Die von WALLIS (*A treatise of algebra*, London 1685, S. 32) herrührende Angabe, daß WILLIAM BUCKLEY gegen 1550 starb, ist jetzt als veraltet zu betrachten. Nach dem *Dictionary of national biography, ed. by L. STEPHEN*, Vol. **7** (London 1886) starb BUCKLEY gegen 1570 als Lehrer der Arithmetik und Geometrie am Kings College in Cambridge; W. W. R. BALL (*A history of the study of mathematics at Cambridge*, Cambridge 1889, S. 22) gibt als Todesjahr 1569 an. BUCKLEYS *Arithmetica memorativa* scheint zuerst als Anhang zu SETONS *Logic* gedruckt worden zu sein; D. E. SMITH (*Rara arithmetica*, Boston 1908, S. 252) verzeichnet Auflagen von 1572, 1574, 1577 und 1584 und erwähnt eine ältere Auflage ohne Druckjahr. Nach BALL (a. a. O.) wurde das Rechenbuch in der zweiten Auflage von LESLIES *Philosophy of arithmetic* (Edinburg 1820) wieder abgedruckt.

Warum Herr CANTOR über BUCKLEYS Verfahren bei Ausziehung von Quadratwurzeln berichtet und dann: „Wir wissen, daß TONSTALL Ähnliches lehrte" hinzufügt, ist mir nicht recht verständlich; bekanntlich war dasselbe Verfahren schon viele hundert Jahre vor BUCKLEY und TONSTALL benutzt worden (vgl. z. B. den Traktat *De pratica arismetrice*, ed. B. BONCOMPAGNI, Roma 1857, S. 86—90).

G. ENESTRÖM.

2 : 481, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 83. — **2 : 482**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 508; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 240; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401. — **2 : 483**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 291. — **2 : 484**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 490**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2 : 497**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 87; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2 : 503, 505**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292. — **2 : 506, 507**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 162—163. — **2 : 509**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 524**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 90. — **2 : 527**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 529**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91. — **2 : 530**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354—355; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 531**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212. — **2 : 532**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 292; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 163—164. — **2 : 535**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 536**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 539**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 293.

---

2 : 539. Herr N. L. W. A. Gravelaar hat kürzlich in seiner Abhandlung *Cardano's Transmutatiemethoden* (Nieuw archief voor wiskunde $\mathbf{8}_2$, Amsterdam 1909, S. 433—434) darauf hingewiesen, daß zwei Sätze über die Anzahl der positiven Wurzeln einer Gleichung schon in der *Ars magna* Cardanos (Kap. I § 14, S. 12 der Ausgabe Basel 1570) vorkommen. Hier betont Cardano ausdrücklich, daß der erste Satz für Gleichungen beliebig hohen Grades gültig ist. Die zwei Sätze sind nach unserer Ausdrucksweise:

1. Wenn $x^n + a_n = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x$, so gibt es zwei positive Wurzeln;
2. Wenn $x^3 + a_2 x = a_1 x^2 + a_3$, so kann es drei positive Wurzeln geben.

Daß der erste Satz nicht allgemein gültig ist, hätte Cardano freilich schon aus dem einfachen Beispiele $x^2 + 2 = 2x$ ersehen können.

G. Eneström.

---

2 : 541, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 509. — **2 : 547**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 84. — **2 : 548**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 549**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 554**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 322. — **2 : 558**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 76. — **2 : 561**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 285. — **2 : 566**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85. — **2 : 567, 568**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 569**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 207; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 85—86. — **2 : 582**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 593**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 594**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 270—271; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S 211. — **2 : 605**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86. — **2 : 610**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 388. — **2 : 611**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 612—613**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 306; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620**, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 214, 389; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 86—87; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 77. — **2 : 622**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87. — **2 : 623**, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 277; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626**, siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 389—390. — **2 : 632**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147. — **2 : 639**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 77.

2: 641. Das hier nach KÄSTNER erwähnte Rechenbuch HELMREICHS erschien zum erstenmal in Eisleben 1561 (112 Bl.; siehe D. E. SMITH, *Rara arithmetica,* Boston 1908, S. 303). Die Ausgabe Leipzig 1595 ([20] + 627 S.) war eine dritte, wesentlich vermehrte Auflage. G. ENESTRÖM.

---

2 : 642, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 271. — **2 : 666,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 88—89; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 164—165. — **2 : 667,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 669,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 403; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 687,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 391; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 89.

---

2 : 689. Die Angabe (Z. 11—12): „Ob noch durch HULSIUS selbst oder schon durch seine Witwe verlegt, ist auf dem Titel nicht angegeben" (vgl. BM 7_3, 1906/7, S. 391) ist unrichtig, wie aus dem folgenden Abdruck des Titels des fraglichen 4. Traktates von HULSIUS hervorgeht:

> Vierdter Tractat || Der Mechanischen Instrumenten || LEVINI HVLSII. || Gründtliche Beschrei= || bung deß Dienstha fften vnnd Nutzbahrn || Instruments Viatorii oder Wegzählers/ So zu Fuß/ zu || Pferdt vnnd zu Gutzen gebraucht werden kan/ damit mit geringer || mühe zu wissen/ wie weit man gegangen/ geritten oder gefahren sey: als auch || zu erfahren/ ohne messen oder zehlen/ wie weit von einem Orth zum andern. || Daneben wird auch der grosse verborgene Weg= || weiser angezeigt vnd vermeldt. || [Abbildung des Instrumentes.] Gedruckt zu Franckfurt am Mayn bey Wolffgang || Richtern/ In verlegung deß Authorn. || *M. D. V.*
> 4°, 23 S.

Das Widmungsschreiben ist vom $\frac{1.}{11.}$ August 1604 datiert. Vermutlich hat Herr CANTOR kein Exemplar des Traktates gesehen, sondern ohne weiteres die Angabe von KÄSTNER: „Sonst keine Nachricht wegen der Verlegung des Authorn" benutzt, obgleich diese Angabe schon auf Grund der vorangehenden Notiz bei KÄSTNER (siehe BM 7_3, 1906/7, S 391) höchst verdächtig sein muß.

Nachträglich bringe ich hier zum Abdruck auch den vollständigen Titel der Originalausgabe des 3. Traktates (vgl. BM 7_3, 1906/7, S. 391).

> Dritter Tractat || Der Mechanischen Instrumenten || LEVINI HVLSII. || Beschreibung vnd Vn= || terricht deß Jobst Burgi Proportional || Circkels/ dardurch mit sonderlichem vortheil ein jeg= || liche Rechte oder Circkel lini/ alle fläche/ Landcarte/ augenschei= || nen/ Vestungen/ Gebew/ ein Kugel mit den fünff regularibus, auch || alle irregularia corpora, &c. bequemlich können zertheilt/ zer= || schnitten/ verwandelt/ vergrössert vnd verjüngert || werden. Niemals zuvorn in || Truck geben. [Abbildung des Proportionalzirkels.] Franckfurt. || Mit Röm. Kay May. Freyheit. In Verlegung || Leuini Hulsij. M. DC IIII.
> 4°, 29 S.

Das Widmungsschreiben ist vom $\frac{10.}{20.}$ Mai 1603 datiert. G. ENESTRÖM.

2 : 698, siehe BM 4_3, 1903, S. 287; 7_3, 1906/7, S. 394—395. — **2 : 699,** siehe BM 9_3, 1908/9, S. 165—166. — **2 : 700, 701,** siehe BM 1_3, 1900, S. 271. — **2 : 703,** siehe BM 1_3, 1900, S. 271—272; 8_3, 1907/8, S. 212. — **2 : 704, 705,** siehe BM 1_3, 1900, S. 272—273. — **2 : 712,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 212—213.

---

2 : 713. Der Streit zwischen Pell und Longomontanus begann schon 1644 durch ein Flugblatt, das jener in Amsterdam drucken ließ. Dieses Blatt ist von besonderem Interesse, weil hier, soweit bekannt, die Formel $\operatorname{tg} 2A = \frac{2 \operatorname{tg} A}{1 - \operatorname{tg}^2 A}$ zum erstenmal aufgestellt ist. Pell widerlegte nämlich Longomontanus durch den Nachweis, daß der Umfang des umbeschriebenen regulären 256-Ecks kleiner als $3 \cdot 14176$ ist, woraus natürlich folgt, daß π noch kleiner sein muß, und für diesen Zweck benutzte er seine Formel. Beweise der Formel wurden dann von Roberval, Th. Hobbes, Carcavy, Ch. Cavendysh, Pallieur, J. L. Wolzogen, Cavalieri, Mydorge und J. Golius gegeben (siehe *Controversiae de vera circuli mensura anno CIϽ IϽ C XLIV exortae,* Amsterdam 1647, S. 13—14, 48—60, 90—96). Wenn also Herr Cantor bemerkt, daß der Streit zu einem eigentlichen Ergebnisse nicht führte, so ist diese Bemerkung insofern richtig, als Longomontanus nicht überzeugt wurde, daß seine Kreisberechnung unrichtig war; anderseits kann als ein wirkliches Ergebnis betrachtet werden, daß während des Streites eine wichtige trigonometrische Formel von Pell aufgestellt und von verschiedenen Mathematikern bewiesen wurde.

G. Eneström.

---

2 : 714, siehe BM 8_3, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 715,** siehe BM 5_3, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM 6_3, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM 2_3, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM 4_3, 1903, S. 287; 6_3, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM 1_3, 1900, S. 273; 6_3, 1905, S. 404—405. — **2 : 726,** siehe BM 8_3, 1907/8, S. 90. — **2 : 727,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM 7_3, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM 1_3, 1900, S. 273; 3_3, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM 1_3, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM 1_3, 1900, S. 173; 2_3, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM 4_3, 1903, S. 88.

---

2 : 753—754. Von den vier Anwendungen des *Traité du triangle arithmétique* erwähnt Cantor die erste und zweite S. 752, die dritte S. 756, dagegen die vierte überhaupt nicht. Diese hat den Titel: *Usage du triangle arithmétique pour trouver les puissances des binômes et apotomes.* Es wird darin $(A + 1)^4$ und einige andere Beispiele entwickelt.

Pascal wußte also, daß die figurierten Zahlen mit den Binomial-Koeffizienten identisch sind. Anderseits kannte er die multiplikative Entstehung der figurierten Zahlen, d. h. er kannte dem Sinne nach die Formel $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$. Hierüber berichtet Cantor S. 752; sein S. 754 geäußertes Bedenken kann allerdings den Leser zu der Meinung führen, als habe Pascal diese Formel nicht gekannt.

Pascal hat aber die multiplikative Entstehung der Binomial-Koeffizienten nicht besonders betont. In dem soeben erwähnten kurzen Kapitel über die „puissances des binômes et apotomes“ entnimmt er die Binomial-Koeffizienten einfach seinem arithmetischen Dreieck, und dies ist ja nach seiner Definition durch sukzessive Addition entstanden.

G. Junge.

---

2 : 758. Die unbelegte Behauptung (Z. 7—8), daß bei Buckley jeder neue Buchstabe eine neue Zeile beginnt und in derselben hinter alle bereits gebildeten Formen tritt, ist sehr auffällig. Nach Wallis (*A treatise of algebra*, London 1685, S. 32) war Buckleys kurze *Arithmetica memorativa* in Versen geschrieben, und Wallis, der die hier vorkommenden sehr dunkeln Memorialverse erläutert hat (siehe *A discourse of combinations, alternations and aliquot parts*, London 1685, S. 114), sagt gar nichts über das Vorkommen von geordneten Buchstabenreihen nach den Versen:

Quot fuerint numeri, quos combinare velimus:
Tot sint et series, quibus est proportio dupla;
Quartum principium ducatur semper ab uno.
Omnes has series conjunge per additionem.
Producto, numerum quot combinatio constat,
Aufer. Quod superest, numerum citat . . .

Ebensowenig tut Herr Cantor selbst dieses Umstandes Erwähnung, als er S. 480 über die Kombinatorik bei Buckley berichtet. Der Passus: „beiläufig bemerkt genau das gleiche Verfahren, welches Buckley (S. 480) einhielt“ sollte also entweder gestrichen oder belegt werden.

G. Eneström.

---

2 : 763, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 166. — **2 : 765,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 773,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 213; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 167. — **2 : 775,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 358—359 — **2 : 777,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 204. — **2 : 780,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 78, 167. — **2 : 783,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393.

2 : 790. Hier sollte Z. 17 das ganz unnötigerweise irreführende Wort „ausschließlich“ gestrichen oder modifiziert werden. Schon aus dem in der Fußnote 1 erwähnten Artikel von Zach kann man folgern, daß Harriot als Mathematiker nicht ausschließlich durch sein 1631 veröffentlichtes posthumes Werk bekannt ist, und in der Tat schrieb Briggs 6 Jahre vor dieser Veröffentlichung an Kepler: „Cum doctissimus vir et geometra, Thomas Hariottus, longe peritissimus, invenerit modum metiendi angulum quemlibet solidum . . .“ (Kepler, *Opera omnia*, ed. Chr. Frisch **4**, Frankfurt 1863, S. 661).

Über die acht Manuskriptbände von Harriot im British museum in London hat G. Vacca 1902 Auskunft gegeben (siehe die frühere Bemerkung zu S. 790, BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393).

G. Eneström.

---

2 : 791, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S 307; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S 208. — **2 : 812,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148.

2 : 827. Die Bemerkung: „oder mit anderen Worten: Kepler hat hier die erste inverse Tangentenaufgabe gestellt“ sollte meines Erachtens gestrichen werden, weil sie einen rein elementaren mathematisch-historischen Fehler enthält. Bekanntlich ist „inverse Tangentenaufgabe“ ein aus dem 17. Jahrhundert herstammender Term mit ganz besonderer Bedeutung: es handelt sich bei diesen Aufgaben um die Bestimmung einer Kurve, deren Tangente für jeden Punkt der Kurve eine gewisse Eigenschaft hat, und analytisch führt eine solche Aufgabe auf eine Differentialgleichung von der Form $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$. Aber das von Kepler gestellte Problem ist von ganz anderer Art (vgl. P. Tannery, Verhandlungen des Mathematiker-Kongresses in Heidelberg 1904, Leipzig 1905, S. 503); es handelt sich um die Konstruktion eines Kegelschnittes, der eine gegebene Gerade in einem bestimmten Punkt berührt, und dessen Achse mit einer zweiten Geraden zusammenfällt. Ist beispielsweise der Kegelschnitt eine Parabel und nimmt man als X-Achse die zweite Gerade, als Origo ihren Schnittpunkt mit der ersten Geraden; sind ferner die Koordinaten des gegebenen Punktes m, n, und setzt man die Gleichung der Parabel unter die Form $y^2 = 2\alpha(x - \beta)$, so hat man offenbar, um die Größen α und β zu bestimmen (eigentlich sucht Kepler nur β)

$$n^2 = 2\alpha(m - \beta), \quad \Big/^{x=m} \frac{dy}{dx} = \frac{n}{m} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha}{n} = \frac{n}{m}, \quad \text{woraus } \beta = \frac{m}{2},$$

so daß es sich nach der Terminologie des 17. Jahrhunderts um eine direkte Tangentenaufgabe handelt.

Aber auch wenn man zugeben wollte, daß hier die irreführende Benennung „inverse Tangentenaufgabe“ benutzt werden könnte, so ist die Cantorsche Bemerkung doch unrichtig, denn Kepler ist gewiß nicht der erste, der eine Aufgabe der fraglichen Art direkter Tangentenaufgaben gestellt hat. Beispielsweise hat schon Euklides (Elemente 4 : 4) einen Kreis bestimmt, indem er von drei gegebenen Berührungslinien den Ausgang der Untersuchung genommen hat.

G. Eneström.

2 : 830. An der Stelle, wo Cantor über die Keplersche Auswertung des Integrals $\int_0^\varphi \sin\varphi \cdot d\varphi = 1 - \cos\varphi$ spricht, ist der Satz unrichtig, daß die Summe der Sinus aller Winkel von 0 bis φ identisch sei mit $\int_0^\varphi \sin\varphi \cdot d\varphi$. Dementsprechend ist auch der weiter unten folgende Satz: „Entnimmt man $\sin 1^0$, $\sin 2^0 \ldots \sin 90^0$ den Sinustafeln und bildet ihre Summe, so entsteht 1, bzw. $1 - \cos\varphi$“ unrichtig. Bekanntlich ist $\sin 1^0 + \sin 2^0 + \sin 3^0 + \cdots + \sin\varphi^0 = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cdot\sin\left(\frac{\varphi+1}{2}\right)}{\sin\frac{1}{2}{}^0}$ und speziell: $\sin 1^0 + \sin 2^0 + \sin 3^0 + \cdots + \sin 90^0 = \frac{1}{2}\cot 30' + \frac{1}{2} = 57{,}794\cdots$ Herr Cantor hat sich hier wahrscheinlich durch die ebenfalls unrichtige Behauptung S. Günthers (BM 2_2, 1888, p. 84) verleiten lassen, daß $\sum_{p=0}^{p=89} \sin(1+p)$ von sin vers. $90^0 = 100\,000$ (bzw. $= 1$) nicht allzuviel verschieden sei. Nicht diese Summe ist nahezu

gleich sin vers. $90^0 = 1$, sondern das Produkt $\frac{\pi}{180}\sum_{\varphi=0}^{\varphi=90} \sin\varphi$, wo eben der kleine, aber noch endliche Faktor $\frac{\pi}{180}$ die Stelle des unendlich kleinen $d\varphi$ im Integral vertritt.

H. SUTER.

---

2 : 832, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 203—204; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 109—110. — **2 : 856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2 : 876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2 : 897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2 : 898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2 : 901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2 : 911,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 78—79. — **2 : 919,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512. — **3 : 18,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 168. — **3 : 22,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 297—298; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 91. — **3 : 24,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 209, 399; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 168. — **3 : 26,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 359; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 37,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 63,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 299.

---

3 : 68. Es ist auffällig, wie schwer es zuweilen ist, aus den *Vorlesungen* recht einfache bibliographische Aufschlüsse über wichtige mathematische Schriften zu bekommen; als Beleg hierfür kann die bekannte NEWTONsche Abhandlung *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas* dienen. Nach dem Register wird diese Abhandlung zum erstenmal S. 68 erwähnt, und daselbst wird bemerkt, teils daß sie schon 1669 handschriftlich fertig war, teils daß „ein Abdruck des Originals 1744 durch Castillion in den *Opuscula Newtonis* (!) I, 3—28 veranstaltet" wurde. Daß die Abhandlung weit früher erschienen ist, wird an dieser Stelle nur in der Fußnote 2 durch den Verweis auf S. 54—75 des *Commercium epistolicum* angedeutet, und jedenfalls wird das Druckjahr der Originalausgabe nicht angegeben. Ebensowenig ist es mir gelungen, diese Angabe S. 69, 71—75, 84, 105—107, 109, 119, 156—160, 165, 169, 182, 191, 207, 280, 302, wo die *Analysis* nach dem Register erwähnt wird, aufzufinden. Setze ich meine Nachforschungen auf Grund des Registers fort, so finde ich freilich S. 306, wo Herr CANTOR eine Notiz über WILLIAM JONES bringt, im Vorübergehen bemerkt, daß dieser 1711 NEWTONS *Analysis per aequationes* zum Druck befördert hatte, und S. 310 wird diese Bemerkung wiederholt. Daß die fragliche Angabe auch S. 279 steht, kann ich aus dem Register nicht erkennen, denn diese Seite wird nicht unter dem Stichwort: NEWTONS *Analysis per aequationes* erwähnt. In betreff einer Arbeit, die sicherlich von den meisten Besitzern in erster Linie als Nachschlagebuch angewandt wird, dürfte eine solche Anordnung nicht zu empfehlen sein.

Die Originalausgabe der NEWTONschen Abhandlung erschien in einem dünnen Sammelbande mit dem Titel: *Analysis per quantitatum series, fluxiones ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis.* Nach einem Vor-

wort von W. Jones folgen: 1. „De analysi per aequationes numero terminorum infinitas"; 2. „Excerpta ex epistolis d. Newtoni ad methodum fluxionum et serierum infinitarum spectantibus [Briefe an Oldenburg vom 13. Juni und 24. Oktober 1676, an Wallis von 1692 und an Collins vom 8 November 1676]"; 3. „Tractatus de quadratura curvarum"; 4. „Enumeratio linearum tertii ordinis"; 5. „Methodus differentialis". Die Traktate 3 und 4 waren bekanntlich schon 1704 veröffentlicht; von den vier Briefen waren die drei ersten schon früher von Wallis herausgegeben (*Opera mathematica* **3**, Oxoniae 1699, S. 622—629, 634—645; **2**, Oxoniae 1693, S. 393—396). Neu waren also die „Analysis", die „Methodus differentialis" und der kurze Brief an Collins.

Nach G. J. Gray (*A bibliography of the works of sir Isaac Newton*, sec. ed., Cambridge 1907, S. 59) gibt es Exemplare des Sammelbandes mit dem Druckjahr MDCCXII. Wie Herr Cantor S. 68 durch die Fußnote 2 andeutet, wurde die „Analysis" 1712 nach einer Abschrift Collins' im *Commercium epistolicum de analysi promota* veröffentlicht. Eine neue Auflage des Sammelbandes von 1711 erschien 1723 mit besonderem Titelblatt als Anhang zur Ausgabe Amsterdam 1723 der *Principia*. G. Eneström.

---

3 : 70, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360.

---

3 : 70. Die Stelle im zweiten Bande der *Vorlesungen*, wo gezeigt wird, wie Pascal sich die figurierten Zahlen durch Multiplikationen verschafft, ist S. 752 und nicht S. 782. Außerdem siehe die Bemerkung zu **2** : 753—754 (oben S. 254). G. Junge.

---

3 : 78, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92. — **3 : 82,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 97,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149; **7**$_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S 318; **7**$_3$, 1906/7, S. 300; **9**$_3$, 1908/9, S. 169. — **3 : 112,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210; **6**$_3$, 1905, S. 318.

---

3 : 113. Tschirnhaus ist nicht der erste, der versucht hat, jede Gleichung durch Wegschaffung aller Zwischenglieder zu lösen. Im Jahre 1667 veröffentlichte ein sonst wenig bekannter französischer Mathematiker François Dulaurens (ein Freund von Frénicle de Bessy) eine Schrift mit dem Titel *Specimina mathematica duobus libris comprehensa* (Parisiis, Apud Carolum Savreux . . CIↃ. IↃC. LXVII, (16) + 255 + (1) S. 4°), in deren Einleitung (Bl. b 1ª) er andeutet, daß er eine allgemeine Methode besitze, die Zwischenglieder einer Gleichung wegzuschaffen. Freilich wird diese Methode nicht in der Schrift auseinandergesetzt, sondern am Anfange des 5. Kapitels des 2. Buches („De natura aequationum plures quam quatuor dimensiones habentium et de illarum solutione") bemerkt Dulaurens (S 222): „Quamvis locus esset, generalem aequationum supra quartum gradum evectarum constitutionem exponere, non fert animus, neque enim hic omnia dicere decrevi"; dann beschränkt er sich auf die Lösung gewisser einfacherer Gleichungen höherer Grade. Erst am Ende der Schrift bringt er (S. 247—248) eine „Methodus universalis aufferendi unum quemlibet terminum primo excepto è quavis aequatione proposita", und zwar ist seine Methode die gewöhnliche, $x = y + k$ zu setzen und k so zu be-

stimmen, daß der gewünschte Term in Fortfall kommt. Wie zwei oder mehrere Terme weggeschafft werden können, sagt er nicht.

Kurze Zeit nach DULAURENS beschäftigte sich auch JAMES GREGORY mit der Wegschaffung aller Zwischenglieder aus einer Gleichung. Nach einer Mitteilung von OLDENBURG an LEIBNIZ vom 26. Juli 1676 (siehe C. I. GERHARDT, *Der Briefwechsel von G. W. LEIBNIZ mit Mathematikern* **1**, Berlin 1899, S. 173) hat GREGORY die Frage in zwei Briefen an COLLINS vom 17. Januar 1672 und 26. Mai 1675 berührt. In dem ersten Briefe gibt er an, daß er, um aus einer Gleichung 5. Grades alle Zwischenglieder wegzuschaffen, eine Gleichung 20. (Druckfehler für 24.?) Grades lösen mußte; aus dem zweiten Briefe scheint hervorzugehen, daß GREGORY 1675 wirklich glaubte, eine Methode für den fraglichen Zweck entdeckt zu haben, denn nach COLLINS schrieb er: „se ipsum posse illam [d. h. aequationem arbitrariam] elevando, tollere omnes terminos intermedios, quod (quantum ipsi constaret) orbem eruditum hactenus latuerit." Vermutlich ist das Wort „elevando" so zu deuten, daß GREGORY $x = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots$ setzte und dann durch Potenzerhebung x^2, x^3, ... als Funktionen von y ausdrückte; möglicherweise handelte es sich um eine Art von Elimination etwa wie bei TSCHIRNHAUS.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 116, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 518.

---

3 : 117. Herr CANTOR scheint in LEIBNIZ einen Vorgänger von ABEL betreffs der Unlösbarkeit der Gleichung fünften Grades durch Radikale zu sehen (vgl. auch was Herr CANTOR S. 575 Z. 18—20 in betreff der Ansichten LEIBNIZens und EULERS bemerkt). Er stützt sich auf einen Brief von LEIBNIZ an TSCHIRNHAUS (*Briefwechsel von GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ mit Mathematikern,* herausg. von C. I. GERHARDT, Bd. **1**, Berlin 1899, S. 403). Wie mir scheint, wendet sich LEIBNIZ hier nur gegen die Methode von TSCHIRNHAUS. Wenn er sagt „ejusque rei videor mihi habere demonstrationem", so will er wohl damit nur ausdrücken, daß er einen Beweis für die Unzulänglichkeit des TSCHIRNHAUSenschen Verfahrens zu haben glaubt. In einem späteren Brief von LEIBNIZ an TSCHIRNHAUS (a. a. O. S. 449) heißt es nämlich: „Die Methodum pro radicibus aequationum, die Mhhr. in Actis publicirt, habe gesehen. Ich wollte, daß es Mhhr. nur im ersten grade, den wir noch nicht haben, nehmlich in 5to, probirt hette, denn es werden sich schwehrigkeit finden nicht nur ob prolixitatem calculi, welche per suppositas literas loco prolixarum formularum zu superiren, sondern auch ratione ipsius methodi. Summa ich sehe noch bey weiten nicht demonstrationem successus. Ich habe unterschiedliche wege, darinn ich demonstrationem successus zu finden vermeine, in specie indem ich annehme eine aequationem, quae cum data unam habet radicem communem, welche radicem communem ich suche ea methodo qua alias communem divisorem quaerimus, und komme dadurch ad aequationes tractabiliores." Noch deutlicher aber sieht man aus dem Entwurf zu diesem Brief (a. a. O. S. 447 u. 448), daß sich LEIBNIZ nur gegen die Methode von TSCHIRNHAUS wendet, bei der er die Benützung einer Hilfsgleichung vierten Grades beanstandet. An der Möglichkeit der Lösbarkeit der Gleichung fünften Grades hat LEIBNIZ nicht gezweifelt. Der fragliche Briefentwurf beginnt mit dem Passus, daß LEIBNIZ die Acta eruditorum erhalten habe, „darin ich auch

M. Hrn. Methodum inveniendi radices sehe; ich habe auch einen andern und sehr wunderlichen weg, welchen in tota Algebra von großer importanz zu seyn achte, und dadurch ich auch gleich zu einer progression gelange, und den calculum abschneide. Nehmlich es ist eine aequation gegeben als 0 aeq $x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, die soll man solviren.“ Mit Hilfe einer weiteren Gleichung fünften Grades glaubt LEIBNIZ dazu gelangen zu können, „daß darauß eine aequatio pura wird, so per solam extractionem radicis kan solvirt werden“. Man vgl. auch a. a. O. S. 314—316. Ich möchte noch bemerken, daß auch FOURIER in seiner *Analyse des équations déterminées* (deutsche Ausg. von A. LOEWY in OSTWALDS *Klassikern der exacten Wissenschaften*, S. 7) von LEIBNIZ annimmt, daß er eine Auflösung der Gleichung fünften Grades gesucht habe. Er sagt: „Die Anschauungen von LEIBNIZ und TSCHIRNHAUSEN über diese Art von Fragen haben sich nicht realisieren lassen.“

Freiburg i. B. ALFRED LOEWY.

---

3 : 118, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3 : 122,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 399; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 407—408; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326. — **3 : 167, 172—173,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 241. — **3 : 201,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150.

---

3 : 215. Die Art, wie Herr CANTOR über LEIBNIZ' Abhandlung *Nova calculi differentialis applicatio et usus ad multiplicem linearum constructionem ex data tangentium conditione* berichtet, ist für die Darstellungsweise der *Vorlesungen* kennzeichnend. Diese Weise besteht darin, daß man, wenn der Bericht über den wesentlichen Inhalt einer Abhandlung einen gewissen Grad mathematischer Gedankenarbeit erfordern würde, von diesem Inhalt absieht und, um dennoch etwas über die Abhandlung mitzuteilen, ein darin behandeltes leichteres Problem erwähnt. Das von Herrn CANTOR in diesem Falle erwähnte Problem ist die Bestimmung der Enveloppe einer Schar von Kreisen. Aber schon aus dem Titel der LEIBNIZschen Abhandlung geht hervor, daß der Hauptgegenstand derselben der „umgekehrten Tangentenmethode“ gehört, und für LEIBNIZ ist die Lösung des von Herrn CANTOR erwähnten Problems nur ein Mittel, um das folgende Problem erledigen zu können: „Die Gleichung einer Kurve zu finden, wenn in jedem Punkt C der Kurve die Normale PC und das Stück AP der X-Achse zwischen dem Origo A und der Normalen durch die Gleichung $PC^2 = a \cdot AP$ verbunden sind.“ Nun ist ja, wenn x, y die Koordinaten der gesuchten Kurve sind,

$$PC = y\sqrt{1 + y'^2}, \quad AP = x + yy',$$

so daß die Lösung des LEIBNIZschen Problems tatsächlich mit der Integration der nicht linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$y^2(1 + y'^2) = a\,(x + yy')$$

identisch ist, obgleich LEIBNIZ selbst nicht die Differentialgleichung angibt. Um das Problem zu lösen, betrachtet LEIBNIZ die gesuchte Kurve als die Enveloppe der Kreise

$$(X-b)^2+Y^2=c^2, \text{ wo } PC=c,\ AP=b,$$

setzt statt c^2 seinen Wert ab ein und verfährt dann auf die von Herrn Cantor angegebene Weise; die Parabel $y^2=ax+\frac{a^2}{4}$ ist die gesuchte Kurve. Leibniz hat also tatsächlich durch Differentiation das singuläre Integral $y^2=ax+\frac{a^2}{4}$ der Differentialgleichung $y^2(1+y'^2)=a(x+yy')$ ermittelt. Sein Gedankengang könnte von unserem Standpunkte aus auf folgende Weise wiedergegeben werden.

Man differentiiert die Differentialgleichung und bekommt dadurch

$$2yy'+2yy'^3+2y^2y'y''=a(1+y'^2+yy'')$$

oder

$$2yy'(1+y'^2+yy'')=a(1+y'^2+yy'').$$

Nach Division mit $1+y'^2+yy''$ wird also

$$2yy'=a \text{ oder } yy'=\frac{a}{2},$$

und setzt man diesen Wert von yy' in die gegebene Differentialgleichung ein, so bekommt man sofort

$$y^2+\frac{a^2}{4}=a\left(x+\frac{a}{2}\right) \text{ oder } y^2=ax+\frac{a^2}{4}.$$

Leibniz behauptet, daß sein Verfahren für jede Relation zwischen PC und AP anwendbar sei, und dies kann leicht auf dem von mir eingeschlagenen Wege nachgewiesen werden. Ist nämlich die gegebene Relation zwischen PC und AP

$$f(PC,\ AP)=0,$$

so folgt daraus wegen $PC=y\sqrt{1+y'^2}$, $AP=x+yy'$

$$f_1(y^2(1+y'^2),\ x+yy')=0,$$

und da

$$\frac{d}{dx}[y^2(1+y'^2)]=2yy'(1+y'^2+yy''),\ \frac{d}{dx}(x+yy')=1+y'^2+yy'',$$

so bekommt man durch Differentiation der Gleichung $f_1=0$ ein Resultat von der Form

$$F(x,y,y')\,[1+y'^2+yy'']=0$$

oder nach Division mit $1+y'^2+yy''$

$$F(x,y,y')=0.$$

Eliminiert man endlich y' zwischen dieser Gleichung und $f_1=0$, erhält man die gesuchte Gleichung zwischen x und y.

Leibniz behauptet auch, daß seine Methode auf zwei Probleme anwendbar sei, die bzw. der Integration der Gleichungen

$$\varphi\left(\frac{y-xy'}{y'},\ y-xy'\right)=0,\ \Phi\left(x+yy',\frac{x+yy'}{y'}\right)=0$$

entsprechen. Die erste Behauptung ist offenbar richtig, weil es sich um eine Clairautsche Gleichung handelt. In betreff des zweiten Problems weist Leibniz nach, daß man die Evolute der gesuchten Kurve durch seine Methode bestimmen kann, und folgert daraus, daß auch die Kurve selbst ermittelt werden

könne. Aber die Folgerung ist nicht stichhaltig, und, abgesehen von gewissen einfacheren Spezialfällen, dürfte es nicht möglich sein, die Gleichung $\Phi = 0$ durch Differentiation zu integrieren, da das Resultat nicht von der Form

$$F_1(x, y, y') \cdot F_2(x, y, y', y'') = 0$$

wird.

Ein mit dem Leibnizschen im wesentlichen übereinstimmendes Verfahren, um die Gleichung der Kurve zu finden, für welche PC eine gegebene Funktion von AP ist, hat Johann Bernoulli in seinen *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque* (siehe Opera omnia III, Lausanne 1742, S. 431) angegeben, also vermutlich unabhängig von Leibniz. Eine ähnliche Lösung des Problems von Jakob Bernoulli findet sich in den Acta eruditorum 1694, S. 391.

G. Eneström.

---

3 : 218, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326. — **3 : 224**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225**, **228**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 150. — **3 : 230**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **6**$_3$, 1905, S. 212; **7**$_3$, 1906/7, S. 303; **8**$_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 244—245**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 205, 413; **7**$_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514; **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 514. — **3 : 270**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 303**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 364**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 367**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319. — **3 : 397**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 305—306; **8**$_3$, 1907/8, S. 94—95.

---

3 : 406. Herr Cantor sagt in bezug auf die Newtonschen Formeln, welche die Summe der 1., der 2., der 3., der 4. Potenzen der Gleichungswurzeln mit Hilfe der Gleichungskoeffizienten berechnen lassen, „es sind genau die gleichen Ergebnisse, zu welchen Albert Girard gelangt war, nur daß sie bei Newton etwas weniger durchsichtig geschrieben sind". Präziser dürfte sich das Verhältnis vielleicht so ausdrücken: „Newton gibt implizite, Girard explizite Formeln. Die letzteren, welche die ersten Fälle ($n = 1, 2, 3, 4$) des für beliebiges n von Waring gefundenen Formelsystems (vgl. Saalschütz, Biblioth. Mathem. **9**$_3$, 1908, S. 65) darstellen, sind die Auflösung der Newtonschen Formeln nach den Potenzsummen".

Freiburg i. B. Alfred Loewy.

---

3 : 408, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 306. — **3 : 427**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 169. — **3 : 447**, **455**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151. — **3 : 473**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 476**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 169—170. — **3 : 477**, **479**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 95. — **3 : 497**, **498**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72. — **3 : 521**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 327; **5**$_3$, 1904, S. 72; **9**$_3$, 1908/9, S. 170.

3 : 575. Wie wenig angebracht es ist zu sagen, daß LEIBNIZ in betreff der Lösbarkeit der Gleichungen höherer Grade „richtig in die Zukunft zu schauen gewußt hat", geht aus der folgenden Stelle des Briefes LEIBNIZens an CHR. WOLFF vom 20. August 1705 hervor (siehe *Briefwechsel zwischen* LEIBNIZ *und* CHRISTIAN WOLF, herausg. von C. I. GERHARDT, Halle 1860, S. 34): „In communi Algebra nondum habetur modus ab affectis aequationibus transeundi ad puras seu ex omnibus aequationibus eliciendi radices irrationales. Habetur quidem res in gradu 2do, 3tio et 4to, sed nondum in 5to et altioribus, quanquam ego aditum quendam aperuerim ibi quoque, sed nondum extantem in iis quae publicavi, multa enim supprimo, quia digerere non vacat."

G. ENESTRÖM.

3 : 578, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S 307. — **3 : 586,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 598,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 214. — **3 : 609,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308. — **3 : 614—615,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 616,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408.

3 : 616. Über befreundete Zahlen hatte EULER schon in den Nova acta eruditorum 1747 (S. 267—269) einen kurzen Artikel veröffentlicht, der am Ende eine Tafel von 30 Paaren befreundeter Zahlen enthält (vgl. die folgende Bemerkung).

G. ENESTRÖM.

3 : 617. Von den 61 Paaren befreundeter Zahlen, die EULER in seiner Abhandlung von 1750 verzeichnet, ist offenbar eins unrichtig, nämlich Nr XLIII ($2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173$ und $2^3 \cdot 57 \cdot 2609$), denn EULER gibt überall die Primfaktoren der Zahlen an, und 57 ist $= 3 \cdot 19$. Ohne Zweifel liegt hier ein einfacher Druckfehler (57 statt 47) vor, denn die Tafel des kurzen Artikels von 1747 (siehe die vorangehende Bemerkung) enthält als Nr. XXVIII die zwei Zahlen $2^3 \cdot 47 \cdot 2609$ und $2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173$ Wären die beiden Angaben richtig, so würde laut der Formel $\int m = \int n = m + n$ die Divisorensumme der Zahl $2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173$ einerseits $= 2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173 + 2^3 \cdot 57 \cdot 2609$, anderseits $= 2^3 \cdot 11 \cdot 59 \cdot 173 + 2^3 \cdot 47 \cdot 2609$ sein, was unmöglich ist. Von den 61 Paaren der Abhandlung im 2. Bande der *Opuscula varii argumenti* sind also höchstens 60 richtig, aber dazu kommen noch vier Paare aus dem Artikel von 1747, nämlich die Nummern VIII ($2^2 \cdot 5 \cdot 131$ und $2^2 \cdot 17 \cdot 43$), IX ($2^2 \cdot 5 \cdot 251$ und $2^2 \cdot 13 \cdot 107$), XIII ($2^4 \cdot 19 \cdot 8563$ und $2^4 \cdot 83 \cdot 2039$), XXVIII (siehe oben). Vorausgesetzt, daß bei EULER keine Rechen- oder Druckfehler (mit Ausnahme des von mir bemerkten) vorkommen, hat dieser also zusammen 64 Paare befreundeter Zahlen angegeben, von denen 37 nur gerade und 27 nur ungerade Zahlen enthalten. Drei der geraden Paare waren schon vor EULER aufgefunden worden. Das erste Paar (220 und 284) war schon im Altertum bekannt (vgl. die *Vorlesungen* $\mathbf{1}^3$, S. 167), das zweite Paar (17 296 und 18 416) hat FERMAT 1636 seinem Freund MERSENNE mitgeteilt (siehe *Oeuvres de* FERMAT **2**, Paris 1894, S. 20—21 , das dritte Paar (9 363 584 und 9 437 056) hat DESCARTES in einem Brief an MERSENNE vom 31. März 1638 erwähnt (siehe *Oeuvres de* DESCARTES **2**, Paris 1898, S. 94). Eine Herleitung der drei Paare hat F. VAN SCHOOTEN im 5. Buche der *Exercitationes mathematicae* (1657) gebracht (vgl. die *Vorlesungen* $\mathbf{2}^2$, S. 771).

G. ENESTRÖM.

3:**636**–**637**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3**:**646**–**647**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206–207. — **3**:**652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3**:**660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3**:**667**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441–442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207–208, 310. — **3**:**682**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 408. — **3**:**686**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3**:**689**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3**:**692**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 215. — **3**:**695**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442. — **3**:**700**, **702**, **722**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 171–172. — **3**:**736**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3**:**749**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3**:**750**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3**:**753**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172–174. — **3**:**758**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3**:**759**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3**:**760**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447. — **3**:**766**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3**:**773**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 174–175. — **3**:**774**, **798**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442–443. — **3**:**819**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3**:**845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327–328. — **3**:**848**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3**:**880**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95–96. — **3**:**881**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

3: 881. In betreff der zwei Abhandlungen *De infinitis curvis ejusdem generis* bemerkt Herr Cantor, daß sie nach verschiedenen Richtungen bahnbrechend waren, und gibt dann Auskunft über einige wichtige Punkte derselben, nämlich a) den Satz $\frac{\partial^2 A}{\partial t\cdot\partial u}=\frac{\partial^2 A}{\partial u\cdot\partial t}$ nebst dessen Beweis; b) die Definition des partiellen Differentialquotienten; c) die Benutzung eines integrierenden Faktors; d) die Bezeichnung einer Funktion durch das Funktionszeichen. Dagegen sucht man in den *Vorlesungen* vergebens die leiseste Andeutung von dem eigentlichen Gegenstand der Abhandlungen, der gar nicht aus dem Titel *De infinitis curvis ejusdem generis* hervorgeht.

Das Problem, das sich Euler vorgelegt hatte, war das folgende: Eine partielle Differentialgleichung $\frac{\partial z}{\partial x}=f(x,y)$ sei gegeben, wo $\int\limits_{(x)} f(x,y)dx$ nicht explizite ausgedrückt werden kann; es wird verlangt, die partielle Differentialgleichung in eine totale zu verwandeln, und zwar so, daß diese keine Integralausdrücke oder wenigstens keine solchen Ausdrücke, in denen y nach dem Integralzeichen vorkommt, enthält. Für diesen Zweck benutzt Euler natürlich in erster Linie die Gleichung $dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$ und bemerkt, daß offenbar

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{(x)} f(x,y)dx=\int\limits_{(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx,$$

also

$$dz=f(x,y)\,dx+dy\int\limits_{(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,dx.$$

Kann nun die Integration ausgeführt werden, so hat man sofort die gesuchte totale Differentialgleichung bekommen; sonst ist es nötig, verschiedene Kunstgriffe zu versuchen. In gewissen Fällen erhält man dadurch eine totale Differentialgleichung zweiter oder höherer Ordnung, in vielen Fällen aber ist das Problem unlösbar.

Ferner behandelt Euler noch die allgemeinere Gleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f(x,y,z)$$

und sucht dieselbe mittels der Methode des integrierenden Faktors zu lösen. Merkwürdigerweise scheint man im allgemeinen übersehen zu haben, daß die

ursprüngliche Differentialgleichung bei EULER partiell ist; beispielsweise erwähnt A. VON BRAUNMÜHL in seinem Vortrag *Zur Geschichte der Differentialgleichungen* (Verhandlungen des dritten internationalen Mathematikerkongresses 1904, Leipzig 1905, S. 551—555) nur die von EULER bei der Integration der Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = f(x, y, z)$ benutzte Hilfsgleichung $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{P\partial R}{\partial z} + \frac{R\partial P}{\partial z}$, und als BRAUNMÜHL bemerkt, daß EULER die Gleichung $dz + Pdx = 0$ zu einer totalen zu machen sucht, so meint er mit „totaler Differentialgleichung" natürlich eine solche, die sofort integrierbar ist. G. ENESTRÖM.

3:882, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3:890,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3:892,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143.

3: 892. Als ich 1898 die hier Z. 20—22 von Herrn CANTOR erwähnte Mitteilung des JOHANN BERNOULLI an EULER zum Abdruck brachte, glaubte ich, daß sie nicht veröffentlicht war, und noch 1905 war ich derselben Ansicht (vgl. BM $\mathbf{6}_3$, 1905 S. 52). Indessen hat es sich herausgestellt, daß die von JOHANN BERNOULLI am 16. April 1740 an EULER übersandte „Scheda separata" schon 1751 unter dem Titel „Problema analyticum. Auctore I. BERNVOLLII (!)" veröffentlicht wurde, und zwar in den Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae **13** (ad annos 1741—1743), S. 61—63. Dieser Umstand, den vermutlich auch P. H. FUSS übersehen hatte, erklärt, warum die Beilage zu JOHANN BERNOULLIS Brief vom 16. April 1740 in Petersburg fehlt; sie ist offenbar als Druckmanuskript benutzt und dann zerstört worden.

G. ENESTRÖM.

3:IV (Vorwort), siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 448.

Anfragen und Antworten.

140. Über die Geschichte der quadratischen und kubischen Reste im christlichen Mittelalter. In den mathematisch-historischen Handbüchern werden beiläufig einige Notizen gegeben über die Vorgeschichte der quadratischen und kubischen Reste bei Griechen, Indern und Arabern, aber in betreff des christlichen Mittelalters fehlt es fast vollständig an Angaben; beispielsweise enthält das Register des 2. Bandes der CANTORschen *Vorlesungen* kein Stichwort „Quadratische Reste" (vgl. indessen S. 353 der 2. Auflage, wo ein Satz von CHUQUET über quadratische Nichtreste der Zahl 10 erwähnt wird).

Nichtsdestoweniger weiß man, daß im christlichen Mittelalter einige einfachere Sätze, die sich auf quadratische und kubische Reste beziehen, bekannt waren. So kommen im Cod. lat. Monac. 14908 einige von Frater FRIDERICUS herrührende Aufzeichnungen aus dem Jahre 1464 vor (siehe M. CURTZE, *Mathematisch-Geschichtliches aus dem Codex latinus Monacensis No. 14908;* Arch. der Mathem. $\mathbf{13}_2$, 1895, S. 405—406), die in unsere mathematische Sprache übersetzt besagen:

2, 3, 7, 8 sind quadratische Nichtreste von 10;
0, 1 sind quadratische Reste von 3;
0, 1 sind quadratische Reste von 4;
1, 2, 4, 0 sind quadratische Reste von 7;
1, 4, 7, 0 sind quadratische Reste von 9;
1, 6, 0 sind kubische Reste von 7;
1, 8, 0 sind kubische Reste von 9;
es gibt keinen einziffrigen kubischen Nichtrest von 10.

Es wäre von Interesse zu ermitteln, aus welcher Quelle Frater Fridericus geschöpft hat, und ob es andere arithmetische Traktate aus dem christlichen Mittelalter gibt, die weitere Sätze über quadratische und kubische Reste enthalten.

G. Eneström.

Risposta alla questione 139 sulla seconda edizione (1787) del „Calcolo differenziale" di Eulero. È certo che Mascheroni non ha avuto alcuna parte nella edizione pavese del 1787 del „Calcolo differenziale" di Eulero. Nelle sue *Adnotationes ad calculum integralem Euleri* (I p. 59) egli scrive „Auctor [cioè Eulero] in opuscolo, cui titulus Dilucidationes . . . quod primum editum est a cl. Speronio in sua editione Ticinensi Calculi differentialis Euleriani . . .". E il suo biografo C. Ugoni (*Biografia di L. Mascheroni*. Bergamo 1873, p. 21—22) dice: „Le opere di Eulero, e principalmente le sue instituzioni di calcolo differenziale e di calcolo integrale, servivano di testo all'università di Pavia. Le instituzioni del calcolo differenziale erano state ristampate in Pavia, e l'illustre autore aveva mandato addizioni al suo editore padre Speroni. Ora Mascheroni recò le sue meditazioni ad ampliare l'altra opera intitolata: Instituzioni di calcolo integrale." Anche G. B. Savioli nelle sue *Memorie appartenenti alla vita ed agli studi dell'abbate L. Mascheroni* (Milano 1801) non accenna minimamente all'edizione di Pavia del „Calcolo differenziale" di Eulero.

Quanto alla dimostrazione della formola $0^0 = 1$, non se ne trova traccia alcuna nelle *Adnotationes*, l'unico scritto di Mascheroni attinente al calcolo infinitesimale. D'altra parte la seconda dimostrazione di Speroni della formola $0^0 = 1$ è condotta quasi letteralmente sulla traccia della dimostrazione che dà Fontana per il teor. III della sua *Disquisitio physico-mathematica XIII: de infinito mathematico* (Papiae 1780), mentre la prima dimostrazione pare completamente appartenere a Speroni stesso.

Come sia nato l'errore, in cui caddero vari autori, che Mascheroni abbia avuta parte nell'edizione pavese del „Calcolo differenziale" di Eulero, è difficile indovinarlo; forse vi concorse la somiglianza dei nomi Speroni e Mascheroni, e più ancora il fatto che tanto il „Calcolo differenziale" di Eulero come le *Adnotationes* di Mascheroni uscirono dalla stessa tipografia Galeazzi.

Pavia G. Vivanti.

Rezensionen.

D. E. Smith. Rara arithmetica. A catalogue of the arithmetics written before the year MDCI with a description of those in the library of George Arthur Plimpton of New York. Boston, Ginn & Co. 1908. 8°, XIII + (2) + 507 S. + 9 Taf.

Diese Arbeit ist in erster Linie eine Beschreibung eines Teiles der PLIMPTONschen Bibliothek in New York; in zweiter Linie kann sie als ein Verzeichnis der vor 1601 erschienenen Rechenbücher betrachtet werden. Im folgenden werde ich darum die Arbeit erst als einen beschreibenden Bibliotheks-katalog, dann als eine Bibliographie beurteilen.

Bei der Beschreibung jedes einzelnen Buches verfährt Herr SMITH auf folgende Weise. Zuerst bringt er zum Abdruck den vollständigen Titel oder reproduziert denselben im Faksimile; eventuell wird überdies der Buchdrucker-vermerk am Ende des Buches wiedergegeben. Dann gibt er Auskunft über das Format, sowie die Länge und Breite teils der ganzen Seite, teils des Textes, ferner die Zahl der Seiten oder Blätter und die Zahl der Zeilen einer Textseite. In sehr vielen Fällen bringt er noch Notizen über den Inhalt des Buches oder sogar faksimilierte Reproduktionen gewisser Stellen, die von größerem Interesse sein können. Um ein Beispiel der Beschreibungen zu bieten, drucke ich hier ab, was Herr SMITH in betreff der sogenannten „Arithmetik von Treviso“ (1478) mitteilt.

> *Title.* Incommincia vna practica molto bona et vtile || a ciaschaduno chi vuole vxare larte dela mercha- || dantia. chiamata vulgarmente larte de labbacho. (F. 1, r.)
>
> *Colophon.* A Triuiso :: A di. io. Decēb2 :: i478. (F. 62, r.)
>
> *Description.* 4°, 14·6 × 20·5 cm., the text being 7·3 × 12·8 cm. 62 ff. unnumb., 32 ll. Treviso, 1478.

Ferner bringt Herr SMITH Faksimiles von vier Seiten (darunter die erste und die letzte), sowie ausführliche Notizen über den Inhalt.

Es ist offenbar, daß eine Sammlung von solchen genauen Beschreibungen immer vom bibliographischen Gesichtspunkte aus wertvoll sein muß. Auch für die mathematisch-historische Forschung kann sie von großem Interesse sein, aber ihr Wert ist gewissermaßen davon abhängig, wie wichtig die beschriebenen Arbeiten sind, und wie vollständig die Bibliothek auf dem fraglichen Gebiete ist.

In betreff der ersten Frage könnte man vielleicht meinen, daß die älteren Rechenbücher für die Geschichte der Mathematik von sehr unter-geordneter Bedeutung sind. Hierbei ist indessen zuerst zu bemerken, daß die

älteren Rechenbücher natürlich das Material für die Geschichte des mathematischen Elementarunterrichts bilden, und daß aus diesem Grunde eine genaue Kenntnis derselben für die Geschichte der Mathematik im weiteren Sinne des Ausdruckes von großem Belang ist. Aber auch für die Entwickelungsgeschichte der mathematischen Theorien gibt es viele Fragen, bei deren Erledigung eine genaue Untersuchung der elementaren Rechenbücher erforderlich ist. Beispielsweise kennt man noch allzu unvollständig die älteste Geschichte der Kettenbrüche, weil es zurzeit nicht ermittelt worden ist, welche Regeln SCHWENTER „bey den Logisticis und Rechenmeistern" gefunden hat (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 90); es ist gar nicht unmöglich, daß SCHWENTER, der in den gewöhnlichen Handbüchern als ein Entdecker der Kettenbrüche erwähnt wird, eigentlich nur eine ältere Vorlage abgeschrieben hat.

Ein anderes Beispiel der Fragen, die erst durch eingehende Untersuchung der Rechenbücher des 16. Jahrhunderts erledigt werden können, bietet die Geschichte der Theorie der Gleichungen. Bekanntlich hat RAIMARUS URSUS in seiner *Arithmetica analytica* (1601) dem Lübecker Rechenmeister J. JUNGE ein Verfahren, um Gleichungen mit ganzen rationalen Wurzeln zu lösen, zugeschrieben, und es ist möglich, daß dies Verfahren in einem 1577 gedruckten Rechenbuch auseinandergesetzt ist, aber bisher ist kein Exemplar eines solchen Rechenbuches aufgefunden, so daß man nicht weiß, inwieweit die Angabe des RAIMARUS URSUS korrekt ist (vgl. Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 389—390).

In betreff der Vollständigkeit der PLIMPTONschen Sammlung von Rechenbüchern kann behauptet werden, daß dieselbe ziemlich hohen Ansprüchen genügt. Herr SMITH selbst gibt an, daß von den Rechenbüchern des 15. und 16. Jahrhunderts, die in zwei oder mehreren Auflagen erschienen sind, weniger als 25 in der PLIMPTONschen Sammlung fehlen. Selbstverständlich ist eine solche Angabe nicht als definitiv zu betrachten, denn man weiß noch nicht genau, wie viele Rechenbücher zwei oder mehrere Auflagen gehabt haben. Daß die von Herrn SMITH angegebene Zahl 25 zu klein ist, dürfte ziemlich leicht sein nachzuweisen. Beispielsweise gibt es ein in der PLIMPTONschen Bibliothek nicht vorhandenes Rechenbuch von JOHANN SECKERWITZ (Segkerwitz): *Rechenbuchlein auff allerley handthierung*, die „zum andern mal vbersehen vnd gebessert" 1547 zu Breslau erschien (53 S. kl. 8°, siehe H. GROSSE, *Historische Rechenbücher des 16. und 17. Jahrhunderts*, Leipzig 1901, S. 67); von diesem Buch verzeichnet Herr SMITH nur (S 347) eine Auflage (1574), und es ist darum wahrscheinlich, daß er dasselbe nicht unter die 25 Rechenbücher gerechnet hat. Aber auch wenn die von Herrn SMITH angegebene Zahl 25 durch eine etwas größere (z. B. 40) zu ersetzen wäre, so ist dies kein besonders wichtiger Umstand. Von größerer Bedeutung ist die Frage, ob viele wirklich bedeutende Rechenbücher in der Sammlung fehlen, und diese Frage dürfte auf eine für die Sammlung günstige Weise beantwortet werden können. Von Lücken, die mir aufgefallen sind, habe ich eigentlich nur zwei zu notieren; sie betreffen die Originalausgabe (1525) von CHR. RUDOLFFS *Behend vnnd Hubsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre* und die DIOFANTOS-Übersetzung (1575) von W. XYLANDER. Streng genommen ist keine dieser Arbeiten ein Rechenbuch, aber da Herr SMITH die STIFELsche Neuausgabe der ersten Arbeit (S. 258—260) und die BACHET-FERMATsche DIOFANTOS-Ausgabe von 1670 (S. 348) beschreibt, so scheint es, als ob er selbst geneigt wäre, die zwei Arbeiten als Rechenbücher zu betrachten.

Wenn es also ausgemacht ist, daß das Material, das Herrn Smith zur Verfügung gestanden hat, als sehr wertvoll bezeichnet werden kann, so hat man weiter zu untersuchen, ob die Beschreibungen desselben zuverlässig und zweckmäßig sind. Die Titel sind natürlich vollständig zuverlässig, wo sie in Faksimiles wiedergegeben sind, und dies trifft für nicht weniger als etwa 200 Schriften zu. In den übrigen Fällen habe ich versucht, die Zuverlässigkeit der bibliographischen Angaben teilweise zu prüfen, indem ich sie mit den Exemplaren der betreffenden Bücher, die ich selbst besitze, verglichen habe, aber wie unsicher eine solche Untersuchung sein muß, sofern man nicht gerade die beschriebenen Exemplare zur Verfügung hat, werde ich an einem Beispiel erörtern. Bekanntlich hat B. Boncompagni im Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, S. 188—210 sehr genaue Notizen über vier verschiedene Ausgaben von Widmans Rechenbuch mitgeteilt. In betreff der Auflage von 1526 gibt Boncompagni (a. a. O. S. 201) an, daß das letzte Blatt folgenden Vermerk enthält:

Getruckt zu Augspurg durch
Haynrich Stayner
M. D. XXVI.

Aber in meinem Exemplar dieser Auflage steht: „Gedruckt" und „Steyner", und ich war darum früher geneigt, anzunehmen, daß in der Abhandlung Boncompagnis zwei Druckfehler vorkommen. Jetzt weiß ich aus dem Faksimile der Seite 40 der *Rara arithmetica,* wie die Sache zu erklären ist, nämlich so, daß es zwei verschiedene Auflagen mit dem Druckjahr 1526 gibt, welche Auflagen nur durch eine genaue Vergleichung unterschieden werden können. Das von Boncompagni beschriebene Exemplar und ebenso das Plimptonsche gehört der einen Auflage, mein Exemplar der anderen Auflage an. Ich bezeichne jene Auflage mit A, diese mit B und verzeichne hier unten die auf S. 72ª des Rechenbuches (die Seite, die von Herrn Smith im Faksimile wiedergegeben ist) vorkommenden Abweichungen:

Seite 72ª, Zeile	Auflage 1526 A	Auflage 1526 B
1	wys-	wys
3	sum̄ier	sum̄yer
10	zendtner	zenntner
14	darzů	dartzů
15	solt	soltt
16	ain	eyn
17	darzu, das	dartzu, daz
18	Dye sub-	Die sub
19	trahier	trahyer
21	kum̄en	kumen
21	kum̄e	kum-
22	Vn̄, gmacht	Vnd, gemacht
23	Pfeffer	Pfeffer.

Aus dem Umstande, daß die von mir benutzten Exemplare in einigen Fällen nicht mit den Beschreibungen der *Rara arithmetica* übereinstimmen, folgt also nicht mit Sicherheit, daß die Beschreibungen fehlerhaft sind. Indessen

bringe ich hier unten die Resultate meiner Untersuchung, sofern sie darauf hindeuten, daß die bibliographischen Angaben der *Rara arithmetica* möglicherweise zu verbessern sind.

S. 54. Herr Smith gibt an, daß die Ausgabe 1539 von Peuerbachs Rechenbuch 69 Blätter enthält, aber mein Exemplar, das durchaus vollständig zu sein scheint, hat nur 68 Blätter, nämlich Titelblatt, Bl. 2—56, noch einmal 49—56 (statt 57—64), 65—67 und überdies ein Schlußblatt, dessen Vorderseite leer ist, während die Rückseite nur die Buchdruckermarke enthält. Die Bogen sind signiert A—H (je 8 Bl.), I (4 Bl.).

S. 65. Es ist vielleicht nicht ganz angebracht, für das Format der hier erwähnten Ausgabe Paris 1507 des Lefèvre die Bezeichnung „8°" anzuwenden; „Fol." oder „4°" wäre wohl besser, da die Seiten 60 Zeilen enthalten.

S. 66. Hier ist Z. 6 die Zahl „26·8" vermutlich unrichtig (vielleicht nur Druckfehler?). Die Länge des Textes meines Exemplars ist 21·8 cm. Z. 5 und 7 muß wohl 72 statt 71 gesetzt werden? Mein Exemplar enthält 9 Bogen (a—i) zu je 8 Blätter, und das Druckjahr steht auf Bl. 72^b.

S. 132. Mein Exemplar der Ausgabe 1552 von Ghaligais Arithmetik hat auf dem Titelblatt Pratica (nicht „Practica").

S. 152. Mein Exemplar der Ausgabe 1546 von Rudolffs Rechenbuch hat 120 Blätter; das von Herrn Smith beschriebene Exemplar (117 Blätter) ist vielleicht unvollständig.

S. 205. Die Angabe Z. 11: „2 ff. unnumb. + 102 numb." ist etwas undeutlich. Mein Exemplar der Ausgabe Paris 1563 der Arithmetik Gemmas enthält Titelblatt und Bl. 2—103 + 1 unnumeriertes Blatt; es wäre also besser, entweder „103 ff numb. + 1 f. unnumb." oder „1 f. unnumb. + 102 ff. numb. + 1 f. unnumb." zu setzen.

S. 330. Mein Exemplar der Originalausgabe (1569) der Arithmetik des Ramus hat auf dem Titelblatt Basileae (nicht „Basiliae"). Diese Ausgabe hat nach Herrn Smith „198 pp. (2 blank, 6 unnumb.)", und dies ist so zu deuten, daß die Rückseite des Titelblatts und die Rückseite des Blattes 4 (Druckfehlerverzeichnis) leer sind.

S. 335. Die Ausgabe Basel 1569 von P. Rami *Scholarum mathematicarum libri unus et triginta* hat nach Herrn Smith „16 pp. unnumb. + 320 numb. = 336 pp.", und dies ist richtig, aber von den 16 nicht numerierten Seiten ist die letzte leer.

S. 338. Mein Exemplar von Cardanos *Opus novum de proportionibus* enthält nur (15) + 271 S. und die Rückseite des Titelblattes ist leer, also sollte nach der Berechnungsart des Herrn Smith stehen: „288 pp. (14 unnumb., 3 blank, 271 numb.)". Dagegen hat Herr Smith selbst die Angabe: „291 pp. (4 blank, 16 unnumb.)".

S. 348. Nach Herrn Smith hat das Buch F. Maurolyci *Opuscula mathematica* das „Colophon" auf S. 305, und dies ist richtig, wenn man auf die 20 nicht numerierten Seiten Rücksicht nimmt; sonst ist 285 statt 305 zu setzen. Aber S. 350 bemerkt Herr Smith (Z. 3—4), daß der „Computus ecclesiasticus" S. 26—47 steht, und dies ist richtig, wenn man von den 20 nicht numerierten Seiten absieht

S. 378. Die Angabe (Z. 15): „337 pp. (321 numb.)" dürfte auf einem Versehen beruhen. Mein Exemplar von Clavius' *Epitome arithmeticae practicae*, Ausgabe Rom 1585 hat 336 Seiten, von denen 323 numeriert und die 13

letzten nicht numeriert sind; der letzte Bogen (signiert X) enthält wie die übrigen 8 Blätter. Warum wird nicht hier bemerkt, daß eine Seite (die Rückseite des Titelblattes) leer ist?

Wie man sieht, beziehen sich die meisten der vorangehenden Bemerkungen auf die Blätter- oder Seitenzählung. Auf diesem Gebiete gibt es meiner Ansicht nach einen besonders schwachen Punkt der bibliographischen Angaben der *Rara arithmetica,* nämlich in betreff der Zählung der leeren Seiten, und auch in betreff der nicht numerierten Seiten dürften die Zählungen der *Rara arithmetica* etwas inkonsequent ausgeführt worden sein.

Welche Schwierigkeiten solche Inkonsequenzen mit sich führen, wenn man versuchen will, ein in den *Rara arithmetica* beschriebenes Exemplar eines gewissen Buches und ein anderweitig bekanntes Exemplar desselben Buches zu identifizieren, werde ich an einem Beispiel erörtern.

S. 364 beschreibt Herr SMITH ein Exemplar der Ausgabe Turin 1585 der *Speculationes mathematicae* BENEDETTIS und gibt an, daß dies Exemplar „425 pp. numb. + 10 unnumb. + 1 blank = 436 pp." enthält. Nun ist ein Exemplar der Ausgabe 1580 dieser Arbeit in RICCARDIS *Bibliot. matem. ital.* (I: 1, Sp. 111) beschrieben, und nach RICCARDI enthält dies Exemplar 4 Bl. + 426 S. + 1 Bl.; überdies behauptet RICCARDI (a. a. O. Supplem. Sp. 165), daß die Auflage 1585 nur eine neue Titelauflage ist. Will man nun auf Grund der Beschreibung der *Rara arithmetica* versuchen, diese Frage zu erledigen, so wird sich der Versuch erfolglos erzeigen, weil es unklar ist, teils wo sich die 10 nicht numerierten Seiten finden, teils wo die leere Seite einzufügen ist.

Da indessen meine vorangehenden Ausstellungen gegen die Arbeit des Herrn SMITH von sehr untergeordneter Bedeutung sind, und da überdies die Aufschlüsse, die die zahlreichen Faksimiles bringen, natürlich absolut zuverlässig sind, kann man meines Erachtens behaupten, daß die von Herrn SMITH angefertigte Beschreibung der älteren Rechenbücher der PLIMPTONschen Bibliothek sehr verdienstvoll ist.

Ich gehe jetzt über zur Beurteilung der *Rara arithmetica* als eines Verzeichnisses der vor 1601 verfaßten Rechenbücher. Schon bei der Beschreibung der Bücher der PLIMPTONschen Bibliothek kommt ein rein bibliographisches Moment vor; Herr SMITH hat nämlich nicht die Bücher nach deren Erscheinungsjahren (eventuell dem Erscheinungsjahr der ersten von PLIMPTON besessenen Auflage) geordnet, sondern nach dem Druckjahr der ersten Auflage, und wenn diese nicht in der PLIMPTONschen Bibliothek vorhanden war, mußte er also erst das Druckjahr ermitteln. Ferner erwähnt Herr SMITH für jedes in der Bibliothek vorhandene Rechenbuch alle Auflagen, die er selbst gesehen hat oder die in anderen ihm bekannten bibliographischen Arbeiten verzeichnet sind. Auch für Rechenbücher, die in der PLIMPTONschen Bibliothek durchaus fehlen, gibt er solche Aufschlüsse. Endlich bringt er für jeden Verfasser von Rechenbüchern, soweit möglich, kurze biographische Notizen und zuweilen noch kritische Bemerkungen bibliographischen oder historischen Inhalts.

Es ist klar, daß diese bibliographischen, biographischen und historischen Zusätze den Wert der Arbeit wesentlich erhöhen müssen. Leider hat Herr SMITH durchaus unnötigerweise einen Fehler begangen, der verursacht, daß die *Rara arithmetica* als bibliographisches Hilfsmittel eigentlich nur den Sachkundigen empfohlen werden kann. Bei seinen Angaben hat er nämlich nur ausnahmsweise bemerkt, woher sie entnommen sind, und er hat nicht einmal erwähnt,

ob er ein von ihm verzeichnetes Rechenbuch selbst gesehen oder wenigstens in einem zuverlässigen Bibliothekskatalog aufgeführt gefunden hat. Es ist also durchaus unmöglich zu ersehen, ob eine Angabe als zuverlässig betrachtet werden kann, oder ob sie lediglich aus MURHARDS Bibliographie oder aus einer anderen ebenso unzuverlässigen Quelle entnommen ist. Sonst wäre es ja sehr leicht gewesen, z. B. durch ein Sternchen anzugeben, daß der Verfasser das Buch selbst gesehen hat oder wenigstens eine Bibliothek angeben kann, in welcher es laut dem Kataloge vorhanden ist. Handelte es sich nur um solche Bücher, die fast niemals zitiert werden, so wäre vielleicht das Verfahren des Herrn SMITH weniger zu beanstanden. Aber auch hinsichtlich solcher Arbeiten, die für die Geschichte der Mathematik von wesentlicher Bedeutung sind, hat er ohne weiteres unzuverlässige Angaben älterer Verfasser wiederholt, wie aus den folgenden Beispielen ersichtlich werden dürfte.

S. 193 beschreibt Herr SMITH die *Practica arithmeticae et mensurandi singularis* (1539) CARDANOS und gibt ohne Vorbehalt zwei neue Auflagen derselben an, nämlich Nürnberg 1541, ib. 1542. Vermutlich hat er diese Notizen über neue Auflagen aus MURHARD (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* **1**, Leipzig 1797, S. 167) entnommen, aber meiner Ansicht nach gibt es nicht den geringsten Grund anzunehmen, daß die neuen Auflagen existieren, denn soviel ich weiß sind sie in keinem Bibliothekskatalog und von keinem zuverlässigen bibliographischen Verfasser verzeichnet. Aber dies kann nur dem Fachmann bekannt sein, und die Angabe des Herrn SMITH wird für den nicht sachkundigen Leser um so leichter irreführend, als Herr SMITH, und zwar mit Recht, eine bei VILLICUS vorkommende Angabe, daß die *Practica* schon 1537 erschien, bemängelt.

S. 226 verzeichnet Herr SMITH außer der Originalausgabe (1544) der *Arithmetica integra* STIFELS noch vier weitere Auflagen, nämlich Nürnberg 1545, ib. 1546, ib. 1548, ib. 1586; die letzte Auflage wird auch von MURHARD (a. a. O. S. 169) aufgeführt, aber woher Herr SMITH die Angaben in betreff der drei Auflagen 1545, 1546, 1548 entnommen hat, weiß ich nicht. Wie dem auch sei, bin ich überzeugt, daß nur die Originalauflage von 1544 existiert, bis die Existenz einer der übrigen Ausgaben durch Beleg bewiesen wird, und es ist meiner Ansicht nach ein bedauerlicher Fehler, daß die Angaben in betreff dieser Ausgaben nicht auf irgendeine Weise als unsicher bezeichnet worden sind.

Sehe ich von der jetzt gemachten Bemerkung ab, so habe ich in betreff der historischen und bibliographischen Angaben eigentlich nur eine besonders wichtige Ausstellung gegen die *Rara arithmetica* zu machen. Sie bezieht sich auf die arithmetischen Bücher (7—9) der EUKLIDischen Elemente. Nach den *Rara arithmetica* (S. 12, 236) enthält die RATDOLTsche Ausgabe (1482) nicht diese Bücher, und die „editio princeps" derselben erschien nach Herrn SMITH erst 1545 in Rom unter dem Titel: „I quindici libri de gli elementi". Beide Behauptungen sind höchst auffällig, denn: 1. Herr SMITH hat selbst die Ausgabe 1482, die bekanntlich die 15 Bücher enthält, eingesehen und beschrieben (S. 11—12); 2. zwischen 1482 und 1545 erschienen viele neue Ausgaben der 15 Bücher, und hierzu kommt noch, daß das 1545 in Rom erschienene Buch nur die Sätze, aber nicht die Beweise enthält (die Seitenzahl ist, nach der Angabe des Herrn SMITH, nur 112, was natürlich nicht genügen kann, um alle Sätze nebst Beweisen mitzuteilen). Ausführliche Auskunft über diese italienische Übersetzung, die von ANGELO CAJANI herrührt, gibt RICCARDI in

der *Bibliot. matem. ital.* I : 1, Sp. 208. Auffällig ist ebenfalls die Bemerkung des Herrn SMITH (S. 238 Z. 20): „This [nämlich die lateinische Ausgabe des 10. Buches, Paris 1551] is not the same as the 1545 edition already described [d. h. die italienische Übersetzung der 15 Bücher]". Als einen bestimmten Fehler, wenn auch nicht besonders irreführend, möchte ich auch den Umstand bezeichnen, daß die Originalausgabe von RUDOLFFS Algebra (1525) nur ganz im Vorübergehen S. 151 erwähnt wird, während die Neuausgabe von 1553 S. 258—260 unter STIFELS Namen als besonderes Buch ohne jede Notiz über die Originalausgabe beschrieben ist. Die RUDOLFFsche Algebra von 1525 ist bekanntlich eine der wichtigsten arithmetisch-algebraischen Schriften aus der ersten Hälfte des 16. Jahrhunderts, und nach der Anordnung der *Rara arithmetica* sollte die Ausgabe von 1553 nach dem Jahr 1525 versetzt werden.

Übrigens habe ich bei der Lektüre der *Rara arithmetica* eine sehr große Zahl von Stellen bibliographischen oder historischen Inhalts notiert, die meines Erachtens verbessert werden sollten, und bei einer genaueren Lektüre hätte ich ganz gewiß noch mehrere solche Stellen notieren können. Im folgenden erwähne ich einige meiner Bemerkungen; sie alle hier zum Abdruck zu bringen, würde schon mit Rücksicht auf den Raum, der für diesen Zweck erforderlich wäre, nicht angehen.

S. 10. Die Bemerkung (Z. 10—11): „although M. HENRY asserted that a MS. of c. 1275, which he edited, was entitled to that distinction [= the first written in France]" beruht auf einem Mißverständnis; HENRY hat behauptet, daß der fragliche Algorismus der erste französisch geschriebene („ce sont les plus anciens textes mathématiques français que l'on connaisse") sei. Übrigens dürfte es höchst unsicher sein, ob das „Speculum majus" des VINCENT DE BEAUVAIS, wie Herr SMITH anzunehmen scheint, wirklich das älteste in Frankreich verfaßte Rechenbuch enthält. Nach der gewöhnlichsten Angabe wurde das „Speculum" zwischen 1242 und 1249 bearbeitet (Herr SMITH gibt „c. 1250" an), und nach einer freilich nicht ganz deutlichen Notiz war SACROBOSCO schon 1244 literarisch tätig; möglicherweise ist das „Carmen de algorismo" noch etwas älter.

S. 13. Die Angabe (Z. 6): „JOHANNES DE LIVERIUS (LIVERIIS, LINERIIS) was a Sicilian writer on astronomy who flourished c. 1300—1350" gibt zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß. Zuerst ist die Form „de Liverius" wohl sprachlich unmöglich; weiter ist es fast sicher, daß der Verfasser des Traktates „De minutiis", der wahrscheinlich JOHANNES DE LINERIIS hieß und aus Amiens herstammte, schon vor 1300 wissenschaftlich tätig war, denn sein Schüler JOHANNES DE SAXONIA hat nach CURTZE (Biblioth. Mathem 1895, S. 106) schon 1297 eine Schrift verfaßt, und nach DUHEM (siehe Biblioth. Mathem. **6**$_3$, 1905, S. 210) gibt es eine Handschrift des Traktates „De minutiis" aus dem 13. Jahrhundert. Ob es außer diesem JOHANNES DE LINERIIS einen Astronomen JOHANNES DE LIVERIIS von Sizilien gegeben hat, ist eine noch nicht endgültig entschiedene Frage.

S. 26. Die Unterschrift: „Multiplication table, 1488 BOETHIUS" ist meiner Ansicht nach irreleitend (siehe Biblioth. Mathem. **9**$_3$, 1908, S. 139—140), da es sich nicht um eine Multiplikationstabelle, sondern um eine zahlentheoretische Tafel handelt.

S. 29—30. In betreff des 1503 in Paris herausgegebenen Sammelbandes scheint Herr SMITH übersehen zu haben, daß darin (Bl. 45^a—48^a) der „Al-

gorismus" des SACROBOSCO vorkommt (vgl. RICCARDI, Biblioth. Mathem. 1894, S. 74); die Angabe S. 32 Z. 9 hat Herr SMITH vielleicht anderweitig entnommen.

S. 31. Das Todesjahr SACROBOSCOS ist durchaus unbekannt (siehe über diese Frage die Bemerkung unten S. 279, sowie Biblioth. Mathem. 1899, S. 32, 50).

S. 32. Die Angabe (Z. 8—9), daß CLICHTOVEUS schon 1498 den „Algorismus" des SACROBOSCO in Paris herausgegeben hat, habe ich bis auf weiteres in Verdacht.

S. 35. Welchen Sinn hat Z. 1 und 9 v. u. die Angabe „S. l. a." [d. h. sine loco et anno]? Herr SMITH gibt ja selbst Z. 3—5 v. u. an, daß Druckort und Druckjahr Bl. 8ᵃ stehen.

S. 36. Daß der Mathematiker JOHANN WIDMAN aus Eger mit dem Arzt JOHANN WIDMAN „dictus MEICHINGER" identisch sei, wie Herr SMITH ohne weiteres behauptet, hat man meines Wissens nicht den geringsten Grund anzunehmen (vgl. Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **9**, 1876, S. 209). — Nach der gewöhnlichen Angabe (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398) war MARTIN LANDSBERG (Herbipolensis) erst seit 1492 in Leipzig als Buchdrucker tätig, so daß statt „c. 1488" eher „c. 1492" zu setzen wäre.

S. 39. In betreff der Bemerkung: „The plus and minus signs . . . are not used, however, [by WIDMAN] as signs of operation, but as symbols of excess or deficiency in warehouse measures" erlaube ich mir auf Biblioth. Mathem. $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155—157 zu verweisen. In Wirklichkeit benutzt WIDMAN + als Zeichen für „und", und aus diesem Grund könnte + an einigen Stellen als Operationszeichen betrachtet werden; das Zeichen — kommt zuweilen als reines Operationszeichen vor.

S. 44. Woher Herr SMITH die Angabe (Z. 28—29): „There also appeared c. 1490, at Leipzig, an anonymous work edited by Norico, entitled Arithmeticae Textus communis" entnommen hat, ist mir unbekannt; jedenfalls enthält sie verschiedene Unrichtigkeiten. Erstens hieß der Herausgeber des *Textus arithmeticae communis* nicht „Norico", sondern KONRAD DOCKLER (TOCKLER, TUCKLER); auf dem Titelblatt des Traktates nennt er sich „Conradus Noricus", d. h. Konrad aus Nürnberg. Zweitens kann der Traktat nicht c. 1490 erschienen sein, weil DOCKLER erst 1494 Student und erst 1501 Magister wurde. Drittens ist das Widmungsschreiben am Ende des Traktates datiert: „ex Liptzk Sole in tertia parte aquarij anno salutis 1503 (vgl. DROBISCH, *De Ioanne Widmanni Egerani compendio arithmeticae mercatorum*, Leipzig 1840, S. 4—5). Die Wahrscheinlichkeit, daß es einen Traktat mit dem Titel „Arithmeticae textus communis" gibt, der c. 1490 in Leipzig von einem sonst durchaus unbekannten „Norico" herrührt, darf wohl auf Grund des Vorangehenden ohne weiteres gleich Null gesetzt werden.

S. 46. Die Angabe (Z. 2—3): „GÜNTHER on the authority of CHASLES gives an edition at Cologne c. 1510" ist nicht ganz genau. GÜNTHER zitiert (*Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter*, Berlin 1887, S. 306) nicht CHASLES, sondern den „CHASLES-Katalog", d. h. *Catalogue de la bibliothèque scientifique . . . de feu M. Michel Chasles* (Paris 1881, S. 203—204), und die Angabe daselbst: „absque nota, sed Coloniae, circa 1510" rührt höchstwahrscheinlich vom Verfasser des Katalogs her. Ob nicht der 1520 in Augsburg erschienene Traktat: *Algorismus novus de integris, de minutiis vulgaribus,*

de minutiis physicis . . ., von dem CHASLES ein Exemplar besaß, eine neue Auflage des von Herrn SMITH beschriebenen *Algorismus novus* ist?

S. 50. Ob man wirklich sagen kann, daß PELLIZZATI (1492) „actually used the decimal point", ist meines Erachtens zweifelhaft. Bei PELLIZZATI war der Punkt offenbar, ganz wie der kleine vertikale Strich bei BORGHI (1484), nur ein Scheidezeichen in betreff der Ziffern, die gar nicht in Betracht kommen konnten, wenn es sich darum handelte, die ganze Zahl des Quotienten zu berechnen.

S. 62. Die Bemerkung: „JORDANUS also wrote an Algorithmus demonstratus . . . the evidence shows that he [REGIOMONTANUS] only revised it and it may be due to JORDANUS" ist nunmehr veraltet (siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 24—37). Der von REGIOMONTANUS abgeschriebene *Algorithmus demonstratus* wird in älteren Handschriften einem sonst unbekannten „magister GERNARDUS" zugeschrieben, und die Algorismus-Schrift, die wahrscheinlich von JORDANUS herrührt, ist eine ganz andere.

S. 70. Die Lesung (Z. 12): „Anno XC" verdient kaum erwähnt zu werden, und es wäre zu empfehlen bei dem Verweise nicht „Abhandlungen, V", sondern „Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik **5**, 1890" zu zitieren; vgl. überdies Biblioth. Mathem. 6_3, 1905, S. 397—398.

S. 74. In betreff des *Enchiridion algorismi* von J. HUSWIRT erwähnt Herr SMITH auch „a French edition (CHASLES)". Vermutlich hat er seine Angabe aus GÜNTHERS *Geschichte des mathematischen Unterrichts im deutschen Mittelalter* entnommen, wo (S. 306, Fußnote 1) bemerkt wird: „CHASLES (a. a. O. S. 202 ff.) kannte auch einen französischen Druck des *Enchiridions*." Will man nun den Verweis bei GÜNTHER benutzen, so wird man leicht irregeführt, denn „CHASLES" a. a. O. bedeutet nicht die von GÜNTHER S. 401 unter „Mehrfach erwähnte Schriften" aufgeführte *Geschichte der Geometrie* (1839), sondern den *Catalogue de la bibliothèque scientifique . . . de feu M. MICHEL CHASLES* (Paris 1881), wo in der Tat S. 204 eine Auflage Paris 1535 des HUSWIRTschen Traktates verzeichnet ist. Ob Herr SMITH wirklich versucht hat, den Verweis bei GÜNTHER zu benutzen, weiß ich freilich nicht.

S. 76. In betreff der vier Namen (Z. 4—5) für Null bei HUSWIRT könnte vielleicht hinzugefügt werden, daß sie alle schon bei SACROBOSCO vorkommen.

S. 83. Über den hier erwähnten *Textus mathematicae communis* siehe oben die Bemerkung zu S. 44.

S. 85. Die von GÜNTHER erwähnte Ausgabe Münster 1505 des Rechenbuches von TZWIVEL existiert nicht. GÜNTHER verweist ausdrücklich auf „KÄSTNER, *Geschichte der Mathematik* **1**, S. 82 ff.", und daselbst wird 1507 als Druckjahr angegeben, so daß 1505 bei GÜNTHER lediglich ein Schreib- oder Druckfehler sein muß. Daß GÜNTHER als Druckort „Münster" angibt, beruht sicherlich auf KÄSTNERS Bemerkung in betreff des Widmungsschreibens: „Sie ist datiert Monasterii". Die von KÄSTNER beschriebene Ausgabe ist offenbar dieselbe wie die, welche Herrn SMITH vorgelegen hat, und daß es wirklich eine ältere Ausgabe gibt, muß ich bis auf weiteres in Abrede stellen.

S. 102. Über die Ausgabe 1522 von KÖBELS Rechenbuch siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 205—206, woraus hervorgeht, daß diese Ausgabe zum Teil als eine neue Bearbeitung betrachtet werden kann.

S. 110. Über die Geschichte des Jakobsstabs gibt es viele neuere Untersuchungen; siehe besonders M. CURTZE, *Die Abhandlung des* LEVI BEN GERSON

über Trigonometrie und den Jakobsstab; Biblioth. Mathem. 1898, S. 97—112.

S. 114. Die Bemerkung (Z. 1—3 v. u.): „with probably a second Venetian edition, 1548, under the title: Thesoro universale de abacho by lucha ātonio de Uberti, 8⁰" sollte meines Erachtens gestrichen werden, denn

a) bisher ist nur eine einzige Ausgabe Venedig 1548 in einer zuverlässigen bibliographischen Arbeit erwähnt, nämlich die von Boncompagni beschriebene;

b) diese Ausgabe enthält auf der Rückseite des letzten Blattes eine Tafel mit der Unterschrift: „Opus lucha ātonio de uberti fe ī uinetia";

c) am Ende des Titels dieser Ausgabe steht: „... il quale lib. se chiama Thesoro universale".

Es ist also höchstwahrscheinlich, daß die angebliche zweite Ausgabe Venedig 1548 nur ein Exemplar der von Boncompagni ausführlich beschriebenen ist.

S. 117. Johannes de Muris ist wahrscheinlich früher als c. 1310 geboren, da seine Arithmetik schon 1321 verfaßt zu sein scheint (vgl. Biblioth. Mathem. 1899, S. 51).

S. 123. Die Angabe, daß das Rechenbuch des Grammateus zum erstenmal 1518 zu Wien erschien, ist teils unrichtig, teils unsicher. Das Buch ist in Nürnberg gedruckt, wahrscheinlich 1521, obgleich das Vorwort 1518 in Wien geschrieben wurde (vgl. Biblioth. Mathem. **5**$_3$, 1904, S. 404).

S. 139. Man hat keinen Anlaß anzunehmen, daß Adam Rieses *Gerechent Büchlein* schon 1533 herausgegeben wurde. Die Angabe: „Durch Adam Riesen. 1533" auf dem Titelblatt der Ausgabe 1536 bedeutet sicherlich, daß das Manuskript im Jahre 1533 abgeschlossen worden ist.

S. 146. Z. 2 v. u. verzeichnet Herr Smith von Lazesios Arbeit eine Auflage 1526 und eine andere Auflage 1527, aber sicherlich handelt es sich um ein und dieselbe Auflage (vgl. was Herr Smith S. 148 Z. 6 bemerkt).

S. 151—152. Über die verschiedenen Auflagen von Rudolffs Rechenbuch siehe Biblioth. Mathem. **9**$_3$, 1908/9, S. 158—159.

S. 154. Es gibt sicherlich nur eine in Straßburg gedruckte Auflage von J. Wolphius' *Rudimenta arithmetices.* Ich besitze selbst ein Exemplar derselben; der Titel lautet:

> Rudimenta || arithmetices brevissi- || *me, & summa cum luce conscripta.* || *Authore* Joanne Wolphio *Hers* || *brugiense.* || ∗ Item ∗ || radicum extrahen- || *darum, & progressionum arithmeti-* || *carū methodus, per quendam* || *Mathematices studio-* || *sum nunc primum* || *adiecta.* || Excvsvm Argent. || M. D. XXXIX.
>
> Oktav, 44 numerierte Blätter; am Ende des Bl. 44ᵇ steht: Argent. ex officina || Knobloch. || M. D. XL.

S. 171. Hinsichtlich der ersten Auflage von Rieses *Gerechent Büchlein* siehe oben die Bemerkung zu S. 139.

S. 173. Die zwei Angaben (Z. 1 und 3 v. u.): „Schonerus (editor)" und „Anonymus (sometimes attributed to Regiomontanus)" beziehen sich auf ein und dieselbe Schrift (*Algorithmus demonstratus*, ed. J. Schoner, 1534).

S. 178. Die Bemerkung, daß der *Algorithmus demonstratus* „a late variation of the Boethian works" ist, sollte gestrichen werden. In Wirklichkeit handelt es sich um eine Erläuterung der arabischen Rechenkunst, und nur ganz beiläufig finden sich im 2. Teile einige Sätze über Quadrat- und Kubikzahlen.

z. B. $(x + 1)^3 - x^3 = 3x(x + 1) + 1$. Die von Herrn SMITH nach einem ungenannten Verfasser zitierte Auflage 1533 existiert nicht.

S. 180. Die erste Ausgabe von MISRACHIS Rechenbuch erschien nach STEINSCHNEIDER 1534 (vgl. Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 205). Der Übersetzer ins Lateinische hieß SCHECKENFUCHS (nicht Schreckfuchs).

S. 183. Z. 22—23 ist wohl 1544 Schreibfehler statt 1545; eigentlich steht auf dem Titelblatt nicht 1545, sondern M. CCCCC. XLV (vgl. die von Herrn SMITH zitierte Stelle der Biblioth. Mathem.).

S. 186. Die einmaleinsähnliche Tafel des NIKOMACHOS ist nicht eine Multiplikationstabelle (vgl. Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, S. 139—140).

S. 195. Die „various editions" der *Practica arithmeticae* CARDANOS existieren sicherlich nicht (siehe oben S. 272). — Es ist wenig wahrscheinlich, daß die eigentümlichen Zahlenzeichen des NOVIOMAGUS aus dem Mittelalter herstammen (siehe Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 290).

S. 233. Die angebliche Auflage Straßburg 1540 von J. SCHEYBLS Traktat *De numeris* existiert nicht. Seine Algebra erschien zum erstenmal 1550 (siehe unten die Bemerkung zu S. 252).

S. 247. Eine deutsche Ausgabe von JOHANN FISCHERS Rechenbuch (vermutlich die erste) erschien schon 1554 zu Leipzig mit dem Titel: *Ein kurtz Rechenbüchlein für die anfahende Schüler, gemacht durch JOHANM FISCHER.* Gedruckt zu Leipzig bey Georg Hantzsch 1554 (8°, 16 Blätter; ein Exemplar in der Königlichen Bibliothek in Berlin, siehe H. GROSSE, a. a. O. S. 35).

S. 249. Im Jahre 1549 erschien zu Breslau auch ein Rechenbuch von CASP. WUEYGLERUS (WEIGLER) mit dem Titel: *Prima arithmetices practicae rudimenta in usum et utilitatem juventutis scholasticae Vratisleviensis collecta* (ein Exemplar in der Stadtbibliothek in Breslau, siehe H. GROSSE, a. a. O. S. 67—68).

S. 252. Z. 23 lies 233 statt 223. Die Algebra SCHEYBLS erschien zum erstenmal 1550 in Basel als Einleitung (S. 1—76) zu SCHEYBLS Ausgabe der 6 ersten Bücher der Elemente; die von Herrn SMITH beschriebene Ausgabe Paris 1551 ist ein Nachdruck.

S. 260. Die Auflage 1571 der RUDOLFFschen *Coss* ist sicherlich nur eine neue Titelauflage; in dem von mir eingesehenen Exemplar steht am Ende des Buches das Druckjahr 1554. Warum wird nicht hier die S. 226 zitierte Auflage 1615 erwähnt? Der Druckort dieser Auflage, von der ich ein Exemplar besitze, scheint Herrn SMITH unbekannt gewesen zu sein, und ich bringe darum hier den vollständigen Titel zum Abdruck:

> Die Coß Christoffs Rudolffs || Mit schönen Exempeln der Coß. || Durch || Michael Stifel || Gebessert vnd sehr gemehrt. [Holzschnitt.] Zu Amsterdam Getruckt bey Wilhelm Janson. || Im Jar 1615.
>
> Oktav, (8) + 827 + (11) S.

S. 292. Die zwei angeblichen Auflagen 1559 und 1560 der *Logistica* BUTEOS sind sicherlich ein und dieselbe Auflage mit geändertem Druckjahr. Die Schrift BUTEOS, die 1554 erschien, heißt nicht „Opera", sondern *Opera geometrica et in jure civili;* sie gehört also nicht den *Rara arithmetica* an.

S. 295, 298. Daß SIMON JACOBS *Rechenbuch auff den Linien vñ Ziffern* erstmalig 1560 erschien, ist meines Erachtens höchst unwahrscheinlich. Auf dem von Herrn SMITH im Faksimile wiedergegebenen Titelblatt der Auflage 1565 steht ja „jetzt erstmals getruckt" (vgl. Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 85—86). Auch die Ausgabe 1569 existiert sicherlich nicht. Die Ausgabe 1600 ist in

Wahrheit die letzte, obgleich es Exemplare dieser Ausgabe mit dem Druckjahr 1612 auf dem Titelblatt gibt.

S. 315. Die Algebra des NUÑEZ erschien erst 1567 (das Vorwort ist freilich von 1564 datiert), und es gibt sicherlich nur eine einzige Auflage des Buches (siehe H. BOSMANS, Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 155—156). Die *Opera* (1592) enthalten nicht die Algebra.

S. 319. Im Jahre 1565 erschien zu Breslau ein Rechenbuch von MATTHÄUS NEFE mit dem Titel: *Arithmetica. Zwei Newe Rechenbücher, das Erste auff der Linien vnd Federn* ... Gedruckt zu Breßlaw, durch Crispinum Scharffenberg MDLXV (ein Exemplar in der Comenius-Bibliothek in Leipzig, siehe GROSSE, a. a. O. S. 59). Nach MURHARD (a. a. O. I, S. 173) erschien eine Auflage 1566 zu „Preslaw" (!) und vielleicht ist es diese Angabe, die Herrn SMITH veranlaßt hat, S. 322 einen nicht existierenden Verfasser „Mathäus Nessen (Nesse)" zu erwähnen.

S. 320. Über die verschiedenen Auflagen der Arithmetik JEAN TRENCHANTS (die erste Auflage erschien schon 1558) siehe Biblioth. Mathem. 2_3, 1901, S. 356—357. Die von Herrn SMITH beschriebene Ausgabe 1578 scheint eigentlich die fünfte zu sein.

S. 325. Nach der Monographie des Herrn H. BOSMANS (Annales de la société scientifique de Bruxelles **32**:2, 1908, S. 7 des Sonderabdrucks) ist das 1567 herausgegebene Rechenbuch des NIKOLAUS PETRI: *Arithmetica. Practique omme cortelycken te lerē chijpherē* eine andere, viel kürzere Arbeit als das von Herrn SMITH beschriebene Rechenbuch, dessen erste Auflage 1583 erschien, so daß die Jahreszahl „1576" Z. 17 unrichtig ist; anderseits gibt es nach KÄSTNER (a. a. O. **1**, S. 146) auch eine Auflage 1598.

S. 347. Das hier erwähnte Rechenbuch von JOHANN SECKERWITZ erschien weit früher als 1574. SECKERWITZ war schon vor 1525 Rechenmeister in Breslau (siehe Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 204), und die zweite Auflage seines Buches wurde 1547 gedruckt (siehe oben S. 268); eine dritte Auflage erschien 1557 (siehe GROSSE, a. a. O. S. 67). Auf dem Titelblatt der Auflage 1574 steht nach MURHARD (a. a. O. I, S. 174): „JOHANN SEKGERWITZ zur Zeit zu Bresslav Rechemeisters Rechenbüchlein", aber nach GROSSE war SECKERWITZ schon 1547 gestorben.

S. 359. Z. 19 ist offenbar „c. 1557" Druckfehler statt „c. 1577", aber es ist höchst unsicher, ob das Rechenbuch JUNGES etwa 1577 erschien (vgl. oben S. 268).

S. 361. Es gibt auch eine Ausgabe 1586 von *URSTITII Arithmetica;* der Titel lautet nach meinem Exemplar:

> ELEMENTA ‖ ARITHME- ‖ TICAE, LOGICIS ‖ LEGIBVS DE- ‖ DVCTA, ‖ In usum Academiae Basil. *Opera & studio* ‖ CHRISTIANI VRSTITII, ‖ *Mathematicarum professoris.* ‖ Editio secunda, priore locupletior & ‖ emendatior. [Holzschnitt.] *BASILEAE,* ‖ PER SEBASTIANVM ‖ HENRICPETRI.
>
> 8°, 293 S. + 1 Bl. — Das letzte Blatt enthält auf der Vorderseite: „Basileae Helvetiorum per Sebastianvm Henricpetri, anno humanitatis filii Dei C|Ɔ. |Ɔ. XXCVI. Mense Martio" und auf der Rückseite ein Holzschnitt.

S. 364. Die hier beschriebene Auflage Turin 1585 der *Speculationes mathematicae* BENEDETTIS ist nach RICCARDI (a. a. O. Supplem. Sp. 165) nur eine neue Titelauflage; RICCARDI erwähnt außerdem (Supplem. Sp. 92), teils daß es eine neue Titelauflage mit dem Druckjahr 1586 gibt, teils (I:1 Sp. 112) daß die Auflage Venedig, Barezzi 1599 ebenfalls nur eine neue Titelauflage ist.

S. 389. Z. 2 v. u. ist wohl 1565 Druckfehler statt 1563? (vgl. Riccardi, a. a. O. I:1, Sp. 251).

S. 404. Die Angabe, daß Siegmund Suevus „c. 1550" geboren wurde, ist ungenau; Suevus ist am 26. Juli 1526 zu Freystadt in Schlesien geboren und starb am 15. Mai 1596 (siehe z. B. Grosse, a. a. O. S. 30—33).

S. 412. Johann Seckerwitz war nicht Rechenmeister in Nürnberg, sondern in Breslau (siehe oben die Bemerkung zu S. 347).

S. 421. Nach Bierens de Haan (*Bibliographie neerlandaise ... des ... sciences mathématiques,* Rome 1883, S. 247, 248) war Jacob van der Schuere 1576 zu Menen geboren und lebte noch 1643, aber vielleicht beruht diese Angabe nur auf der Unterschrift („Out 67. Jaer") des Porträts der Auflage 1643; Herr Smith gibt an, daß van der Schuere „c. 1550—1620" lebte, vermutlich auf Grund des Umstandes, daß das Vorwort der Auflage 1625 vom Sohne herrührt, was darauf hindeutet, daß Jacob damals schon gestorben war. Außer den von Herrn Smith erwähnten Auflagen von van der Schueres Rechenbuch gibt es nach Bierens de Haan Ausgaben Haerlem 1615, Goude 1630 (vielleicht gehört das von Herrn Smith S. 423 beschriebene Exemplar ohne Titelblatt dieser Auflage?), Amsterdam 1630, Goude 1639.

Außer den Beschreibungen der älteren gedruckten Rechenbücher der Plimptonschen Bibliothek bringt Herr Smith (S. 431—494) noch ein Verzeichnis der Manuskripte arithmetischen Inhalts dieser Bibliothek nebst ausführlichen Inhaltsangaben und zahlreichen Faksimiles. Auch dies Verzeichnis könnte zu verschiedenen Bemerkungen Anlaß geben, aber ich beschränke mich hier auf die folgenden.

S. 435. Die Angabe, daß Paolo Dagomari „according to some writers in 1365" starb, sollte gestrichen werden, und statt „in 1374" wäre vielleicht besser „in 1373 or 1374" zu setzen (siehe B. Boncompagni, *Intorno ad alcune opere di Leonardo Pisano,* Roma 1854, S. 321).

S. 451. Es ist durchaus unrichtig, daß die Grabschrift Sacroboscos irgendeinen Aufschluß über sein Todesjahr gibt. Die drei von Herrn Smith zitierten Verse geben ja nur an, daß Sacrobosco entweder 1244 oder 1256 die Zeiteinteilungen erörterte („tempora discrevit", wörtlich: die Zeitabschnitte trennte), und wie Paul Tannery schon 1897 bemerkt hat (*Le traité du quadrant de maître Robert Anglès,* Paris 1897, S. 23), sind diese Verse ein Auszug aus dem Schluß des „Computus ecclesiasticus". Nach Tannery bringe ich hier noch einmal diesen Schluß vollständig zum Abdruck:

O qui perpetua mundum ratione gubernas,
Terrarum celique sator, qui tempus ab euo
Ire iubes, stabilisque manens das cuncta moueri,
Tu stabilire velis opus hoc per temporis euum.
M. Xristi bis C quarto deno quater anno
De Sacro bosco discreuit tempora ramus,
Gracia cui nomen dederat diuina Iohannis.
Annuat hec nobis huius sic carpere fructum
Ecclesie Xristi quod nos huic fructicemus.
Explicit.

S. 454. In betreff des anonymen Traktats „Flores aritmetrice", der nach Herrn Smith etwa 1450 geschrieben ist, weise ich darauf hin, daß G. Bianchini nach seiner einen Aussage eine arithmetisch-algebraische Schrift mit dem Titel „Liber florum" verfaßt hat (siehe Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, S. 154).

S. 459. Herr SMITH bemerkt, daß der S. 459—463 beschriebene Traktat vielleicht von R. CANACCI verfaßt ist. Dies ist gewiß sehr möglich; anderseits verdient hervorgehoben zu werden, daß dieser Traktat (siehe Tafel IX der *Rara arithmetica*) genau die Notizen über GUGLIELMO DE LUNIS enthält, die F. GHALIGAI in seiner *Pratica d'arithmetica* (ed. 1548, Bl. 71ª) mitteilt, und daß sich GHALIGAI dabei auf BENEDETTO DA FIRENZE beruft, der gerade etwa 1460 lebte. Es wäre also denkbar, daß der Traktat von BENEDETTO herrührte.

S. 474. Die Angabe, daß LEONARDO MAINARDI Verfasser der *Artis metrice practice compilatio* ist, beruht auf einer Verwechslung, die schon 1904 von A. FAVARO (Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 337) berichtigt wurde. Der Verfasser hieß in Wirklichkeit LEONARDO DA CREMONA oder LEONARDO DE' ANTONII und lebte früher als MAINARDI; er wurde wahrscheinlich etwa 1380 geboren. Folglich soll S. 474—475 etwa eine halbe Seite gestrichen werden.

Es ist nicht ganz richtig zu sagen, daß die „Artis metrice practice compilatio" „a treatise on trigonometry" ist. Wie aus dem Titel hervorgeht, handelt es sich um ein Lehrbuch der praktischen Geometrie, und in den drei Kapiteln wird gelehrt, wie man bzw. Längen, Flächen und Körper messen soll. Das erste Kapitel könnte vielleicht als eine Anwendung der Trigonometrie auf Längenmessungen bezeichnet werden, aber in den zwei übrigen Kapiteln kommen trigonometrische Rechnungen selten vor.

Am Schluß enthalten die *Rara arithmetica* ein chronologisches und ein alphabetisches Register.

Wie ich schon oben hervorgehoben habe, hat die Arbeit des Herrn SMITH einen großen Wert als beschreibender Bibliothekskatalog, und für die wirklich exakte mathematisch-historische Forschung kann sie auf ihrem Gebiete fast als epochemachend bezeichnet werden. Auch als Bibliographie wird die Arbeit nützlich werden, freilich in erster Linie für die Sachkundigen, die die Arbeit als Ausgangspunkt für weitere Nachforschungen anwenden werden. Als bibliographische Quellenschrift soll dagegen die Arbeit, sofern es sich um Bücher handelt, die nicht in der PLIMPTONschen Bibliothek vorhanden sind, nur mit Vorsicht benutzt werden. Immerhin muß man Herrn SMITH als ein Verdienst zurechnen, daß er nicht die große Mühe gescheut hat, die erforderlich gewesen ist, um die zahlreichen bibliographischen und historischen Notizen der *Rara arithmetica* zu sammeln, und es wäre sehr zu wünschen, daß er recht bald Gelegenheit bekäme, auf Grund dieses Materials eine wirklich zuverlässige Bibliographie der älteren arithmetischen Literatur zu bearbeiten.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Nachschrift. Für diese Rezension habe ich die Aushängebogen der *Rara arithmetica* benutzt, die mir der Verfasser zur Verfügung gestellt hat. Nach der Beendigung des Druckes der Rezension hat er mir mitgeteilt, daß er am Ende des Buches Verbesserungen hinzugefügt hat; vielleicht könnten dadurch einige der obigen Bemerkungen in Fortfall kommen.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Leipzig. 8°. [1
27 (1909). — [Rezension des Heftes 25:] Deutsche Literaturz. 29, 1908, 3066—3067. (F. Engel.)

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [2
9_3 (1908): 2.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, J. Cardinaal, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [3
Tables des matières contenues dans les cinq volumes XI—XV (1903—1907). Suivies d'une table générale par noms d'auteurs. Amsterdam 1908. (3) + 164 S.

Loria, G., Sur les moyens pour faciliter et diriger les études sur l'histoire des mathématiques. [4
Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1908/9, 8—18. — Communication faite au IV. Congrès des mathématiciens (Rome, Avril 1908).

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1^2 (1907). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 139—147. (G. Eneström, H. Suter.) — 2^2 (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 147—167. (G. Eneström.) — 3^2 (1901). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 168—175. (G. Eneström.) [5

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, herausgegeben von M. Cantor. Vierter Band. Von 1759 bis 1799 (1908). [Rezension:] L'enseignement mathém. 11, 1909, 69. [6

Ball, W. W. R., Histoire des mathématiques. Edition française, traduite par L. Freund. II (1907). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 244—245. (D. E. Smith.) [7

Günther, S., Geschichte der Mathematik. I (1908). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 245—248. (D. E. Smith.) [8

***Maroger, A.,** Leçons critiques et historiques sur les fondements des mathématiques. Paris, Vuibert et Nony 1908. [9
8°, XV + 204 S.

Müller, Felix, Führer durch die mathematische Literatur mit besonderer Berücksichtigung der historisch wichtigen Schriften. [10
Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wiss. 27, 1909. X + 252 S. — [7 Mk.] — [Rezension:] Mathesis 8_3, 1908, 268—269.

Wölffing, E., Wer hat über Kettenbrüche gearbeitet? [11
Stuttgart, Mathem.-naturw. Verein., Mitteil. 10₂, 1908, 18—32, 35—38.

M[ansion], P., Sur le calcul de π. [12
Mathesis 8₃, 1908, 236—242. — Historische Notizen.

Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches. I (1908). — [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 15₃, 1909, 274—277. (H. Bosmans.) — L'enseignement mathém. 10, 1908, 524—525. (H. F.) [13

Vargas y Aguirre, J. de, Catálogo general de curvas. Comprende sumariamente la historia, ecuación, forma, propriedades y bibliografía de todas las curvas de denominación especial. Memoria premiada por la real academia de ciencias exactas, físicas y naturales en el concurso ordinario à premios del año 1897. [14
Madrid, Acad. de ciencias, Memorias 26, 1908. (3) + 1030 + (1) S.

Haas, A. E., Die Entwicklungsgeschichte des Satzes von der Erhaltung der Kraft. Wien, Hölder 1909. [15
8°, (3) + 116 S.

Haas, A. E., Die historische Analyse des Energieprinzipes. [16
Annalen der Naturphilosophie 7, 1908, 410—416.

Timerding, H. E., Die historische Entwicklung des Kraftbegriffes. [17
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 390—405.

Vailati, G., Sullo sviluppo storico della distinzione tra „peso" e „massa". [18
Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1908, 48—51.

Duhem, P., Sur la découverte de la loi de la chute des graves. [19
Paris, Acad. d. sc., Comptes rendus 146, 1908, 908—912.

Duhem, P., *Σωζειν τα φαινομενα.* Essai sur la notion de théorie physique de Platon à Galilée. Paris 1908. [20
8°, (3) + 143 + (1) S. — Sonderabzug aus den „Annales de la philosophie chrétienne".

Arrhenius, S., Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten (1908). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 20, 1909; Lit.-Ber. 9. (St. M.) [21

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik (1908). [Rezension:] Arch. der Mathem. 14₃, 1909, 261. (E. Jahnke.) — Deutsche Literaturz. 30, 1909, 380—381. (M. Cantor.) [22

b) Geschichte des Altertums.

Levi, B., Osservazioni e congetture sopra la geometria degli indiani. [23
Biblioth. Mathem. 9₃, 1908, 97—105.

Haas, A. E., Die Grundlagen der antiken Dynamik. [24
Archiv für die Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1908, 19—47.

Naber, H. A., Das Theorem des Pythagoras, wiederhergestellt in seiner ursprünglichen Form und betrachtet als Grundlage der ganzen Pythagoreischen Philosophie. Haarlem, Visser 1908. [25
8°, XII + 239 S. + 3 Taf. — [7 Mk.]

Heath, T. L., The thirteen books of Euclid's Elements translated from the text of Heiberg with introduction and commentary. Volume 1—3. Cambridge, University press 1908. [26
8°. 1 („Introduction and books I, II"): X + 424 S. + Facsim. — 2 („Books III—IX"): (3) + 436 S. — 3 („Books X—XIII and Appendix"): (3) + 554 S.

Reinach, Th., Archimède. Des théorèmes mécaniques ou de la méthode (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 565—566. (A. A. Björnbo.) [27

Heiberg, J. L., *Δεύτεραι φροντίδες.* [28
Festskrift til H. G. Zeuthen 15. Februar 1909, København 1909, 63—65. — Textverbesserungen zu Archimedes' Ephodos.

Tannery, P. et Vaux, C. de, L'invention de l'hydraulis. [29
Revue des études grecques 21, 1908, 326—340.

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadraturen des Antiphon und des Hippokrates (1907). [Rezension:] *Bruxelles*, Soc. scient., Revue des quest. scient. 15₃, 1909, 294—301. (H. Bosmans.) — Mathesis 9₃, 1909, 11—14. (H. Bosmans.) [30

c) Geschichte des Mittelalters.

Smith, D. E., The Ganita-Sara-Sangraha of Mahaviracarya. [31
Biblioth. Mathem. 9₃, 1908/9, 106—110.

Björnbo, A. A., Al-Chwârizmî's trigonometriske Tavler [32
Festskrift til H. G. Zeuthen 15. Februar 1909, København 1909, 1—17.

Suter, H., Die Abhandlung Qosta ben Luqas und zwei andere anonyme über die Rechnung mit zwei Fehlern und mit der angenommenen Zahl. [33
Biblioth. Mathem. 9₃, 1908/9, 111—122.

Wiedemann, E., Bestimmungen des Erdumfanges von al Bêrûnî. [34
Archiv für Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik 1, 1908/9, 66—69.

Eneström, G., Über die „Arithmetica" des Jordanus Nemorarius. [35
Biblioth. Mathem. 9₃, 1908/9, 175. — Anfrage.

*Bäumker, Cl., Witelo, ein Philosoph und Naturforscher des 13. Jahrhunderts. Münster, Aschendorff 1908. [36
Beiträge zur Geschichte der Philosophie des Mittelalters 3 : 2.

Thompson, S. P., Peter Peregrinus de Maricourt and his Epistola de magnete (1907). [Rezension:] Arch. der Mathem. 14_3, 1908, 116. (H. SAMTER.) [37

d) Geschichte der neueren Zeit.

Christensen, S. A., Studiet af Euclids Elementer i Danmark. [38
Festskrift til H. G. Zeuthen 15. Februar 1909, København 1909, 18—26.

Bosmans, H., L'algèbre de Pedro Nuñez. [39
Porto, Acad. polytechn., Annaes scient. 3, 1908, 222—271.

Amodeo, F., Il trattato delle coniche di Francesco Maurolico. [40
Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 123—138.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galileo Galilei. XXII. Michele Coignet. [41
Venezia, Istituto Veneto, Atti 68:2, 1908, 1—16

Bosscha, J., Simon Marius. Réhabilitation d'un astronome calomnié. [42
Archives néerlandaises d. sc. 12_2, 1907, 490—527.

Favaro, A., Galileo Galilei e la determinazione del peso dell'aria. [43
Rivista di fisica (Pavia) 17, 1908, 577—588.

***Cioni, M.,** I documenti Galileiani del s uffizio di Firenze. Firenze 1908. [44
4°, XXXVII + 76 S. — [Rezension:] Archivio storico italiano 42_5, 1908. 19 S. (A. FAVARO.)

Favaro, A., Serie decimanona di scampoli Galileiani. [45
Padova, Accad. d. sc., Atti e memorie 25, 1908/9. 25 S.

Bopp, K., Die Kegelschnitte des Gregorius a St. Vincentio (1907). [Rezension:] Arch. der Mathem. 14_3, 1908, 102—103. (H. WIELEITNER.) [46

***Jungmann, K.,** Die Weltentstehungslehre des Descartes. [47
8°, (2) + 51 S. — [1 Mk.] Berner Studien zur Philosophie und ihrer Geschichte 54. — [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 213—214. (A. HOFFMANN.)

Gram, J. P., Nogle Bemaerkninger om Fermats Talteori. [48
Festskrift til H. G. Zeuthen 15. Februar 1909, København 1909, 48—62.

Oeuvres de BLAISE PASCAL publiées suivant l'ordre chronologique avec documents complémentaires, introductions et notes, par L. BRUNSCHVICG et P. BOUTROUX. Tome 1—3. Paris, Hachette 1908. [49
8°. 1: (5) + LXV + (1) + 406 S. — 2: (5) + 574 S. — 3: (5) + 600 S. — [22½ fr.]

Thirion, J., Pascal. L'horreur du vide et la pression atmosphérique. [50
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 15_3, 1909, 149—201.

Geer, P. van, Hugeniana geometrica. VI. [51
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1909, 444—464.

Gray, G. J., A bibliography of the works of sir Isaac Newton. Second edition (1907). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 188—190. (D. E. SMITH.) [52

Haas, A. E., Die Begründung der Energetik durch Leibniz. [53
Annalen der Naturphilosophie 7, 1908, 373—386.

Müller, Felix, Über bahnbrechende Arbeiten Leonhard Eulers aus der reinen Mathematik (1907). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908, 179—183. (G. ENESTRÖM.) [54

Fehr, H., Pour la publication des oeuvres d'Euler. [55
L'enseignement mathém. 10, 1908, 511—512.

Eneström, G., Randnoten zu Felix Müllers bibliographischen Artikeln über Euler. [56
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 17, 1908, 405—407.

Eneström, G., Über die Zusätze zur zweiten Auflage (1787) von Eulers Differentialrechnung. [57
Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 175—176. — Anfrage.

Bosmans, H., Sur l'édition Belge des Oeuvres d'Euler. [58
Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 177—178. — Antwort auf eine Anfrage.

Stäckel, P. und Ahrens, W., Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers (1908). [Rezension:] Arch. der Mathem. 14_3, 1909, 250—251. (E. HOPPE.) [59

Royal society of London. Catalogue of scientific papers 1800—1900. Subject index. I. Pure mathematics (1908). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 192—195. (G. A. MILLER.) [60

Mansion, P., Gauss contre Kant sur la géométrie non Euclidienne. [61
Revue néo-scolastique 15, 1908, 441—453. Auch als Anhang zur „Mathesis" 1908 veröffentlicht.

Lucas de Peslouan, Ch., N.-H. Abel (1906). [Rezension:] Monatsh. für Mathem. 20, 1909; Lit.-Ber. 25. — Nyt Tidsskr. for Mathem. 19, 1908, B: 23—24. (C. J.) [62

Mansion, P., Sur une légende relative à Abel. [63
Bruxelles, Soc. scient., Annales 32:1, 1908, 182—188. Auch als Anhang zur „Mathesis" 1909 veröffentlicht. — Über die Geschichte des „Memoire sur une propriété générale d'une classe très étendue de fonctions transcendantes".

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker (1907). [Rezension:] Arch. der Mathem. 14_3, 1908, 118. (H. SAMTER.) [64

Tannery, J., Manuscrits et papiers inédits de Galois (1908). [Rezension:] *New York*, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 249—250. (L. E. DICKSON.) [65

Krazer, A., Zur Geschichte des Umkehrproblemes der Integrale. Festrede bei dem feierlichen Akte des Rektoratswechsels an der Technischen Hochschule zu Karlsruhe am 18. November 1908. [Karlsruhe 1909.] [66
4°, (2) + 35 S. [Wieder abgedruckt:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 44—75.

Picard, E., La mathématique dans ses rapports avec la physique (1908). [Polnische Übersetzung:] Wiadomości matem. 12, 1908, 185—192. [67

Gutzmer, A., Geschichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung. [68
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 10 : 1, 1909, 1—49. — Wiederabdruck der 1904 erschienenen Schrift (siehe Biblioth. Mathem. 5_3, 1904, S. 424).

[Tannery, Madame **M.,]** Liste des travaux de Paul Tannery précédée de notices nécrologiques par J. Tannery et P. Duhem. [69
Bordeaux, Soc. d. sc., Mémoires 4_6, 1908, 269—382. + Porträt. — Das Schriftverzeichnis beginnt S. 31.

Bulletin des sciences mathématiques. Tables générales des années 1877 à 1906. Paris, Gauthier-Villars 1908. [70
8°, (3) + 66 S.

Wölffing, E., Generalregister des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung Band I—X. [71
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber 10 : 1, 1909, 51—106.

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik (1908). [Rezension.] Monatsh. für Mathem. 20, 1909; Lit.-Ber. 24. [72

e) Nekrologe.

Stanislaus **Kepiński** (1867—1908). [73
Wiadomości matem. 12, 1908, 161—167 [mit Porträt]. (K. ZORAWSKI.)

Georg **Krebs** (1833—1907). [74
Zeitschr. für mathem. Unterr. 39, 1908, 608—609.

Georg **Sidler** (1831—1907). [75
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr 53, 1908, 1—32 [mit Schriftverzeichnis] + Porträt. (F. RUDIO.)

f) Aktuelle Fragen.

Dyck, W. von, Die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften. Vortrag (1908). [Wieder abgedruckt.] *Palermo*, Circolo matem., Rendiconti 27, 1909, 75—86. [76

d'Ocagne, M., Les femmes dans la science. [77
Bruxelles, Soc. scient., Revue des quest. scient. 15_3, 1909, 64—91.

[Internationaler Mathematikerkongreß in Rom 1908.] [78
Zeitschr. für das Realschulwesen 33, 1908. (L. SCHRUTKA.)

[Deutsche Mathematiker-Versammlung in Köln 1908.] [79
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1908, 117—119. (R. G. D. RICHARDSON.) — L'enseignement mathém. 10, 1908, 508—509. (H. F.) — Naturwiss. Rundschau 23, 1908, 606—607. (M. KUTH.)

[Italienische Mathematiker-Versammlung in Florenz 1908.] [80
L'enseignement mathém. 11, 1909, 55—60.

[Spanische Mathematiker-Versammlung in Zaragoza 1908.] [81
L'enseignement mathém. 11, 1909, 60—61.

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Professor R. C. Archibald in Wolfville zum Professor der Mathematik an der „Brown university" in Providence, R. I.

— Ingenieur Baeschlin in Bern zum Professor der Geodäsie und Topographie am Polytechnikum in Zürich.

— Professor J. Bauschinger in Berlin zum Professor der Astronomie an der Universität in Straßburg.

— P. Boutroux in Montpellier zum Professor der Mechanik an der Universität in Poitiers.

— Professor E. Delassus in Besançon zum Professor der Mechanik an der Universität in Bordeaux.

— Dozent A. Denizot in Lemberg zum Professor der allgemeinen Mechanik an der Universität daselbst.

— Professor M. Disteli in Dresden zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Karlsruhe.

— Dr. L. A. Howland zum Professor der Mathematik an der „Wesleyan university".

— Dr. H. Husson in Rennes zum Professor der Mechanik an der Universität in Caen.

— Dr. L. Kollross in Chauxdefonds zum Professor der darstellenden Geometrie am Polytechnikum in Zürich.

— Professor E. Landau in Berlin zum Professor der Mathematik an der Universität in Göttingen.

— Privatdozent E. Less in Berlin zum Professor der Meteorologie an der Universität daselbst.

— Professor R. C. Maclaurin in New York zum Präsidenten des „Massachusetts institute of technology" in Boston.

— Direktor D. Perrine am „Lick observatory" zum Direktor der Sternwarte in Cordoba.

— Privatdozent F. Rusl in Prag zum Professor der Mathematik an der tschechischen Technischen Hochschule daselbst.

— Privatdozent O. Spiess in Basel zum Professor der Mathematik an der Universität daselbst.

— Dozent J. Stark in Hannover zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Aachen.

— J. Vincent zu Uccle bei Brüssel zum Direktor der meteorologischen Abteilung des Observatoriums daselbst.

— Professor C. A. Waldo in Lafayette zum Professor der Mathematik an der „Washington university" in St. Louis.

— L. E. Woodman zum Professor der Physik an der Universität von Maine.

Todesfälle.

— Emil Aschkinass, Privatdozent der Physik an der Universität in Berlin, geboren in Berlin den 8. Januar 1873, gestorben den 1. März 1909.

— William Edward Ayrton, Professor der Elektromechanik am „Central technical college" in London, geboren in London den 14. September 1847, gestorben daselbst den 8. November 1908.

— Augustin Cambier, früher Generalinspektor des belgischen Unterrichtswesens, geboren in Mons 1835, gestorben in Brüssel den 7. Januar 1909.

— Michele Capitò, Professor der Hydraulik an der „Scuola d'applicazione per gl'ingegneri" in Palermo, geboren in Palermo den 24. Oktober 1836, gestorben daselbst den 1. Januar 1909.

— Giuseppe Ciscato, Professor der theoretischen Geodäsie an der Universität in Padua, geboren zu Malo den 19. Februar 1860, gestorben im Dezember (?) 1908.

— Cecil Dolmage, Astronom, gestorben im November (?) 1908.

— George Gore, Elektrophysiker, Direktor des Instituts für wissenschaftliche Forschung in Birmingham, geboren zu Blackfriars den 22. Januar 1826, gestorben in Birmingham den 20. Dezember 1908.

— Andrew Graham, früher Assistent an der Sternwarte in Cambridge, geboren zu Fermanagh (Irland) den 8. April 1815, gestorben im November 1908.

— Thomas Gray, Professor der Mechanik am „Rose polytechnic institute" in Terre Haute, Ind., geboren 1850, gestorben in Terre Haute den 19. Dezember 1908.

— Hugo Hertzer, früher Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Berlin, geboren in Aschersleben den 10. April 1831, gestorben den 16. November 1908.

— Yosiziro Homma, Professor der Physik an der höheren Normalschule in Hirosima, geboren in Tokyo den 28. Januar 1870, gestorben daselbst den 23. November 1908.

— George Washington Hough, Professor der Astronomie an der „Northwestern university" zu Evanston-Chicago, geboren zu Tribes Hill, N. Y., den 24. Oktober 1836, gestorben in Chicago den 1. Januar 1909.

— Alphonse Legoux, Professor der Mechanik an der Universität in Toulouse, geboren zu Tonnerre (Yonne) den 22. Oktober 1841, gestorben den 6. Januar 1909.

— Junius Massau, Professor der Mechanik an der Universität in Gent, geboren zu Gosselies den 9. April 1852, gestorben in Gent den 10. Februar 1909.

— Hermann Minkowski, Professor der Mathematik an der Universität in Göttingen, geboren in Alexoten (Rußland) den 22. Juni 1864, gestorben in Göttingen den 12. Januar 1909.

— Percy Molesworth, Astronom, gestorben in Trincomali (Ceylon) den 25. Dezember 1908, 42 Jahre alt.

— Giacinto Morera, Professor der höheren Mechanik an der Universität in Turin, geboren in Novara den 18. Juli 1856, gestorben den 8. Februar 1909.

— Josef Maria Pernter, Professor der kosmischen Physik an der Universität in Wien, geboren in Neumarkt (Tirol) den 15. März 1848, gestorben zu Arco (Tirol) den 20. Dezember 1908.

— E. Rousseau, Professor der Physik an der freien Universität in Brüssel, gestorben den 23. Dezember 1908.

— Otto Rupp, Professor der darstellenden Geometrie an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn, geboren zu Neureisch (Mähren) den 29. April 1854, gestorben im Januar 1909.

— Anton Schell, früher Professor der praktischen Geometrie an der Technischen Hochschule in Wien, geboren zu Baden bei Wien den 17 November 1835, gestorben im Februar 1909.

— Adolf Sprung, Vorsteher des Meteorologisch-magnetischen Observatoriums in Potsdam, geboren zu Kleinow bei Perleberg den 5. Juni 1848, gestorben in Potsdam im Januar 1909.

— Charles E. Stuyvaert, Assistent an der Sternwarte zu Uccle bei Brüssel, gestorben den 18. November 1908, 57 Jahre alt.

— John Macon Thome, Direktor der Sternwarte in Cordoba, geboren in Palmyra, Pa. den 22. August 1843, gestorben im November (?) 1908.

— W. F. White, Professor der Mathematik an der „State normal school" zu New Paltz, N. Y., gestorben den 29. November 1908.

— Prinz Yamashima. Meteorolog, gestorben 1908, 31 Jahre alt.

— Karl Zöppritz, Observator am Institut für luftelektrische Forschung in Göttingen, gestorben im August 1908.

Die geplante Euler-Ausgabe.

— *Auszug aus dem Schreiben des Sekretärs der preußischen Akademie der Wissenschaften vom 7. Februar 1907.* ... Es herrscht ... bei den Vertretern der in Betracht kommenden Fächer die Ansicht vor, daß die Veranstaltung einer vollständigen Herausgabe der Eulerschen Arbeiten im wesentlichen die Bedeutung haben würde, daß dem großen Forscher des 18. Jahrhunderts ein wohlverdientes Denkmal errichtet würde, daß aber die

Wissenschaft daraus nicht einen Nutzen ziehen könnte, der mit dem für die Errichtung eines solchen Monuments notwendigen Aufwand an Arbeit und Mitteln einigermaßen in Einklang stünde.

Als historische Dokumente sind auch heute die in besonderen Werken, in den Berliner und Petersburger akademischen Schriften und in der später in Petersburg begonnenen Sammlung veröffentlichten Eulerschen Arbeiten genügend zugänglich, und einen anderen Wert als den historischer Dokumente kann der weitaus größte Teil derselben heute in der Wissenschaft nicht mehr beanspruchen ...

Eine ... Sammlung ausgewählter Stücke würde ... nicht mehr den Charakter eines des großen Autors würdigen Monuments beanspruchen können.

— Die schweizerische Euler-Kommission hat im Dezember 1908 an die Freunde der Wissenschaft in der Schweiz einen Aufruf zur Zeichnung von freiwilligen Beiträgen für die geplante Herausgabe der Werke Eulers ausgefertigt. Der Aufruf wendet sich auch an schweizerische wissenschaftliche und technische Gesellschaften, sowie an die großen industriellen Unternehmungen in der Schweiz.

— Von den schweizerischen Mathematiklehrern ist vor einiger Zeit die Frage der Herausgabe einer deutschen Übersetzung von Eulers sämtlichen Werken aufgeworfen worden, und die schweizerische Euler-Subkommission hat diese Frage gründlich studiert; das Resultat liegt jetzt in einem als Manuskript gedruckten *Bericht der Subkommission der Euler-kommission über die „Sprachenfrage“* (18 Seiten 8°) vor. Die Subkommission erklärte ohne weiteres einstimmig, daß es aus finanziellen Gründen ganz undenkbar sei, eine Gesamtausgabe zu veranstalten, die Original und Übersetzung enthielte. In betreff der Frage, ob es zu empfehlen sei, statt der Originale der Eulerschen Schriften eine Übersetzung in deutscher Sprache zu bieten, wurden der Subkommission Gutachten der Herren H. Bosmans, G. Darboux, G. Eneström, D. Hilbert, F. Klein, A. Krazer, F. Lindemann, H. A. Schwarz, P. Stäckel, A. Ackermann (Firma B. G. Teubner), A. Wangerin und H. Weber, sowie eine Erklärung von vier Züricher Mathematikprofessoren vorgelegt. Nur Herr Hilbert äußerte sich ein wenig unbestimmt, die übrigen erklärten sich einstimmig gegen eine Übersetzung. Als Gründe wurden angegeben, teils daß die Kosten viel größer und die Einnahmen (für verkaufte Exemplare) viel geringer werden würden, teils daß es überhaupt unmöglich sein würde, eine Euler-Ausgabe in deutscher Übersetzung zu veranstalten, weil für diesen Fall die nötigen wissenschaftlichen Hilfskräfte gar nicht zur Verfügung stehen würden. Außerdem wurde besonders hervorgehoben, daß eine Übersetzung der sämtlichen Werke Eulers schon darum geradezu unmöglich wäre, weil man keine Übersetzer bekommen könnte, die bereit wären, sich in jahrelanger Arbeit so in die Eulerschen Abhandlungen zu vertiefen, daß sie imstande sein würden, eine gute und fehlerfreie Übersetzung zu liefern. Unter Bezugnahme auf diese Gründe erklärte die Subkommission einstimmig, daß eine Gesamtausgabe der Werke Eulers in Übersetzung aus wissenschaftlichen und finanziellen Gründen unmöglich ist.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Berlin hat Professor W. Förster für das Sommersemester 1909 eine zweistündige Vorlesung über Geschichte der alten Astronomie angekündigt.

— At the Massachusetts institute of technology a course of 45 lectures on the general history of science is given by Professor W. T. Sedgwick for non-mathematical sciences and by Professor H. W. Tyler for the mathematical.

— An der Universität in Moskau hat Privatdozent V. Bobynin für das Sommersemester 1909 eine dreistündige Vorlesung über Geschichte der Mathematik angekündigt.

Gekrönte Preisschriften.

— *Académie des sciences de Paris.* Le grand prix des sciences mathématiques a été partagé en 1908 entre MM. L. Bianchi et C. Guichard pour leurs mémoires sur le

sujet: „Réaliser un progrès important dans l'étude de la déformation de la surface générale du second degré".

Preisaufgaben gelehrter Gesellschaften.

— *Académie des sciences de Paris.* Concours de l'an 1911. Perfectionner en un point important la théorie des systèmes triples de surfaces orthogonales. — Perfectionner en un point l'étude du mouvement d'un ellipsoïde dans un liquide indéfini, en ayant égard à la viscosité du liquide.

Vermischtes.

— In ihren Arbeitsplan hat die Internationale mathematische Unterrichtskommission auch eine Untersuchung der folgenden Frage aufgenommen: „Man hat eine ausgedehnte Berücksichtigung der geschichtlichen Entwicklung der Mathematik bei dem mathematischen Unterricht gefordert. In welchem Maße ist eine solche möglich und wünschenswert?"

— An der Universität in Göttingen hat sich Conrad H. Müller als Privatdozent der Mathematik und ihrer Geschichte habilitiert.

Die dreifachen Gleichheiten Fermats.

Von P. v. SCHAEWEN in Naumburg a. S.

FERMAT erwähnt die *triplicatae aequalitates* kurz in den Randglossen zu III 17, IV 20 und 21, V 3 der Arithmetik DIOPHANTS, dann aber ausführlich in der ersten Randglosse zu VI 24. Diese Randbemerkung FERMATS[1]) lautet in wörtlicher Übersetzung:

„Wo doppelte Gleichheiten nicht ausreichen, muß man zu dreifachen Gleichheiten greifen, die meine Erfindung sind und den Weg zu vielen sehr schönen Problemen eröffnen. Ist z. B. jeder der Ausdrücke $x + 4$, $2x + 4$, $5x + 4$ zu einem Quadrate zu machen, so entsteht eine dreifache Gleichheit, die mit Hilfe einer doppelten Gleichheit gelöst werden kann. Wenn statt x eine Zahl gesetzt wird, die zusammen mit 4 ein Quadrat ergibt, z. B. $x_1^2 + 4x_1$, so wird der erste der Ausdrücke, die zu einem Quadrate gemacht werden sollen, $x_1^2 + 4x_1 + 4$, der zweite wird $2x_1^2 + 8x_1 + 4$ und der dritte $5x_1^2 + 20x_1 + 4$. Der erste Ausdruck ist aber schon seiner Zusammensetzung nach ein Quadrat. Daher müssen noch $2x_1^2 + 8x_1 + 4$ und $5x_1^2 + 20x_1 + 4$ zu Quadraten gemacht werden, und es entsteht eine doppelte Gleichheit, die sicher eine Lösung ergeben wird. Aber aus dieser einen Lösung wird wieder eine neue Lösung hervorgehen und aus der zweiten sich eine dritte Lösung ableiten lassen usw. Das Verfahren besteht darin, daß man, wenn $x = a$ gefunden ist, $x = x_1 + a$ setzt. Auf diesem Wege kommen zu den ersten Lösungen unendlich viele neue Lösungen hinzu und zwar wird die letzte immer aus der zunächst vorhergehenden abgeleitet. Dank dieser Erfindung kann ich unendlich viele (rechtwinklige) Dreiecke von gleicher Fläche ermitteln, was selbst DIOPHANT nicht gekonnt zu haben scheint, wie aus der 8. Aufgabe des 5. Buches hervorgeht, wo er nur drei flächengleiche Dreiecke findet, um für die folgende Aufgabe drei Zahlen aufzustellen, was sich, wie ich zuerst entdeckt habe, auf unendlich viele Zahlen ausdehnen läßt."

1) Siehe *Oeuvres de FERMAT*, publ. par P. TANNERY et CH. HENRY 1, Paris 1891, S. 334—335.

Wenn ich mich des Wortes „Gleichheiten" bediene, folge ich lediglich dem Sprachgebrauche Bachets und Fermats, die immer scharf unterscheiden zwischen „aequalitas" und „aequatio".

Diese dreifachen Gleichheiten Fermats werden mit großer Ausführlichkeit in dem zweiten Teile des *Doctrinae analyticae novum inventum* (Toulouse 1670) behandelt. Bekanntlich enthält dieser Traktat den Briefwechsel Fermats mit Jacques de Billy auszugsweise in der Bearbeitung Billys. Leider fehlt eine leicht zugängliche Neuausgabe dieses *Inventum novum* nebst guter deutscher Übersetzung. Paul Tannery hat im 3. Bande[1]) der *Oeuvres de Fermat* eine französische Übersetzung geliefert, aber diese Übersetzung ist einmal sehr frei und dann keineswegs fehlerlos.

In den §§ 1 und 2 des 2. Teiles des *Inventum novum*[2]) wird der Hauptinhalt der Randglosse Fermats etwas ausführlicher gegeben. Es werden zwei Fälle unterschieden, in denen eine dreifache Gleichheit lösbar ist: im ersten Falle haben die drei Ausdrücke die Form $a^2 + bx$, im anderen Falle $a^2x^2 + bx$. Zunächst wird der erste Fall untersucht, in welchem jeder der drei Ausdrücke, die ein Quadrat werden sollen, von der Form $a^2 + bx$ ist. In § 3[3]) wird das Beispiel

$$1 + x = \square, \quad 1 + 2x = \square, \quad 1 + 5x = \square$$

gelöst. Es ist das in der Randglosse Fermats gewählte Beispiel, nur ist dort x viermal so groß. Die Lösung wird genau in der von Fermat angedeuteten Weise ausgeführt. „Als neue Unbekannte nehme man $x^2 + 2x$. Denn dies mit 1, dem Koeffizienten von x, multipliziert gibt $x^2 + 2x$. Addiert man 1 zu diesem Produkte, so erhält man das Quadrat $x^2 + 2x + 1$ mit der Seite $x + 1$. Dann setze man dieselbe neue Unbekannte in die beiden anderen Ausdrücke $1 + 2x$ und $1 + 5x$ ein. Man erhält die doppelte Gleichheit

$$2x^2 + 4x + 1 = \square, \quad 5x^2 + 10x + 1 = \square,$$

die nach der gewöhnlichen Methode zu lösen ist, indem man die Differenz dieser beiden Ausdrücke $3x^2 + 6x$ mit den Faktoren $3x$ und $x + 2$ bildet. Setzt man das Quadrat der halben Summe dieser Faktoren $4x^2 + 4x + 1$ gleich dem größeren Ausdrucke $5x^2 + 10x + 1$, so ergibt sich $x = -6$. Dieser negative Wert wird die letzten Ausdrücke zu Quadraten machen. Diesen Wert von x setze man in $x^2 + 2x$ ein, welcher Ausdruck als neue Unbekannte diente, d. h. man bilde das Quadrat von -6, nämlich 36, und addiere es zu dem Doppelten von -6, nämlich -12. Man erhält

1) Paris 1896, S. 323—398. 2) Siehe *Oeuvres de Fermat* **3**, S. 360—361.
3) Siehe *Oeuvres de Fermat* **3**, S. 361—362.

so die Lösung $x = 24$ für die ersten drei Ausdrücke, die gegeben sind. Die drei Quadrate werden 25, 49, 121, wenn man 24 für x setzt."

In den folgenden Paragraphen werden Aufgaben gelöst, in denen die absoluten Glieder der drei Ausdrücke andere Quadrate sind als die Einheit. Es bedarf dieser Untersuchungen nicht, da man stets durch eine einfache Substitution erreichen kann, daß diese drei Quadrate gleich der Einheit sind.

Beispiel.

$$1 + x = \square, \quad 4 + 2x = \square, \quad 9 + 6x = \square.$$

Setzt man $x = 6x_1$, so erhält man

$$1 + 3x_1 = \square, \quad 1 + 4x_1 = \square, \quad 1 + 6x_1 = \square.$$

Es wird $x_1 = -\frac{280}{47^2}$, also $x = -\frac{1680}{2209}$.

Diese Fermatsche Lösungsmethode der dreifachen Gleichheiten hat den Nachteil, daß die Rechnung stets nur eine Lösung und keineswegs immer die kleinste Lösung liefert. Berechnet man in der von Fermat in der Randglosse angegebenen Weise weitere Lösungen, so kommt man sehr bald zu ungeheuren Zahlen. Das zeigt sich auch an dem einzigen Beispiele dieser Art, das im *Inventum novum* gegeben wird. In § 8[1]) beweist Billy an dem schon genannten Beispiele

$$1 + x = \square, \quad 1 + 2x = \square, \quad 1 + 5x = \square,$$

daß die dreifachen Gleichheiten unendlich viele Lösungen besitzen. Nach sehr umständlichen Rechnungen, die nicht vollständig ausgeführt werden, wird zu $x = 24$ der weitere Wert gefunden

$$x = \frac{470\,956\,770\,729\,578\,397\,264}{216\,571\,905\,615\,699\,363\,961}.$$

Wie so manches andere nimmt Tannery diese Lösung in seine Übersetzung des *Inventum novum* kritiklos auf. Der Bruch hätte durch 290 521 gehoben werden sollen, so daß

$$x = \frac{1\,621\,076\,516\,773\,584}{745\,460\,416\,340\,641}$$

wird. Dieses ist aber nicht die kleinste Lösung der Aufgabe. Es dürfte wohl ausgeschlossen sein, auf diesem Wege noch eine dritte Lösung zu ermitteln.

Billy wendet in seinem Buche *Diophantus redivivus* (Paris 1660) noch eine andere Methode an, dreifache Gleichheiten zu lösen. Er macht nämlich

1) Siehe *Oeuvres de Fermat* 3, S. 363—369.

das Produkt der drei Ausdrücke zu einem Quadrate. Leider zeigt sich hier der Übelstand, daß man viel mehr Lösungen erhält, als der dreifachen Gleichheit genügen. Wenn man z. B. um Lösungen der dreifachen Gleichheit

$$1 + x = \square, \quad 1 + 2x = \square, \quad 1 + 5x = \square$$

zu gewinnen, das Produkt der drei Ausdrücke

$$1 + 8x + 17x^2 + 10x^3$$

zu einem Quadrate macht, so erhält man für x die Werte

$$1, \ -\frac{1}{10}, \ -\frac{1}{5}, \ -\frac{1}{2}, \ -\frac{3}{5}, \ -\frac{5}{9}, \ -1, \ \frac{11}{5}, \ 24, \ -\frac{23}{121}, \ -\frac{123}{125},$$
$$\frac{241}{1440}, \ -\frac{1105}{1681}, \ \frac{1199}{2645}, \ -\frac{9240}{58081} \text{ usw.}$$

Von allen diesen Werten genügt aber außer dem bereits bekannten $x = 24$ nur der letzte Wert $x = -\frac{9240}{58081}$ der dreifachen Gleichheit.

Die soeben erörterten Übelstände, die bei Anwendung der Methoden Fermats und Billys auftreten, werden bei der folgenden Lösungsmethode vermieden. Diese Methode besteht darin, daß man, wenn

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + cx = \square$$

gelöst werden soll, zunächst die doppelte Gleichheit

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square$$

vollständig löst, den Wert von x in $1 + cx = \square$ einsetzt und nun für die bisher willkürlichen Zahlen diejenigen Werte ermittelt, für welche der erhaltene biquadratische Ausdruck ein Quadrat wird.

Beispiel.

$$1 - x = \square, \quad 1 + 4x = \square, \quad 1 + 7x = \square.$$

Man bestimmt zunächst die vollständige Lösung der doppelten Gleichheit

$$1 - x = \square, \quad 1 + 4x = \square.$$

In bekannter Weise findet man

$$x = \frac{mn(m + 2n)(2m - n)}{(m^2 + n^2)^2}.$$

Setzt man diesen Wert in $1 + 7x = \square$ ein, so liefert

$$m^4 + 14m^3n + 23m^2n^2 - 14mn^3 + n^4 = \square$$

die Werte von m und n, für welche sich die Lösungen der dreifachen Gleichheit ergeben. Für $m = 1$, $n = -1$ erhält man $x = \frac{3}{4}$, für $m = 2$, $n = 5$ folgt $x = -\frac{120}{29^2}$, für $m = 14$, $n = 15$ wird $x = \frac{120120}{421^2}$ usw.

* * *

Der zweite Fall, in welchem eine dreifache Gleichheit lösbar ist, nämlich wenn die drei Ausdrücke die Form $a^2x^2 + bx$ haben, wird in den §§ 13—15[1]) des 2. Teiles des *Inventum novum* auf den ersten Fall zurückgeführt, indem man x durch $\frac{1}{x_1}$ ersetzt und dann mit x_1^2 multipliziert. Es sei z. B. die dreifache Gleichheit

$$x^2 + x = \square, \quad x^2 + 2x = \square, \quad x^2 + 5x = \square$$

gegeben. Setzt man $\frac{1}{x_1}$ statt x und multipliziert man dann mit x_1^2, so erhält man die dreifache Gleichheit

$$1 + x_1 = \square, \quad 1 + 2x_1 = \square, \quad 1 + 5x_1 = \square.$$

Vorstehend wurde die Lösung $x_1 = 24$ gefunden. Daher ist $x = \frac{1}{24}$ eine Lösung der gegebenen dreifachen Gleichheit.

Billy gibt im *Diophantus redivivus* für diese dreifachen Gleichheiten noch eine andere Lösungsmethode, die an dem folgenden Beispiel erläutert werden soll. Es sei

$$x^2 - x = \square, \quad x^2 + 3x = \square, \quad x^2 + 6x = \square$$

zu lösen. Die Methode Fermats gibt die Lösung $x = \frac{49}{40}$. Billy setzt „intactis quadratis“ d. h. ohne an den quadratischen Gliedern etwas zu ändern, $2x_1 - 1$ für x. Da der erste Ausdruck identisch ein Quadrat wird, ist die doppelte Gleichheit zu lösen

$$x_1^2 + 6x_1 - 3 = \square, \quad x_1^2 + 12x_1 - 6 = \square.$$

Die gewöhnliche Methode, deren sich schon Diophant in seiner Arithmetik bediente, gibt die Lösung $x_1 = \frac{7}{10}$. Nun dividiert Billy das Quadrat dieses Wertes $\frac{49}{100}$ durch $\frac{2}{5}$, den Wert von $2x_1 - 1$, wenn man $x_1 = \frac{7}{10}$ einsetzt, und erhält ebenfalls $x = \frac{49}{40}$.

Eine ähnlich gekünstelte Lösung gibt Fermat in § 15 des *Inventum novum*. „Es ist zu bemerken, daß man die Rechnung, wenn die Koeffi-

1) Siehe *Oeuvres de Fermat* 3, S. 366—368.

zienten der Glieder in x^2 dieselben sind, aber verschieden von der Einheit, erheblich abkürzen kann, indem man sie „intactis radicibus“ d. h. ohne die Glieder in x irgendwie zu ändern, auf die Einheit bringt und nachher den gefundenen Wert durch das gegebene Quadrat dividiert. Wenn z. B.

$$9x^2 + 9x = \square, \quad 9x^2 + 24x = \square, \quad 9x^2 + 72x = \square$$

gegeben ist, setze man, ohne die Koeffizienten von x zu ändern, x^2 für $9x^2$:

$$x^2 + 9x = \square, \quad x^2 + 24x = \square, \quad x^2 + 72x = \square.$$

$x = 3$ ist eine Lösung dieser dreifachen Gleichheit. Dividiert man 3 durch das Quadrat 9, so folgt $x = \frac{1}{3}$ als Lösung der ursprünglichen dreifachen Gleichheit. Wenn man denselben Wert 3 durch 16 dividiert, wird $x = \frac{3}{16}$ eine Lösung der dreifachen Gleichheit

$$16x^2 + 9x = \square, \quad 16x^2 + 24x = \square, \quad 16x^2 + 72x = \square$$

sein. Ebenso ist in allen anderen Fällen zu verfahren.“

Es bedarf all dieser Künsteleien nicht. Man kommt stets durch eine einfache Substitution zum Ziele.

Außer den beiden vorstehend untersuchten Fällen, in denen eine dreifache Gleichheit lösbar ist, gibt es noch einen dritten Fall der Lösbarkeit, der Fermat und Billy nicht bekannt gewesen zu sein scheint. Wenn in den drei Ausdrücken, die ein Quadrat werden sollen, kein quadratisches Glied vorkommt, ist die Aufgabe stets lösbar, wenn irgendwoher *eine* Lösung bekannt ist, wie aus den beiden folgenden Beispielen erhellt.

1) $$3 + x = \square, \quad 6 + x = \square, \quad 20 + 2x = \square.$$

$x = -2$ ist eine Lösung. Setzt man $x = x_1 - 2$, so wird

$$1 + x_1 = \square, \quad 4 + x_1 = \square, \quad 16 + 2x_1 = \square.$$

Nun ersetze man x_1 durch $8x_2$:

$$1 + x_2 = \square, \quad 1 + 2x_2 = \square, \quad 1 + 8x_2 = \square.$$

Die kleinste Lösung dieser dreifachen Gleichheit ist $x_2 = \frac{2520}{289}$, also $x_1 = \frac{20160}{289}$ und somit $x = \frac{19582}{289}$.

2) $$2x^2 + x = \square, \quad 6x^2 - 3x = \square, \quad 12x^2 + 3x = \square.$$

Ersetzt man x durch $\frac{1}{x_1}$, so wird

$$2 + x_1 = \square, \quad 6 - 3x_1 = \square, \quad 12 + 3x_1 = \square.$$

Da $x_1 = -1$ eine Lösung ist, setze man $x_1 = x_2 - 1$

$$1 + x_2 = \square, \quad 9 - 3x_2 = \square, \quad 9 + 3x_2 = \square$$

oder wenn man $3x_3$ für x_2 setzt,

$$1 + x_3 = \square, \quad 1 - x_3 = \square, \quad 1 + 3x_3 = \square.$$

$x_3 = \frac{120}{169}$ ist die kleinste Lösung dieser dreifachen Gleichheit. Folglich wird $x_2 = \frac{360}{169}$, $x_1 = \frac{191}{169}$ und daher $x = \frac{169}{191}$.

* * *

Billy bemerkt in § 9 des 2. Teiles des *Inventum novum*[1]): „Wenn der eine Koeffizient von x gleich ist der Summe der beiden anderen, ist die dreifache Gleichheit nach dieser Methode nicht lösbar. Es sei z. B. die dreifache Gleichheit

$$1 + 2x = \square, \quad 1 + 3x = \square, \quad 1 + 5x = \square$$

gegeben, und man nehme als neue Unbekannte $2x^2 + 2x$, damit der erste Ausdruck, wenn man sie einsetzt, das Quadrat $1 + 4x + 4x^2$ ergibt. Die beiden anderen Ausdrücke aber geben nach der Substitution

$$1 + 6x + 6x^2 = \square, \quad 1 + 10x + 10x^2 = \square.$$

Wenn nun diese doppelte Gleichheit nach der gewöhnlichen Methode gelöst wird, erhält man für die letzten Ausdrücke $x = -1$. Setzt man diesen Wert in die neue Unbekannte $2x^2 + 2x$ ein, so gibt er Null oder die Negation des Zahlbegriffes statt einer positiven Lösung."

Billy hätte schon hier und nicht erst in § 12 hinzufügen sollen, daß die quadratischen absoluten Glieder ein und dasselbe Quadrat aufweisen müssen.

Führt man die Rechnung allgemein durch für

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + cx = \square,$$

so findet man als Bedingung dafür, daß dieser Ausnahmefall eintritt,

$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 0.$$

Folglich ist dieser Fall, in welchem die Methode Fermats versagt, der einzige Ausnahmefall dieser Art.

Wie Tannery in einer Fußnote[2]) bemerkt, nahm Billy die Entdeckung dieses Ausnahmefalles für sich in Anspruch. In einem seiner

1) Siehe *Oeuvres de Fermat* **3**, S. 364—365.

2) *Oeuvres de Fermat* **3**, S. 364.

Manuskripte, die in der Bibliothek zu Dijon, wo Billy Lehrer der Mathematik war, aufbewahrt werden, soll sich die Notiz finden:

„Anno 1660 jun. 27 dominus de Fermat senator parlamenti Tolosani significavit mihi habere se methodum generalem resolvendi triplicatas aequalitates, in quibus occurrunt tantum quadrati et radices et numerus quadratorum est quadratus. Ut si aequentur quadrato

$$1AA + 2A, \quad 4AA + 6A, \quad 9AA + 6A,$$

potest variari quomodo libet numerus radicum. Ego correxi dominum de Fermat et ostendi, quod, si duo minores numeri radicum aequentur majori, impossibilis est solutio per ipsius methodum: quod ipse postea fassus est se non animadvertisse.“

Es ist sehr zu bedauern, daß sich unter diesen Papieren Billys keiner der an ihn gerichteten Briefe Fermats findet. Denn diesen Briefen Fermats ist das *Inventum novum* zu verdanken, wie Billy in der Vorrede versichert.

Von ganz besonderem Interesse ist nun § 10[1]), der also lautet: „Dasselbe ist über jede andere derartige dreifache Gleichheit zu sagen, wobei aber zu bemerken ist, daß ich nur behauptet habe, daß in diesem Falle eine Lösung nach dieser Methode unmöglich ist. Denn es kann dreifache Gleichheiten dieser Art geben, die an sich nicht unlösbar sind, wie die folgende zeigt

$$1 + 5x = \square, \quad 1 + 16x = \square, \quad 1 + 21x = \square.$$

Setzt man $x = 3$, so geben die Ausdrücke die drei Quadrate 16, 49, 64.“

In § 11 heißt es sodann: „Hier ist mit unserem Fermat auch zu beachten, daß die dreifache Gleichheit

$$1 + x = \square, \quad 1 + 2x = \square, \quad 1 + 3x = \square$$

aus zwei Gründen unlösbar ist, sowohl nach ihrer Natur als auch gemäß der Methode, und zwar ihrer Natur nach, weil es nicht vier Quadratzahlen geben kann, die eine arithmetische Reihe bilden, was doch daraus folgen würde, wenn man die Einheit als erstes Quadrat voranstellt. Auch aus methodischen Gründen ist eine Lösung hier unmöglich, weil, wenn die Aufgabe an sich lösbar wäre, sie nach der vorgetragenen Methode nicht gelöst werden könnte, da der größte Koeffizient von x gleich der Summe der beiden anderen Koeffizienten ist.“ Daraus geht hervor, daß Fermat den Inhalt des § 10 nicht gekannt hat. Denn seine zweite Be-

1) *Oeuvres de Fermat* 3, S. 365.

gründung stützt sich darauf, daß der in § 9 angegebene Ausnahmefall allgemein gilt.

Billy sagt nicht, woher die in § 10 gegebene dreifache Gleichheit stammt, auch nicht, mit Hilfe welcher Methode man die Lösung $x = 3$ finden kann. Er geht auf diese interessante Klasse von dreifachen Gleichheiten überhaupt nicht weiter ein, weder im *Inventum novum* noch im *Diophantus redivivus*. Es sieht fast so aus, als hätte Billy jene dreifache Gleichheit kurze Zeit vor der Publikation des *Inventum novum* zufällig entdeckt und nun den § 10 in das Manuskript eingeschaltet.

Was die Lösung dieser von Billy entdeckten Klasse dreifacher Gleichheiten betrifft, so versagt nicht nur die Lösungsmethode Fermats, sondern auch jede andere bisher bekannte Methode. Es ist wohl anzunehmen, daß Billy versucht hat, das Produkt der drei Ausdrücke zu einem Quadrate zu machen, aber dann die Erfolglosigkeit dieses Beginnens erkannt hat. Wenn z. B.

$$1 + 3x = \square, \quad 1 + 10x = \square, \quad 1 + 13x = \square$$

gelöst werden soll, muß

$$1 + 26x + 199x^2 + 390x^3$$

zu einem Quadrate gemacht werden. Diese Aufgabe ist aber weder nach der Fermatschen noch nach der Eulerschen Methode[1]) lösbar. Man erhält zwar die beiden Umformungen

$$(1 + 13x)^2 + 30x^2(1 + 13x) = \square$$
$$(1 + 13x + 15x^2)^2 - 225x^4 = \square,$$

aber aus beiden Umformungen folgt keine brauchbare Lösung, sondern nur die schon bekannte Tatsache, daß die linke Seite sich in drei lineare Faktoren zerlegen läßt. Die dreifache Gleichheit ist aber lösbar; die beiden kleinsten Lösungen sind $x = \frac{24}{49}$ und $x = -\frac{24}{361}$.

Es ist zunächst zu untersuchen, wie man dreifache Gleichheiten

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + (a + b)x = \square,$$

die noch andere Lösungen als $x = 0$ besitzen, finden kann. Setzt man $x = \frac{y}{z^2}$, so erhält man

$$z^2 + ay = u^2, \quad z^2 + by = v^2, \quad z^2 + (a + b)y = w^2.$$

1) Siehe die S. 300 zitierte Abhandlung *Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi.*

Eliminiert man a und b aus diesen drei Gleichungen, so folgt

$$u^2 - z^2 = w^2 - v^2.$$

Man hat also vier Quadratzahlen zu finden, die dieser Gleichung genügen. Setzt man $u + z = m$, $u - z = n$, $w + v = p$, $w - v = q$, so wird

$$mn = pq.$$

Folglich erhält man die sämtlichen dreifachen Gleichheiten dieser Art, wenn man alle möglichen Produktengleichungen $mn = pq$ aufstellt. Wenn

$$mn = ac$$
$$(p - q)^2 - (m - n)^2 = 4bc$$

ist, erhält man die dreifache Gleichheit

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + (a + b)x = \square$$

mit der Lösung $x = \frac{4c}{(m-n)^2}$. Die drei Quadrate werden

$$\left(\frac{m+n}{m-n}\right)^2, \quad \left(\frac{p-q}{m-n}\right)^2, \quad \left(\frac{p+q}{m-n}\right)^2.$$

Aus denselben vier Zahlen m, n, p, q erhält man durch andere Gruppierung derselben nochmals dieselbe dreifache Gleichheit wie soeben

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + (a + b)x = \square,$$

aber mit der Lösung $x = -\frac{4c}{(p+q)^2}$. Die drei Quadrate werden

$$\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2, \quad \left(\frac{m+n}{p+q}\right)^2, \quad \left(\frac{m-n}{p+q}\right)^2.$$

Ferner ergibt sich aus denselben Zahlen m, n, p, q die dreifache Gleichheit

$$1 - ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + (b - a)x = \square$$

mit den beiden Lösungen

$$x = \frac{4c}{(m+n)^2} \text{ und } x = -\frac{4c}{(p-q)^2}.$$

Für die erste dieser beiden Lösungen werden die drei Quadrate

$$\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2, \quad \left(\frac{p+q}{m+n}\right)^2, \quad \left(\frac{p-q}{m+n}\right)^2$$

und für die andere

$$\left(\frac{p+q}{p-q}\right)^2, \quad \left(\frac{m-n}{p-q}\right)^2, \quad \left(\frac{m+n}{p-q}\right)^2.$$

Folglich gewinnt man den Satz: Wenn

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + (a + b)x = \square$$

eine hierher gehörige dreifache Gleichheit ist, so ist es auch

$$1 - ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + (b - a)x = \square.$$

Beispiel.

$m = 5$, $n = 3$, $p = 15$, $q = 1$ gibt die dreifache Gleichheit Billys

$$1 + 5x = \square, \quad 1 + 16x = \square, \quad 1 + 21x = \square$$

mit den Lösungen $x = 3$ und $x = -\frac{3}{64}$ und außerdem die dreifache Gleichheit

$$1 - 5x = \square, \quad 1 + 16x = \square, \quad 1 + 11x = \square$$

mit den Lösungen $x = \frac{3}{16}$ und $x = -\frac{3}{49}$.

Durch Umkehrung dieses Verfahrens kann man jede dreifache Gleichheit

$$1 + ax = \square, \quad 1 + bx = \square, \quad 1 + (a + b)x = \square$$

lösen oder ihre Unlösbarkeit dartun d. h. feststellen, daß sie nur die Lösung $x = 0$ besitzt.

Es sei $m = y$, $n = z$, $p = yz$, $q = 1$, wo y und z rational sein müssen. $y = 0$ und $y = 1$ und ebenso $z = 0$ und $z = 1$ sind auszuschließen Nach dem Vorstehenden ist dann

$$(yz - 1)^2 - (y - z)^2 = \frac{4byz}{a}$$

oder

$$a(z^2 - 1)y^2 - 4byz - a(z^2 - 1) = 0.$$

y wird nur rational, wenn

$$a^2(z^2 - 1)^2 + 4b^2z^2 = \square,$$

wo z noch andere Lösungen als 0 und 1 besitzen muß.

Es ist dieses die notwendige und hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit der dreifachen Gleichheit.

Beispiel.

$$1 + 2x = \square, \quad 1 + 5x = \square, \quad 1 + 7x = \square.$$

Es muß

$$(z^2 - 1)^2 + 25z^2 = \square$$

oder

$$z^4 + 23z^2 + 1 = \square$$

gelöst werden. Da man die beiden Lösungen $z = 0$ und $z = 1$ kennt, kann man diese Aufgabe nach der Fermatschen oder nach der Eulerschen Methode lösen. Für $z = 3$ wird $y = 4$ oder $= -\frac{1}{4}$, also $m = 4$, $n = 3$, $p = 12$, $q = 1$, $c = 6$. Mithin erhält man die beiden Lösungen

$$x = 24 \text{ und } x = -\frac{24}{169}.$$

Für $z = \frac{51}{40}$ wird $y = \frac{143}{7}$ oder $= -\frac{7}{143}$. Hieraus ergeben sich die beiden weiteren Lösungen

$$x = \frac{4084080}{5363^2} \text{ und } x = -\frac{4084080}{7573^2}.$$

Damit ist auch die dreifache Gleichheit

$$1 - 2x = \square, \quad 1 + 5x = \square, \quad 1 + 3x = \square$$

gelöst. Die vier kleinsten Lösungen sind

$$x = \frac{24}{49}, \; x = -\frac{24}{121}, \; x = \frac{4084080}{6077^2}, \; x = -\frac{4084080}{7013^2}.$$

Es liegt nahe, zu untersuchen, ob die von Billy in § 9 gegebene dreifache Gleichheit

$$1 + 2x = \square, \quad 1 + 3x = \square, \quad 1 + 5x = \square$$

lösbar ist. Denn die Möglichkeit, daß Billy sich geirrt haben kann, ist doch nicht ohne weiteres abzuweisen. Hier muß

$$(z^2 - 1)^2 + 9z^2 = \square$$

oder

$$z^4 + 7z^2 + 1 = \square$$

sein. Dieser Aufgabe genügen aber nur die Lösungen $z = 0$ und $z = 1$ und keine anderen rationalen Lösungen, wie schon Euler ausführlich bewiesen hat in den §§ 38—42 seiner Abhandlung: *Methodus nova et facilis formulas cubicas et biquadraticas ad quadratum reducendi.*[1]) Daher hat diese dreifache Gleichheit Billys in der Tat nur die Lösung $x = 0$.

1) Mém. de l'acad. d. sc. de St. Pétersbourg **11**, 1830, S. 69—91 [1780]; wieder abgedruckt in den *Commentationes arithmeticae* **1**, St. Petersburg 1849, S. 474—487.

The portraits of Isaac Newton.

By DAVID EUGENE SMITH in New York.

The recent publication of a list of portraits of EULER suggests that it would be helpful to students of NEWTON's life and works if a similar list of his portraits could be prepared. As a basis for this work I have thought that a catalogue of the portraits of the great English mathematician now in my own library might be of service. The list is by no means complete, and must be understood to be intended only as a foundation upon which others may build. It would be easy to add several other engravings known to me, some from personal examination and others from the catalogues of dealers, but I do not as yet know of enough others to make it worth the while to give any save those in my possession.

The engraved portraits of NEWTON are chiefly from paintings by VANDERBANK (1694?—1739), Sir GODFREY KNELLER (1646—1723), ENOCH SEEMANN (1694—1744) and Sir PETER LELY (1618—1680).

The best known of the several VANDERBANK portraits was painted in 1725 and is in possession of the Royal Society at London. It represents NEWTON at the age of eightythree, dignified, attired in court dress, and uncomfortable in pose. Another VANDERBANK, less often copied, and apparently painted at about the same time, is in the National Gallery in London. Next in popularity is the well known head by KNELLER, in the collection of the Earl of EGREMONT, representing NEWTON in the huge wig of the period. For real humanity, however, the painting by GANDY († 1729), in 1706, is one of the most noteworthy. It represents the savant in the prime of life, without a wig, and with an expression of determination tempered with kindness that is not seen in the more conventional portraits by KNELLER and VANDERBANK. Somewhat similar, on the score of the human element, is the THORNHILL (1675—1734) painting, evidently midway in time between the work of GANDY and that of VANDERBANK. Since it is not the purpose, however, to speak of these

portraits at this time, nor of the work of various engravers, but rather to give an initial list that may be serviceable to other collectors, I enter at once upon the labor of cataloguing.

In this list measurements, in centimeters, are made to the plate mark whenever one exists. If there is no plate mark they represent the extreme length and breadth of the picture to the final printed marks. The quotation marks inclose all legends upon the picture.

I. After Vanderbank.

1. Photograph from the painting in the National Gallery. 17,4 × 14,6 cm.

2. Colored photo-lithograph of same. 13,3 × 8,5 cm. „Sir I. Newton. By J. Vanderbank."

3. Engraving 19,8 × 11 cm. „J. Vanderbank pinxt. Pub. Augt. 1, 1817 by C. G. Dyer, Compton Strt. Soho. Romney, sculp. Isaac Newton. Sir Isaac Newton."

4. Same, with „G. M. Brighty, del." additional.

5. Engraving. 23,6 × 15,1 cm. „Vanderbank pinx. Ridley sc. Sir Isaac Newton Knt. President of the Royal Society 1720—1 Pub. June 25 1802 by Bunney & Gold 105 Shoe Lane."

6. Engraving. 15,7 × 10,3 cm. Same portrait as 5, but without the legend.

7. Engraving. 9,2 × 7,1 cm. Same portrait as 5, but without the legend.

8. Engraving. 22,5 × 15,2 cm. „Vanderbank. pinx. Laderer Sculp."

9. Engraving. Same as 8, with scroll design and same legend.

10. Engraving. 16,2 × 9,5 cm. „Sir Isaac Newton, London; Published by Hodgson & Co. 10, Newgate Street."

11. Engraving. 15,9 × 11,7 cm. „Sir Isaac Newton."

12. Engraving. 17,6 × 11,2 cm. „Literary Magazine & British Review. Sr. Isaac Newton. Published as the Act directs 1. Decr. 1788 by C. Forster No 41 Poultry."

13. Engraving. 12 × 8,1 cm. „Sir Isaac Newton. Born at Woolstrope, near Grantham; in the county of Lincoln, Decr. 25th 1642, expired March 20th. 1727. London; William Darton; 58 Holborn Hill, 1822."

14. Engraving. Same as 13, with „London, William Darton," etc. lacking

15. Engraving 22,2 × 15,1 cm. With portrait of Dr. S. Clarke.

16. Engraving. 15,6 × 9,3 cm. „Sir Isaac Newton."

17. Engraving. 7,4 × 6,2 cm „Vanderbank pt. A Smith, sc. Pubd. by Harrison & Co. April 1, 1794. Sir Isaac Newton." Also a biographical note.

18. Engraving 15,7 × 10,5 cm. „R. Scott Sc. Sir Isaac Newton."

19. Engraving. 7,4 × 6,2 cm

20. Engraving. 15,4×6,2 cm. „Isaac Newton. Isaac Newton London: Published by Thomas Kelly, 17, Paternoster Row."

21. Engraving. 14,3 × 9,4 cm. „Isaac Newton, Né à Woolstrop, en 1642, Mort le 20 Mars 1727."

22. Engraving. 20,7 × 13,4 cm. „Newton, C. huton. à Paris, chez Ménard & Desenne, Rue Git-le-Cœur N°. 8."

23. Engraving. 7,9 × 5,6 cm. „Sir Isaac Newton."

24. Engraving. 7,7 × 5,3 cm. „Newton."

25. Engraving. 16,2 × 12,4 cm. „T. Richomme del. E. Conguy Sc."

26. Engraving. 24,7 × 16,6 cm. „gest. v. F. Weber in München НЬЮТОНЪ. Собсмеенносмь II_8 · 4. Пантеона.

27. Engraving. 14,7 × 14 cm.

28. Engraving. 24,7 × 15,1 cm. „Mme. Fournier sc. Newton. Publié par Furne, Paris."

29. Engraving. 11,7 × 8,9 cm. „G. Guadagnini inc: Newton."

30. Lithograph. „Newton. Né en 1642 à Woolsthrope (Angleterre)," and a biographical note.

31. Engraving. 17,2 × 10,7 cm. „Sir Isaac Newton Kt." On the same sheet is an engraving, 15,7 × 18,6 cm., of the house in which Newton was born. „The paternal House of Sr. Isaac Newton in which He was born the 15th. Day of Decr. 1642 at Woolsthorpe Lincolnshire.

Here Newton dawn'd, here lofty Wisdom woke,
And to a wond'ring World divinely Spoke.
If Tully glow'd when Phaedrus' Steps he trod!
Or Fancy form'd Philosophy a God!
If Sages still, for Homer's birth contend!
The Sons of Science at this Dome must bend.
All hail the Shrine! all hail the natal Day!
Cam boasts his Noon, this Cot his morning Ray.
S. Sparrow Sculp. T. Tinkler del. 1772."

32. Engraving. 21,5 × 15 cm. „Isaacus Newton Eq. Aur. Æt. 83. I. Vanderbank pinxit 1725. Geo. Vertue Sculpsit 1726."

33. Engraving. 16,7 × 10,4 cm. „Engraved by E. Scriven. Sir Isaac Newton. From the original Picture by Vanderbank in the possession of the Royal Society."

34. Engraving. 11,7×9,4 cm. „T. Richomme del. E. Conguy sc. Newton."

35. Engraving. 15,4 × 10,2 cm. „gest. v. F. Weber in München НЬЮТОНЪ. Newton."

36. Mezzotint. 35,4 × 25,4 cm. „Isaacus Newton Squr. Obijt 20 Mar. 172$\frac{6}{7}$ Ætatis Suæ 85, I. Vanderbank pinx. An° 1726 Pro Martino Folkes Armo. Cui hanc Tabulam D. D. I. Faber."

II. After Kneller.

37. Engraving. 12,7 × 5,2 cm. „Painted by Sir G. Kneller. Sir Isaac Newton. Engraved by Edward Smith. London Pub^{d} for the Proprietor, March, 1821."

38. Engraving. 17,3 × 11,9 cm. „Isaac Newton. Engraved by R. Page for the Encyclopædia Londinensis 1818."

39. Engraving. 14,3 × 9,8 cm. „Sir Isaac Newton. Engraved by Mr. S. Freeman from the Original Painting by Sir Godfrey Kneller. Published by Arch$^{d.}$ Fullarton & Co. Glasgow."

40. Engraving. 15,8 × 10,1 cm. „W. Holl. Isaac Newton A. Fullarton & C$^{o.}$ London & Edinburgh."

41. Engraving. 24,4 × 16,2 cm. „S$^{r.}$ Isaac Newton. G. Kneller pinx$^{t.}$ Goldar Sculp. In the possession of John Conduit Esq$^{r.}$"

42. Engraving. 19,7 × 10 cm. „Engraved for the Universal Magazine. S$^{r.}$ Isaac Newton. From a Painting after S$^{r.}$ Godfrey Kneller. Publish'd according to Act of Parliament, for I Hinton at the King's Arms, in S$^{t.}$ Pauls Church Yard. 1748."

43. Engraving. 22,1 × 14,8 cm. „Isacus Newton Eq: Aur. Kraus. Sc."

44. Engraving. 11,8 × 7,5 cm. „Kneller Pinx. Phillibrown Sc Sir Isaac Newton. Ob. 1727."

45. Engraving. 11,7 × 6,7 cm. „Sir G. Kneller. W. C. Edwards. Sir Isaac Newton. Published by John Murray Albemarle Street 1831."

46. Engraving. 20,6 × 15,2 cm. „Engraved by W. T. Fry. Sir Isaac Newton. Ob. 1727. From the original of Kneller, in the collection of The Right Hon$^{ble.}$ the Earl of Egremont. John Tallis & Company, London and New York."

47. Engraving. 17,8 × 10 cm. „Engraved by W. T. Fry. Sir Isaac Newton. Ob. 1727. From the original of Kneller, in the collection of The Right Hon$^{ble.}$ the Earl of Egremont. London, Published Aug$^{t.}$ 1, 1831; by Harding & Lepard, Pall Mall East."

48. Engraving. 8,2 × 6,5 cm.

49. Engraving 24,3 × 16,1 cm. „Sir Godfrey Kneller. Robert C. Bell. Isaac Newton."

50. Engraving. 11,2 × 6,9 cm. „Engraved by J. Mc. Gahey. Sir Isaac Newton. Published by J. Mason. 14, City Road & 66, Paternoster Row."

51. Engraving. 12,7 × 8,1 cm. „Isaac Newton. né en 1643 mort en 1726."

52. Engraving. 12,9 × 8,4 cm „Isaac Newton. né en 1643 mort en 1726."

53. Engraving. 9,4 × 7,6 cm. „S$^{r.}$ Isaac Newton. S$^{r.}$ Isaac Newton."

54. Engraving. 13,3 × 8,6 cm. „Sir ISAAC NEWTON."

55. Engraving. 10,8 × 6,4 cm. „Dieu dit que NEWTON soit et la lumiere fût. POPE Trad. pr. VOLTAIRE."

56. Engraving. 14,3 × 7,8 cm. „Desiné d'après le Portrait original de Sir G. KNELLER, et Gravé par AMBROISE TARDIEU. Sir ISAAC NEWTON (Physicien et Philosophe), Président de la société royale de Londres. Né à Woolsthorpe dans le Comté de Lincoln le 25 Décembre 1642. Mort à Londres le 20 Mars 1727."

57. Engraving. 17,8 × 11,1 cm. „G. KNELLER pinxt. WM. SHARP sculpt. Sr. ISAAC NEWTON. Published by G. Kearsly, No. 46 Fleet Street."

58. Engraving. 36,9 × 23,2 cm. „Sr. ISAAC NEWTON I. HOUBRAKEN sculpsit. In the possession of JOHN CONDUIT Esqr. G. KNELLER pinx."

59. Engraving. 26,9 × 22,1 cm. Photo-gelatine copy of 41, published in my *Portfolio of Eminent Mathematicians.*

60. Engraving 34,2 × 25,5 cm. „ISAACUS NEWTON Eq. Aur. G. KNELLER. Eques. pinx. I. SMITH Fecit et ex. 1712."

III. After Seemann.

61. Engraving. 20,5 × 13,4 cm. „Nach gleichz. Bild v. E. SEEMANN. BAUMANN sc. ISAAK NEWTON. Verlag der Kunst-Anstalt des Oestr. Lloyd in Triest."

62. Engraving. 22,5 × 16 cm. „J. SWAINE. Sculp. Sir ISAAC NEWTON. From an Original by ENOCH SEEMANN. another of the managers Js NEWTON. Js. NEWTON His Autographs from the Originals in the Possession of JOHN THANE."

63. Engraving. 23,2 × 15,5 cm. „E. SEEMANN, Pt. MONSALDI Sc."

64. Mezzotint. 18,5 × 11,7 cm. „DES RAIS del. Ex. Bibliothca. Regia. LE CŒUR Sculpt. NEWTON."

IV. After Richter.

65. Engraving. 12,6 × 9 cm. „RICHTER pinx. 1714. Sir ISAAC NEWTON."

V. After Lely.

66. Engraving. 35,6 × 24,5 cm. „Sir ISAAC NEWTON, when Bachelor of Arts in Trinity College, Cambridge. Engraved by Bt. READING from a head painted by Sir PETER LELY in the Possession of the Right Honorable Lord Viscount CREMORNE. Pubd. as the Act directs Jany. 1799. by Bt. READING and Sold by Wm. Richardson York House Strand."

67. Engraving. 17,4 × 10,3 cm. „Sir ISAAC NEWTON, when Bachelor of Arts in Trinity College, Cambridge. Engraved by J. T. WEDGWOOD, from the Original Picture Painted by Sir PETER LELY, in the possession of The Right Honorable Lord Viscount CREMORNE."

68. Engraving. 10,8×7,2 cm. „Eng[d.] by J. Mc. Gahey. Isaac Newton, B. A. Published by J. Mason 14, City Road, & 66, Paternoster Row."

69. Photograph. 12,3×10,1 cm. „Sir Isaac Newton, Kt. By Sir Peter Lely. The Property of Earl of Dartrey. No. 23. Published by The Arundel Society, 24, Old Bond St."

VI. After Thornhill.

70. Engraving. 34,7×24,6 cm. „Isaacus Newton Eq. Aura. I. Thornhill Eq. pinx. Simon sec."

71. Photograph. 12,4×10,1 cm. „Sir Isaac Newton. By Sir James Thornhill. The Property of Trinity College, Cambridge. No. 35. Published by The Arundel Society, 24, Old Bond Street."

VII. After Gandy.

72. Lithograph. 36,6×27 cm. „Ætatis Suæ 64. 1706. Drawn on Stone by G. B. Black, 1848. Painted by William Gandy, Jun[e.] 1706. Day & Son, Lith[rs.] to the Queen. Sir Isaac Newton, From an Original Painting 30 in. by 26 in. formerly in the possession of John Abel Walter, Esq. of Ashley Mount, near Lymington. Proof."

VIII. Miscellaneous.

73. Engraving. 26,6×16,1 cm. „I. Allen delin[t.] E. Scriven Sculp[t.] Sir Isaac Newton. From a Bust at the Royal Observatory, Greenwich."

74. Engraving. 16,2×10 cm. „Tome XXXI. Page 127. Hist. D'Angleterre. Newton. Roettiers del[t.] London direx[t]"

75. Engraving. 12,4×6,1 cm. „Newton. Drawn by Roettiers. Engraved by G. Cooke. London. Publish'd by Vernor, Hood & Sharpe, Poultry, 1807.

76. Engraving. 10,9×6,6 cm. „Newton. Per N. Bettoni. F. Zuliani in."

77. Engraving. 11,1×6,5 cm. „Newton Zeelander Sc."

78. Photograph. 15,7×13,8 cm. From a painting in the National Portrait Gallery, London. „N. P. G. 1395. Sir Isaac Newton. Robert Walker?"

79. Engraving. 30,2×23,7 cm. „Js. Newton 'hypotheses non fingo.' Engraved by J. Outrim from the original Drawing in the Pepysian Collection at Cambridge."

80. Engraving. 11,4×7,5 cm. „Js. Newton."

81. Lithograph. 12×8 cm. „Sir Isaac Newton. Born Dec. 25, 1642, O.S., at Woolsthorpe, England; died March 20, 1726—27, O.S., at London."

82. Engraving. 13,9×9,8 cm. „Ic. P. Dupin Sculpsit. Isaac Neuton Gravé d'Après la Medaille Ic." (Other words not legible.)

83. Engraving. Same as 82, but without the illegible words.

84. Engraving. 14,6 × 10,3 cm. „Isaac Neuton fameux Mathematicien né en Angleterre et il y est mort. Desrochers ex.

De ce physicien, le Sublime genie,
De la nature entiere, apenétré les loix.
A ses profonds calculs, elle senble asservie,
Et ne S'expliquer plus que par sa seule voix. R."

85. Engraving, same as 84 without „Desrochers ex."

86. Engraving. 15,1 × 10,9 cm. „Roettiers del Ravenet Sculp. Isaac Neuton. Mort à Londres, le 20. Mars 1727. Agé de 85 Ans. A Paris chés Odieuvre Md. déstampes, Quai de l'Ecole vis-à-vis la Samaritaine à la belle Image. C. P. R."

87. Engraving. 16,9 × 10,1 cm. „C. Farcy. Lith. de Langlumé. Attract. Calcul. Differ. Newton."

88. Engraving. 8,3 × 7,9 cm. „Neuton."

89. Engraving. 22,1 × 15 cm.

90. Engraving. 18,3 × 11,8 cm. „Sr. Isaac Newton, Kt."

91. Engraving. 16,2 × 11,3 cm. „Neüton N. 1."

92. Engraving. 15,2 × 22,5 cm. (Two portraits.) „Newton."

93. Engraving. 8,7 × 8,7 cm. „Newton."

94. Engraving. 16 × 9,6 cm. „Isaac Newton. Sysang Sc"

95. Engraving. 22,3 × 15,1 cm.

96. Engraving. 22,2 × 15,1 cm. „L. Cars Sculp."

97. Engraving. 13,1 × 8,6 cm. (With portraits of Leibnitz and Samuel Clark.) „Isaacus. Newton. G. Wil. von Leibnitz. Sam. Clark."

98. Engraving. 17,7 × 10,1 cm. With portraits of Laud, Descartes, Addison. Two portraits of Newton. „Archbishop Laud. Descartes. Addison. Newton, from an original picture. Newton, from a bust."

99. Engraving. 12,2 × 7,4 cm. „Aveline sculp. Sir Isaac Newton."

100. Engraving. 21,8 × 14,8 cm. „Newton. Dessiné et Gravé par Aug. St. Aubin.

101. Engraving. 21,3 × 11,7 cm. (With portraits of Locke, Boyle, and Bolingbroke.) „Smollet Eminent Men. Joh. Locke Sir Issac Newton HonB. RobT. Boyle. Viscount Bolingbro. Edwards sc. Vol. II. Published by R. Scholey, 46 Paternoster Row, April 21st. 1806."

102. Engraving. 9,8 × 6,8 cm. (With other portraits.) „Newton."

103. Photograph. 13,2 × 10,7 cm. „Sir Isaac Newton. By Lewis Crosse. The Property of the Marquis of Exeter. No. 29. Published by the Arundel Society, 24, Old Bond Street." (Doubtful.)

104. Engraving. 23,9 × 16,3 cm. „C. J. Smith sculp. The Residence of Sir Isaac Newton, St. Martin's Street, Leicester Square."

105. Engraving. 15,5 × 8,9 cm. „F. MACKENZIE. J. LE KEUX. Statue of Sir ISAAC NEWTON, in the Ante Chapel, Trinity College. Published March 1st. 1838; by C. Tilt, Fleet Street: & J. LE KEUX, Harmondsworth."

106. Photograph. 20,6 × 15,1 cm. Statue in Trinity College.

107. Engraving. 12,5 × 7,2 cm. Statue in Trinity College. „ROUBILIAC. Normand fils. NEWTON."

108. Engraving. 16,4 × 9,3 cm. NEWTON's Monument in Westminster Abbey. „Sr. ISAAC NEWTON's Monument." A medallion of NEWTON.

109. Photograph. 17,7 × 10,7 cm. „NEWTON's Monument, W. A."

110. Mezzotint. 31,5 × 24 cm.

IX. Medals of Newton.

111. Bronze. Ob., bust by CROKER, to l. „ISAACVS. NEWTONVS." „I. C." Rev., a seated figure, winged head, holding tablet with plan of solar system. „FELIX. COGNOSCERE. CAVSAS / M.DCC.XXVI./" 51 mm.

112. Same in silver.

113. Silver. Ob., bust 3/4 to r. „ISAACUS NEWTONIUS." Rev., wreath surrounding inscription: „EQ. AUR. / PHILOSOPHUS. / OBIIT 31. MART. / 1727. / NATUS ANNOS / 85." 33 mm.

114. Bronze. Ob., bust by DASSIER, to r. „ISAACUS NEWTONIUS./" „I. DASSIER F./" Rev., his tomb in Westminster Abbey. „NAT. 1642. / M. 1726./" 42 mm.

115. Silver. Ob., bust to r. by ROËTTIERS. „ISAACVS NEWTONIVS" „JAC. ROËTTIERS." Rev. „QUÆRITUR / HUIC / ALIUS / VERG. ÆNEID: / M.DCC. LXXIV." 54 mm.

116. Bronze. Ob., bust to l. by PETIT. „ISAACUS NEWTONIUS" „PETIT. F." Rev., „NATUS / VOLSTROPII / IN ANGLIA / AN. M. DC. XLII. / OBIIT / AN. M. DCCXXVII. / SERIES NUMISMATICA / UNIVERSALIS VIRORUM ILLUSTRIUM. / M. DCCC. XIX. / DURAND EDIDIT." 41 mm.

117. A poor reproduction of 114, cast from the original, in bronze.

118. Bronze. Same as 113.

119. Bronze. Same as 115.

120. Bronze gilt. Same as 114.

121. Tin. Ob., bust to r. „SIR ISAAC NEWTON." „L. B." „DIED 20 MARCH 1727." Rev., „SIR ISAAC WAS BORN AT WOOLSTHORPE IN THE SOKE OF GRANTHAM DECR. 25th. 1642 AND EDUCATED AT THE FREE GRAMMAR SCHOOL OF KING EDWARD THE SIXTH. GRANTHAM." 45 mm.

122. Tin. Ob. Bust to r. A calendar medal. „A CALENDAR 1822. S. ISAAC NEWTON." Rev., calendar. 42 mm.

Über die erste Aufnahme der Leibnizschen Differentialrechnung.

Von G. Eneström in Stockholm.

Es ist mehr als einmal hervorgehoben worden[1]), daß die Darstellungsweise der Abhandlung, in welcher Leibniz 1684 die Gründe seiner Differentialrechnung auseinandersetzte[2]), nicht gerade geeignet war, das Verständnis der neuen Rechnung zu erleichtern, aber meines Wissens hat man bisher nicht auf die wichtigen Druckfehler am Anfange der Abhandlung aufmerksam gemacht, welche Druckfehler die meisten Leser abschrecken mußten, in die neue Methode einzudringen zu versuchen. In der Tat scheinen die meisten Historiker der Mathematik nicht den Originaldruck, sondern den Abdruck der Gerhardtschen Auflage, wo diese Druckfehler ohne weiteres verbessert sind, benutzt zu haben.[3])

Bekanntlich beginnt die Abhandlung mit einer geometrischen Definition gewisser Größen („differentiae“) dx, dv, dw, dy, dz, die im folgenden eine sehr wichtige Rolle spielen, und ich drucke hier unten diese Definitionen sowohl nach dem Originaldruck[4]) wie nach Gerhardt[5]) wieder ab.

1) Siehe z. B. H. Weissenborn, *Die Principien der höheren Analysis in ihrer Entwickelung von Leibniz bis auf Lagrange*, Halle 1856, S 95; vgl. M. Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* 3², Leipzig 1901, S. 217–218: „jenes mit orakelhafter Kürze verfaßte Schriftstück“.

2) *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.*; Acta eruditorum 1684, S. 467—473.

3) Meines Wissens hat nur Weissenborn (a. a. O., S. 95 Z. 26—28) einen Auszug aus dem wirklichen Text der Acta eruditorum zum Abdruck gebracht, freilich ohne auf den Druckfehler aufmerksam zu machen. Dagegen ist der Text ohne weiteres verbessert in Giesels Abdruck (*Festschrift zur fünfzigjährigen Gedenkfeier der am 5. Mai 1834 erfolgten Eröffnung der städtischen Realschule*, Leipzig 1884, S. 17) und für die Übersetzungen von P. Mansion (*Esquisse de l'histoire du calcul infinitésimal*, Gand 1887, S. 8) und G. Kowalewski (Klassiker der exakten Wissenschaften 162, Leipzig 1908, S. 3) ist ebenfalls der verbesserte Text stillschweigend benutzt.

4) Acta eruditorum 1684, S. 467.

5) *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausgeg. von C. I. Gerhardt 5, Halle 1858, S. 220.

Acta eruditorum 1684.

Sit [Fig. 1] axis AX, & curvae plures; ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective *v*, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, & recta quae sit ad dx, ut *v* (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur d*v* (vel dw, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum *v* (vel ipsarum w, aut y, aut z).

Abdruck bei Gerhardt.

Sit [Fig. 1] axis AX, et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x, et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE, axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx, et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z).

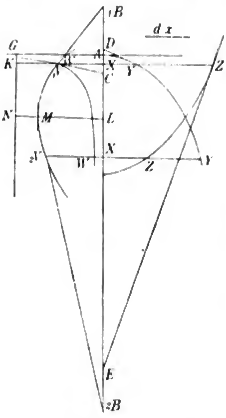


Fig. 1.

Vergleicht man die zwei Texte, so findet man, daß Gerhardt, abgesehen von den rein typographischen Verbesserungen und von der bedeutungslosen Änderung zweier „aut" in „vel", gegen das Ende des Absatzes *XB*, *XC*, *XD*, *XE* statt *VB*, *WC*, *YD*, *ZE* gesetzt hat. Dadurch bekommt man aus dem Texte eine Definition der Größen dv, dw, dy, dz, die in unsere mathematische Sprache auf folgende Weise übersetzt werden kann: „Seien $v = f_1(x)$, $w = f_2(x)$, $y = f_3(x)$, $z = f_4(x)$ und dx eine beliebige Größe, so ist $dv = f_1'(x)\,dx$, $dw = f_2'(x)dx$, $dy = f_3'(x)\,dx$, $dz = f_4'(x)\,dx$ und auf Grund dieser Definition ist es wenigstens möglich, die folgenden Ausführungen Leibnizens zu verstehen. Benutzt man dagegen den Originaltext, so bekommt man eine Definition der Größen dv, dw, dy, dz, die auf folgende Weise übersetzt werden kann: „Seien $v = f_1(x)$, $w = f_2(x)$, $y = f_3(x)$, $z = f_4(x)$ und dx eine beliebige Größe, so ist $dv = \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} f_1'(x)\,dx$, $dw = \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} f_2'(x)\,dx$, $dy = \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} f_3'(x)\,dx$, $dz = \sin \operatorname{arc} \operatorname{tg} f_4'(x)\,dx$", und dann muß entweder der übrige Inhalt der Abhandlung oder die Definition falsch sein. Ist es nicht von vornherein anzunehmen, daß unter solchen Umständen die

meisten Leser anfangs abgeschreckt wurden, von der Methode Leibnizens Kenntnis zu nehmen? Oder gibt es vielleicht Tatsachen, die bezeugen, daß die Kenntnis des Inhalts des Aufsatzes Leibnizens sehr schnell unter die Fachgenossen verbreitet wurde?

Daß die letzte Frage bejahend beantwortet werden soll, wird man versucht, aus einer Stelle der Cantorschen *Vorlesungen*[1]) zu folgern, die ich hier zum Abdruck bringe:

> Wie rasch der Aufsatz bekannt wurde, dafür könnten wir vielleicht auf den Aufsatz über den Contingenzwinkel hinweisen, welchen Wallis 1685 zum Druck gab, und in welchem man Leibnizische Gedanken wiederfinden kann. Sei aber auch dieser Hinweis anzuzweifeln, so erschien gleichfalls 1685 und gleichfalls in England ein Buch, dem der Leibnizische Aufsatz von 1684 als Grundlage diente. Der Schotte John Craig ... gab als erste Schrift 1685 die *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi* heraus, die sich vollständig auf die Leibnizische Differentialrechnung gründete. Ihre Zeichen sind benutzt, ihre Tangentenmethode wird als diejenige gepriesen, welche Irrationalitäten am besten bewältigte.

Herr Cantor behauptet also ausdrücklich, daß der Aufsatz Leibnizens sehr rasch bekannt wurde und als Beleg für seine Behauptung weist er teils auf eine Abhandlung von Wallis, teils auf ein Buch von Craig hin, welche beide 1685 erschienen. Freilich gibt er selbst zu, daß die Beweiskraft des ersten Hinweises angezweifelt werden kann, und in Wahrheit muß man ihm in diesem Punkte aus guten Gründen beistimmen, wie aus dem folgenden ersichtlich wird.

Zuerst ist es fast unmöglich, daß Wallis den Aufsatz im Oktoberheft der Acta eruditorum eingesehen haben konnte, bevor seine Abhandlung *A defense of the treatise of the angle of contact* schon druckfertig war, denn die Abhandlung trägt das Druckjahr 1684.[2]) Ferner war Wallis damals 68 Jahre alt, und es ist an sich wenig wahrscheinlich, daß er sich beeilt hätte, den Inhalt des Aufsatzes für seine Schrift zu benutzen. Hierzu kommt noch, daß Herr Cantor nicht einmal andeutet,

---

1) M. Cantor, a. a. O. S. 195.

2) Der vollständige Titel der Schrift, wo sich die Abhandlung findet, lautet: *A treatise of angular sections. By John Wallis, D. D. Professor of geometry in the university of Oxford, and a member of the Royal society, London.* London: printed by John Playford, for Richard Davis, bookseller, in the university of Oxford, 1684. Die Schrift ist ein Anhang zur *Algebra*, die das Druckjahr 1685 trägt, und die Abhandlung *A defense of the treatise of the angle of contact*, die ebenfalls ein besonderes Titelblatt mit dem Druckjahr 1684 hat, steht S. 71—105.

welche Leibnizsche Gedanken in der Wallisschen Schrift wiedergefunden werden können; allerdings verweist Herr Cantor auf S. 26 des 3. Bandes der *Vorlesungen*, aber dieser Verweis ist wertlos. Vergleicht man nämlich, was Herr Cantor dort sagt mit seinem Berichte (S. 193—195) über den Aufsatz Leibnizens, so ersieht man nur, daß sich sowohl Wallis wie Leibniz mit Betrachtungen über Krümmungsverhältnisse beschäftigt haben, aber in den zwei Fällen ist der Gesichtspunkt durchaus verschieden.[1]) Ebensowenig ist es mir gelungen, bei dem Durchlesen der Schrift Wallis' etwas aufzufinden, das an Leibniz erinnert.

Aber wir haben ein positives Zeugnis dafür, daß Wallis den Aufsatz im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684 noch 1696 nicht gelesen hatte. In seinem Briefwechsel mit Leibniz, der bekanntlich 1695 begann und von Wallis selbst im dritten Bande seiner *Opera omnia* veröffentlicht wurde, hat sich Wallis über seine Kenntnis der Schriften Leibnizens geäußert und besonders ausführlich in den Briefe vom 1. Dezember 1696.[2]) Ich bringe die betreffende Stelle[3]) hier zum Abdruck.

Tuarum ego rerum nihil (quod memini) vidi quicquam, praeter haec duo. Quorum alterum, illud est quod inter Londinensium Collectiones Philosophicas habetur (sed absque Demonstratione) ex Actis Lipsicis descriptum; de Quadrato Diametri, ad Aream Circuli; ut 1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. in infinitum.[4]) Quod ego meis inserui (ut a Te factum) ad Algebrae meae Prop. 95.[5])

Alterum, est illud de Testudine Quadrabili[6]); cujus ego (ut de tuo) mentionem facio in Algebrae meae postremo folio.[7]) Praeter haec duo, si plura noverim, non reticuissem.

Tuam Geometriam Incomparabilium vel Analysin Infinitorum (quam ibidem a Te memoratam dixi,) ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de nomine ante inaudiveram, quam prout ibidem ad calcem Algebrae dictum est.

Neque Calculi Differentialis vel Nomen audivisse me memini, nisi postquam utrumque volumen absolverant operae, eratque Praefationis (praefigendae) postremum folium sub Prelo, ejusque typos jam posuerant Typothetae. Quippe tum me monuit amicus quidam (harum rerum gnarus) qui peregre fuerat, tum talem methodum

---

1) Vgl. die Bemerkungen von Wallis selbst in seinem Briefe an Leibniz vom 30. Juli 1697; *Opera mathematica* **3**, Oxoniae 1699, S. 681.

2) J. Wallis, *Opera mathematica* **3**, S. 653—655. Abgedruckt von C. I. Gerhardt in *Leibnizens Mathematischen Schriften* **4**, Halle 1859, S. 5—10.

3) Wallis, *Opera mathematica* **3**, S. 654; *Leibnizens Mathematische Schriften* **4**, S. 6—7. Bei meinem Abdrucke benutze ich den Text von Wallis. Der Abdruck bei Gerhardt (nach dem Originalbriefe?) weicht nur wenig von diesem Texte ab.

4) *De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus a G. G. Leibnitio expressa;* Acta eruditorum 1682, S. 41—46.

5) Siehe J. Wallis, *A treatise of algebra,* London 1685, S. 346—347; *Opera mathematica* **2**, Oxoniae 1693, S. 389. — An diesen beiden Stellen wird Leibniz „Libnitius" genannt.

6) *Constructio testudinis quadrabilis hemisphaericae;* Auctore G. G. L.; Acta eruditorum 1692, S. 275—279; 1693, S. 42.

7) Siehe Wallis, *Opera mathematica* **2**, S. 481—482.

in Belgio praedicari, tum illam cum NEWTONI methodo Fluxionum quasi coincidere. Quod fecit ut (transmotis typis jam positis) id monitum interseruerim.[1])

Sed et ante monueram, Algebrae Prop. 95. pag. 389. (quod solum potui) LEIBNITIUM et TSCHURNHAUSIUM talia meditatos; sed quae ego non videram. (Necdum vidi.) Et sicubi forte viderim literas G. G. L. nesciebam quem illae Virum indicabant.

Extant, credo, plura in Actis Lipsicis; sed quae ego non vidi. ... Mihique condonari potest, hac aetate, (qui annum Octogesimum superavi,) si non omnia sciscitarer.

Noveram quidem jamdudum (et indicavi) de rebus hujusmodi nonnulla Te meditatum esse ... sed quas ego non vidi, nec scio quales fuerint.

Diese bestimmten Aussprüche von WALLIS sind offenbar entscheidend und es ist also nicht nur anzuzweifeln, sondern ausdrücklich in Abrede zu stellen, daß die Abhandlung WALLIS' über die Kontingenzwinkel als Beleg dafür, daß der Aufsatz LEIBNIZens im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684 rasch bekannt wurde, angeführt werden darf. Wie Herr CANTOR dazu kam, in die Abhandlung von WALLIS LEIBNIZsche Gedanken hineinzulesen, ist mir nicht bekannt, aber vielleicht wurde er durch die folgenden Worte verleitet, die sich in der Rezension der *Treatise of algebra* in den Acta eruditorum 1686 finden[2]):

Qua occasione subjiciemus mox novam admodum meditationem, nobis submissam ab amico, qua doctrina de angulo contactus a contemplatione ad usum promovetur.

Die angedeutete „meditatio" ist nämlich die Abhandlung *De natura anguli contactus*[3]) LEIBNIZens.

In betreff des Buches von CRAIG ist die oben zitierte Behauptung des Herrn CANTOR nur wenig zuverlässiger, und aus dem, was er bemerkt, wird man versucht zu bezweifeln, daß er das Buch gelesen hat. Das Buch, das im Quartformat gedruckt ist, hat den Titel: *„Methodus figurarum lineis rectis & curvis comprehensarum quadraturas determinandi. Authore* JOHANNES *(!)* CRAIGE *(!).* Londini: Impensis Mosis Pitt, ad insigne Angeli in Coemeterio D. Paolo, MDCLXXXV" und besteht aus einem Titelblatt, einem Widmungsblatt, 44 numerierten Seiten[4]) und einer Tafel; der im Titel angegebene Gegenstand wird S. 1—30 behandelt. Nach einer kurzen Einleitung (S. 1—2), in der ein „praeclarus Germanus" (vermutlich TSCHIRNHAUS, vgl. S. 27 Z. 7) ganz im Vorübergehen genannt wird, kommt ein Theorem (S. 2—3), das, in moderne mathematische Sprache übersetzt, besagt, daß

1) Siehe J. WALLIS, *Opera mathematica* 1, Oxoniae 1695, Praefatio Bl a4[a].

2) Acta eruditorum 1686, S. 288 Z. 2 v. u. — S. 289 Z. 1.

3) *G. G. L. Meditatio nova de natura anguli contactus et osculi, horumque usu in practica mathesi, ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas;* Acta eruditorum 1686, S. 289—292.

4) Die Seitenzahlen sind vielfach verdruckt; statt 9, 12, 13, 16, 27, 44 steht bzw. 17, 20, 21, 24, 72, 43.

$\int S_n dx = \frac{y^2}{2}$, wenn S_n die Subnormale der Kurve $y = f(x)$ ist und hier bemerkt Craig: „nobile hoc theorema debetur viro celeberrimo D. Doctori Barrow, qui innumera habet, & sublimia theoremata circa linearum curvarum proprietates". Dann folgen (S. 4—26) Lösungen von 23 Problemen, und welche Quellen Craig benutzt hat, geht aus den folgenden Zitaten hervor:

S. 4: „ex methodo inveniendi tangentes a clarissimo Slusio edita in Actis philosophicis reg: societatis anglicanae";

S. 12: „D. David Gregorius in pulcherrimo suo tractatu, de dimensione figurarum";

S. 12: „D. Cartesius in tom. 3. Epist. pag. 219";

S. 14: „$\sqrt{r^2 - y^2}$ . . . resolvo in seriem secundum methodum celeberrimi D. Isaaci Newtoni";

S. 15: „dimensionem zonae circularis, quem a celeberrimo geometra D. Isaaco Newtono inventum refert clariss. David Gregorius in memorato tractatu";

S. 16: „hyperbolae quadratura quam exhibuit celebris vir Nicolaus Mercator in sua Logarithmo-technia";

S. 22: „eximium hoc theorema debetur etiam viro celeberrimo D. Doctori Barrow;"

S. 26: „demonstratum est ab illustrissimo D. Doctori Barrow",

S. 26: „juxta methodum clarissimi viri D. Isaaci Newtoni."

Dagegen wird S. 1—26 Leibniz nicht ein einziges Mal genannt und schon hieraus geht mit Sicherheit hervor, daß sich die Schrift Craigs nicht, wie Herr Cantor behauptet, „vollständig (!) auf die Leibnizsche Differentialrechnung gründete". Untersucht man das Verfahren, das Craig bei den Lösungen der fraglichen 23 Probleme anwendet, so findet man, daß es sich wesentlich mit älteren Methoden deckt[1]); dagegen kommen weder die Bezeichnungen noch die Methode der Differentialrechnung zur Anwendung.

Aber wie ist es denn möglich, daß Herr Cantor überhaupt bei der Erwähnung des Buches Craigs von der Differentialrechnung sprechen kann? Die Antwort auf diese Frage bringen die Seiten 27—29 des Buches. Nachdem Craig (S. 26) eine zweite Lösung des 23. Problemes gebracht hat, schaltet er (S. 26—30) etwa vier Seiten ein über die Schwierigkeiten bei der Anwendung des vorher gelehrten Verfahrens. Eine Schwierigkeit bestehe darin, daß, wenn die Gleichung der Kurve, deren Fläche gesucht wird, mehr als vier Wurzelausdrücke enthält, es eine ungeheuere Arbeit erfordere, die Gleichung rational zu machen.

1) Vgl. H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 416.

Was hiernach bei Craig steht, bringe ich unten zum Abdruck und aus gewissen Gründen verbessere ich nicht die zahlreichen Druckfehler, sondern mache nur auf dieselben durch Ausrufungszeichen aufmerksam.

Insignis geometra G. G. Lebbnitius (!) in nova sua Methodo tangentes inveniendi in Actis Eruditorum anni superioris publicata . . . viam expeditam ostendit, tangentes inveniendi, quamvis aequatio curvae naturam exprimens terminis irrationalibus quam maximè sit implicita, non ablatis irrationalibus. Quomodo ista methodus ad praesens negotium sit applicanda exemplo ostendam.

Esto [Fig. 2] VCS circuli quadrans cujus diameter sit (r) & VM vocetur y, item ordinata MC z, tum ex natura circuli $z = \sqrt{ry - y^2}$ & resolvendo $ry - y^2$ (!) in seriem per extractionem radicis, invenietur. $z = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^3}{4r}}\sqrt{\frac{y^5}{16r^3}}$ (!) ... &c. Ut determinetur quadratura areae VMC, invenienda est curva VH, in quâ $PM = \sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^3}{4r}} - \frac{y^5}{16r^3}$ (!!), eritque per Prob. 1. aequatio ad curvam quaesitum $\sqrt{nry^3} - \sqrt{\frac{my^5}{4r}} - \sqrt{\frac{ly^7}{16r^3}}$ (!) $= x^2$; & auferendo quantitates fractas (quod tamen absolute necesse non est, sed hic fit ob majorem facilitatem) multiplicando per $\sqrt{16r^3}$: erit $\sqrt{16nr^4y^3} - \sqrt{4mr^2y^5} - \sqrt{ly^7}$ (!) $= x^2\sqrt{16r^3}$; et

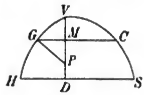


Fig. 2.

determinando n, m, l, (per Prob. 2.) quae sola est difficultas sic procedo: compendii causa pono $p = 16nr^4y^3$, $q = 4mr^2y^5$, $s = ly^7$; eritque $\sqrt{p} - \sqrt{q} - \sqrt{s}$ (!) $= x^2\sqrt{16r^3}$; sed per calculum ibi explicatum invenietur $\sqrt{p}$ (!) $= \frac{dp}{\sqrt{4p}}$, $\sqrt{q}$ (!) $= \frac{dq}{\sqrt{4q}}$, $\sqrt{s}$ (!) $= \frac{ds}{\sqrt{4s}}$, atque $x^2\sqrt{16r^3}$ (!) $= 2x\sqrt{16r^3}\,dx$, & substitutis his valoribus erit

$$\frac{dp}{\sqrt{4p}} - \frac{dq}{\sqrt{4q}} - \frac{ds}{\sqrt{4s}} \text{ (!)} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx,$$

sed per eundem, calculum erit $dp = 48nr^4y^2dy$, $dq = 20mr^2y^4dy$, & denique $ds = 7ly^6dy$, & substituendo hos valores cum valoribus quantitatum $\sqrt{4p}$, $\sqrt{4q}$, $\sqrt{4s}$ aequatio erit

$$\frac{48nr^4y^2dy}{\sqrt{64nr^4y^3}} - \frac{20mr^2y^4dy}{\sqrt{16mr^2y^5}} - \frac{7ly^6dy}{\sqrt{4ly^7}} \text{ (!)} = 2x\sqrt{16r^3}\,dx.$$

Quam clarissimus Author aequationem differentialem appellat: & haec aequatio in analogiam resoluta dat

$$dy\,.\,dx :: \sqrt{64r^3}\,.\,\frac{48nr^4y^2}{\sqrt{64nr^4y^3}} \text{ (!) } \frac{20mr^2y^4}{\sqrt{16mr^2y^5}} \text{ (!) } \frac{7ly^6}{\sqrt{4ly^7}} :: x\,.\,PM$$

ut ex eodem calculo est manifestum, adeoque erit

$$PM = \frac{48nr^4y^2}{\sqrt{4096nr^7y^3}} - \frac{20mr^2y^4}{\sqrt{1024mr^5y^5}} - \frac{7ly^6}{\sqrt{256lr^3y^7}} = \text{(!) \&c.}$$

Et facta comparatione horum terminorum cum terminis prioribus PM denotantibus, juxta cognitas comparationis leges sc. $\frac{48nr^4y^2}{\sqrt{4096r^7y^3}} = \sqrt{ry}$. inde $n = \frac{16}{9}$ similiter $m = \frac{16}{25}$; & $l = \frac{16}{49}$, quibus substitutis erit $\frac{\sqrt{16ry}}{9} - \frac{\sqrt{16y^3}}{100r} - \frac{\sqrt{y^7}}{496r^3}$ (!) $= x^2 = GM^q$, adeoque

$$\sqrt{\frac{4ry^3}{9}} - \sqrt{\frac{16y^5}{400r}} - \sqrt{\frac{y^7}{196r^3}} \text{ (!)} = \frac{x^2}{2} = \frac{CM^q}{2} \text{ (!)} = VMC.$$

Adeoque etiam hoc modo habetur circuli quadratura. Et similem discursum in aliis adhibere non erit difficile, cuivis in singulari hoc calculi genere versato, ita ut

superfluum duxi praestatissimae hujus methodi usum pluribus exemplis illustrare. Unum tamen est quod hic obiter notandum puto, posse ex hac tangentium methodo breviter demonstrare veritatem regulae quam dedi pro solutione problematis primi.

Namque[1]) $dy \,.\, dx :: TM \,.\, MC$ (ut ex ista methodo est manifestum) sed $TM \,.\, MC :: MC \,.\, PM$. ob angulum rectum TMP. Ergo $dy \,.\, dx :: MC \,.\, PM$ (vel posito x pro MC) erit $dy \,.\, dx :: x \,.\, PM$. Unde $PM \times dy\,(!) = x dx$, & substituendo y & x pro earum differentiis dy, dx erit $PMx \,.\, y\,(!) = x^2$. Quod demonstrandum erat.

Das ist alles, was sich auf den Aufsatz Leibnizens im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684 bezieht. S. 30—37 beschäftigt sich Craig mit Rektifikation von Kurven und Komplanation von Umdrehungskörpern und erwähnt dabei Wallis, Huygens, Neil, Wren, Heuraet und Barrow. Die sieben letzten Seiten (S. 38—44) enthalten eine „Animadversio in methodum figuras dimetiendi, a clarissimo quodam Germano editam in Actis Eruditorum Lipsiae publicatis", die sich erst gegen eine Äußerung Tschirnhausens in den Acta Eruditorum 1683[2]), dann gegen eine Behauptung Leibnizens im Maiheft der Acta eruditorum 1684[3]) wendet. Craig glaubt offenbar, daß die zwei Aufsätze von ein und demselben Verfasser herrühren; hier benutzt Craig nicht Differentiale und was er bemerkt, steht in keinem Zusammenhang mit dem Aufsatze Leibnizens im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684.

Untersucht man nun die von mir zum Abdruck gebrachte Stelle des Buches von Craig, so findet man, daß zwei der Behauptungen des Herrn Cantor buchstäblich richtig sind: Craig hat nämlich tatsächlich, allerdings nur ganz im Vorübergehen, die Zeichen der Differentialrechnung benutzt, und er hat außerdem beiläufig die Tangentenmethode Leibnizens als diejenige gepriesen, welche Irrationalitäten am besten bewältigte. Aber darf man hieraus schließen, daß Craig wirklich in die Methode Leibnizens eingedrungen ist? In betreff dieser Frage soll zuerst darauf hingewiesen werden, daß Craig die von mir am Anfange dieses Aufsatzes erwähnten Druckfehler der Leibnizschen Abhandlung offenbar nicht entgangen sind, denn er weiß, daß $dy : dx = TM : MC$ (d. h. Subtangente : Ordinate), was in der Figur Leibnizens $dx : dy = XD : YX$ entspricht. Anderseits dürfte aus den bei ihm vorkommenden Formeln

1) Die Bezeichnungen TM, MC, PM beziehen sich auf Fig. 2 des Buches Craigs; TM ist die Subtangente, MC die Ordinate, die Craig x nennt, während die Abszisse y genannt wird, und PM ist die Subnormale.

2) *Methodus datae figurae, rectis lineis & curva geometrica terminatae, aut quadraturam, aut impossibilitatem ejusdem quadraturae determinandi, auctore D. T.;* Acta eruditorum 1683, S. 433—437. Die beanstandete Äußerung findet sich S. 437 Z. 30—31.

3) *De dimensionibus figurarum inveniendis;* Acta eruditorum 1684, S. 233—236. Die Abhandlung ist anscheinend anonym, aber im Register wird G. G. L. als Verfasser genannt. Die beanstandete Behauptung findet sich S. 234 Z. 14—20.

$$\sqrt{p} = \frac{dp}{\sqrt{4p}},\ \sqrt{q} = \frac{dq}{\sqrt{4q}},\ \sqrt{s} = \frac{ds}{\sqrt{4s}}$$

hervorgehen, daß er nur sehr wenig den Algorithmus Leibnizens verstand, denn diese Formeln sind ja keine Differentiationsformeln, es sei denn, daß das Differentiationszeichen auf Grund eines Druckfehlers dreimal ausgelassen worden ist. Zu derselben Folgerung gelangt man, wenn man auf die Worte „substituendo y & x pro earum differentiis dy, dx“ Bezug nimmt; man versteht den Sinn dieser Worte sehr gut, wenn man an die Slusesche Methode denkt, aber für die Differentialrechnung passen sie nicht. Daß Craig die Vorteile der Leibnizschen Methode nicht selbst beurteilen konnte, scheint mir aus seiner ganzen Darstellung offenbar zu sein. Sonst hätte er sofort durch Differentiation des Ausdruckes

$$\frac{1}{2}\left\{\sqrt{nry^3} - \sqrt{\frac{my^5}{4r}} - \sqrt{\frac{ly^7}{16r^3}} - \cdots\right\}$$

den neuen Ausdruck

$$\frac{3}{4}\sqrt{nry} - \frac{5}{4}\sqrt{\frac{my^3}{4r}} - \frac{7}{4}\sqrt{\frac{ly^5}{16r^3}} - \cdots$$

hergeleitet und durch Vergleichung mit dem Ausdruck

$$\sqrt{ry} - \sqrt{\frac{y^5}{4r}} - \sqrt{\frac{y^5}{16r^3}} - \cdots$$

unmittelbar gefunden, daß $n = \frac{16}{9}$, $m = \frac{16}{25}$, $l = \frac{16}{49}$, ...

Daß Craigs Versuch, die Differentialrechnung zu benutzen, von Leibniz selbst nicht besonders günstig beurteilt wurde, kann man aus dem Artikel *De geometria recondita*[1]) folgern. Hier berührt Leibniz zweimal[2]) diesen Versuch; an der ersten Stelle sagt er:

> Methodum quoque tangentium a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate sua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam praestantissimam & cujus ope methodus dimensionum valde juvetur, opinio [Druckfehler statt „optimo“] contra irrationalitates remedio suppeditato.

Den Umstand, daß Craig versucht hat, sich der Differentialrechnung zu bedienen, schätzt Leibniz also so wenig, daß er denselben stillschweigend übergeht. An der anderen der zwei fraglichen Stellen äußert sich Leibniz auf folgende Weise:

---

1) *G. G. L. De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum, Addenda his quae dicta sunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob. p. 264; Decemb. p. 586;* Acta eruditorum 1686, S. 292—300.

2) A. a. O., S. 292 Z. 3 v. u. — S. 293 Z. 1; S. 297 Z. 2—8.

> Ipse Dn. Craigius suspicatus est, aliquid altius in ea latere, ac proinde pag. 29 sui libelli inde derivare conatus est theorema Barrovianum (quod summa intervallorum, inter ordinatas & curvae perpendiculares in axe sumtorum, & ad axem applicatorum, aequetur semiquadrato ordinatae ultimae) in cujus executione tamen nonnihil a scopo deflexit, quod in nova methodo non miror.

Wäre Leibniz wirklich der Ansicht gewesen, daß Craig die „neue Methode" verstanden hatte, so würde er sich wohl auf andere Weise geäußert haben.

Aber auch, wenn man annimmt, daß Craig die Differentialrechnung verstand, muß man anerkennen, daß die Stelle bei Craig, wo die Differentialrechnung benutzt wird, wenig geeignet war, die Anwendbarkeit der neuen Methode nachzuweisen, und dadurch wird ein Umstand bedeutungslos, worauf Herr Cantor sehr großes Gewicht legt[1]), nämlich daß Newton Craigs Buch vor der Drucklegung durchgelesen hatte.[2]) Denn was hätte Newton aus dieser Stelle lernen können, auch wenn er dieselbe mit Aufmerksamkeit gelesen hatte? Was Craig in Wirklichkeit leistete, war ja eine Auswertung des Integrales $\int\sqrt{ax-x^2}\,dx$ durch Reihenentwickelung und Integration von Ausdrücken, die alle die Form $x^{\frac{n}{2}}dx$ haben, und dies konnte ja Newton selbst seit wenigstens 15 Jahren ausführen.[3]) Nimmt man noch hinzu, daß Craigs Manuskript, wie man aus den zahlreichen Druckfehlern vermuten kann, sehr schlecht geschrieben zu sein scheint, so wird es sehr wahrscheinlich, daß Newton die fragliche Stelle des Manuskriptes nicht aufmerksam oder vielleicht gar nicht gelesen hat.[4]) Fast ebenso wahrscheinlich ist es, daß Newton nach dem Erscheinen von Craigs Buch keinen Anlaß gehabt hat, von dem Wert der Leibnizschen Differentialrechnung überzeugt zu werden, auch wenn er die Stelle dann studiert hätte.

Das Ergebnis der vorangehenden Untersuchung kann auf folgende Weise zusammengefaßt werden.

a) Wallis hat ausdrücklich angegeben, daß er noch 1696 den Aufsatz Leibnizens im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684 weder gelesen noch gesehen hatte, und man hat nicht den geringsten Grund, die Richtigkeit dieser Angabe anzuzweifeln.

---

1) M. Cantor, a. a O. S. 195.

2) Siehe J. Craig, *De calculo fluentium libri duo,* Londoni 1718, Praefatio.

3) Siehe I. Newton, *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas; Opuscula* 1, Lausannae et Genevae 1744, S. 4.

4) Es ist übrigens nicht unmöglich, daß Craig den Text der Seiten 26—30 nachträglich einfügte, denn dieser Text gehört nicht mit dem vorangehenden und nachfolgenden zusammen.

b) Craig hat allerdings den Aufsatz 1684 oder 1685 eingesehen, aber nur oberflächlich studiert und jedenfalls hat er das Resultat seines Studiums nur im Vorübergehen für sein Buch vom Jahre 1685 verwertet.

c) Man hat keinen Anlaß anzunehmen, daß Newton durch Craigs Buch auf die Vorzüge der Leibnizschen Differentialrechnung aufmerksam gemacht wurde, so daß er dadurch angeregt werden konnte, von dem Aufsatz Leibnizens im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684 Kenntnis zu nehmen.

Bisher habe ich mich ausschließlich mit der ersten Aufnahme der Leibnizschen Differentialgleichung in England beschäftigt. Aber auch in den übrigen Ländern waren die Verhältnisse kaum günstiger. Inwieweit Tschirnhaus sich der Mühe unterzog, sich eine Einsicht in die Leibnizsche Methode zu verschaffen, dürfte schwer zu entscheiden sein[1]), und jedenfalls bekam er seine Kenntnisse nicht durch Leibnizens gedruckte Abhandlungen. In Frankreich begann Hôpital erst 1688 die neue Theorie zu studieren, und nach seiner eigenen Aussage[2]) gelang es ihm wirklich alsbald, die Abhandlung Leibnizens vom Jahre 1684 zu verstehen; freilich behauptet Johann Bernoulli, daß Hôpital noch 1691 nicht die Differentialrechnung bewältigt hatte.[3]) In Holland hatte Huygens noch im August 1690 nicht einmal versucht, von der Methode Leibnizens Kenntnis zu bekommen[4]) und erst im Oktober dieses Jahres konnte er Leibniz mitteilen[5]), daß er die Grundlagen derselben verstanden hatte. In der Schweiz hatte sich Jakob Bernoulli 1687 vergebens bemüht[6]), in die Methode einzudringen und erst zwei oder drei Jahre später war er imstande, sich derselben zur Lösung mathematischer Probleme zu bedienen.[7]) Um dieselbe Zeit lernte Johann Bernoulli vermutlich die Methode ver-

---

1) Siehe *Briefwechsel von G. W. Leibniz mit Mathematikern*, herausgeg. von C. I. Gerhardt 1, Berlin 1899, S. 318.

2) Siehe seinen Brief an Leibniz vom 30. November 1694; *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausgeg. von C. I. Gerhardt 2, Berlin 1850, S 250.

3) Siehe R. Wolf, *Biographien zur Kulturgeschichte der Schweiz* 2, Zürich 1859, S. 74.

4) Siehe seinen Brief an Leibniz vom 24. August 1690; *Lebinizens Mathematische Schriften*, herausgeg. von C. I. Gerhardt 2, S 45.

5) A. a. O. S. 47.

6) Siehe seinen Brief an Leibniz vom 15 Dezember 1687; *Leibnizens Mathematische Schriften*, herausgeg. von C. I. Gerhardt 3:1, Halle 1855, S. 13.

7) *J. B. Analysis problematis antehac propositi, de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus aequales altitudines emetiatur; et alterius cujusdam problematis propositio;* Acta eruditorum 1690, S. 217—219.

stehen, aber noch 1691 motivierte Jakob Bernoulli einen Artikel[1]) dadurch, daß die Abhandlung Leibnizens in den Acta eruditorum 1684 wegen ihrer Kürze nicht zur Einführung in die Differentialrechnung geeignet war.

Man kann also behaupten, daß die Leibnizsche Differentialrechnung anfangs fast unbeachtet wurde[2]); erst gegen 1690 begannen die Mathematiker, sich mit der neuen Methode zu beschäftigen und den Anlaß dazu gab nicht der Aufsatz Leibnizens im Oktoberheft der Acta eruditorum 1684, sondern der Nachweis, daß die Differentialrechnung tatsächlich imstande war, Probleme leicht zu lösen, die durch die alten Methoden unlösbar waren oder wenigstens nur mit großer Mühe bewältigt werden konnten.

---

1) *Specimen calculi differentialis in dimensione parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earundem evolutionibus, aliisque J. B.;* Acta eruditorum 1691, S. 14.

2) Vgl. C. I. Gerhardt, *Geschichte der Mathematik in Deutschland*, München 1877, S. 159. — J. E. Montucla, *Histoire des mathématiques*, nouv. éd. 2, Paris an VII, S. 393.

Kleine Mitteilungen.

Kleine Bemerkungen zur letzten Auflage[1]) von Cantors „Vorlesungen über Geschichte der Mathematik“.

Die erste (fette) Zahl bezeichnet den Band, die zweite die Seite der „Vorlesungen“. BM = Bibliotheca Mathematica.

1^3: 12, 15, 22, siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 61. — **1^3: 33,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 307. — **1^3: 51, 58, 66, 71, 106, 146, 152, 153, 155, 157, 158, 159, 160, 162,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 61—64. — **1^3: 163—165,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 64, 173—174. — **1^3: 166, 168, 176, 180, 181, 182, 183,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 64—65. — **1^3: 198, 201,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 237. — **1^3: 202,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 307—309. — **1^3: 203,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 65, 309. — **1^3: 206,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 237—238. — **1^3: 213, 225, 236, 245,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 65. — **1^3: 257,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 139. — **1^3: 270, 287, 297, 298, 310,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66. — **1^3: 335, 339—340, 344, 348,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 174—176. — **1^3: 351,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66. — **1^3: 365, 368,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 177. — **1^3: 372,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 411—412; **9_3**, 1908/9, S. 238. — **1^3: 374, 376,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 412—413. — **1^3: 380,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 66—67. — **1^3: 388,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 177. — **1^3: 401—402,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 239. — **1^3: 406, 409,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 177—178. — **1^3: 409,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 239. — **1^3: 410,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 178. — **1^3: 429,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67. — **1^3: 431,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67; **9_3**, 1908/9, S. 139—140. — **1^3: 432,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67, 178—179. — **1^3: 433,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 179. — **1^3: 447, 448,** siehe BM **9_3**, 1908/9, S. 239—240. — **1^3: 452,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 179. — **1^3: 459,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 309—310. — **1^3: 464,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 179. — **1^3: 470,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 311. — **1^3: 471,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 413. — **1^3: 476,** siehe BM **9_3**, 1908, S. 71—72. — **1^3: 488,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 67. — **1^3: 498,** siehe BM **8_3**, 1907/8, S. 180.

1^3: 500. Hier wäre es angebracht, wenigstens einige Zeilen einzufügen über den Mathematiker, dessen Namen wir nur unter der arabischen Form „Aganis“ kennen, und der ein Lehrer des Simplikios gewesen zu sein scheint (vgl. P. Tannery BM 2_3, 1901, S. 9—11), obgleich er von einigen Historikern mit Geminus identifiziert worden ist. Bekanntlich finden sich im Euklid-Kommentar des Anaritius zahlreiche Notizen über die Lehren dieses „Aganis“. Ganz besonders wäre hervorzuheben, daß „Aganis“ das 5. Postulat wesentlich auf dieselbe Weise wie Wallis zu beweisen versucht hat. „Aganis“ nimmt nämlich an, daß zu jedem Dreieck könne ein ihm ähnliches von beliebiger Größe konstruiert werden, und bestimmt auf Grund dieser Annahme den Punkt, wo sich zwei nicht parallele Gerade schneiden (vgl. *Codex Leidensis 399, 1,* ed.

1) Dritte Auflage des 1. Bandes, zweite Auflage der 2. und 3. Bände.

R. Besthorn et J. L. Heiberg, I : 2, Kopenhagen 1897, S. 128—131; Anaritius, *In decem libros priores elementorum Euclidis commentarii*, ed. M. Curtze, Leipzig 1899, S. 70—72). G. Eneström.

1^3**: 500, 502,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67. — **1**^{3}**: 503—504,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 180—181; **9**$_3$, 1908/9, S. 240—241. — **1**^{3}**: 509, 510,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 67. — **1**^{3}**: 512,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 140—141. — **1**^{3}**: 513, 515, 528, 545,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 68—69. — **1**^{3}**: 551,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 141—142. — **1**^{3}**: 563—564,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 69. — **1**^{3}**: 567,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 241. — **1**^{3}**: 576,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 69—70, 181; **9**$_3$, 1908/9, S. 142. — **1**^{3}**: 580, 583, 590—591, 660, 664, 703, 704,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70. — **1**^{3}**: 706,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70, 181. — **1**^{3}**: 710,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 241. — **1**^{3}**: 713,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70. — **1**^{3}**: 715,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S 241. — **1**^{3}**: 715—716,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 70—71, 181. — **1**^{3}**: 717,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71, 182—183. — **1**^{3}**: 718,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71; **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1**^{3}**: 719,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 183—184. — **1**^{3}**: 720,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71. — **1**^{3}**: 730,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71, 184—185. — **1**^{3}**: 734,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71. — **1**^{3}**: 736,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1**^{3}**: 736—737,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 71—72, 185. — **1**^{3}**: 738,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1**^{3}**: 742,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1**^{3}**: 743, 748, 750,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1**^{3}**: 763,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 242. — **1**^{3}**: 764,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185. — **1**^{3}**: 766,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143. — **1**^{3}**: 770,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185. — **1**^{3}**: 771,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143. — **1**^{3}**: 779,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1**^{3}**: 780, 781,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1**^{3}**: 792,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 143—144. — **1**^{3}**: 794,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 72. — **1**^{3}**: 795,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1**^{3}**: 798,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 144. — **1**^{3}**: 800,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73; **9**$_3$, 1908/9, S. 144—145. — **1**^{3}**: 801,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 185—186; **9**$_3$, 1908/9, S. 145. — **1**^{3}**: 802,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73, 186—187, 414—415. — **1**^{3}**: 805—806,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73. — **1**^{3}**: 809—810,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243. — **1**^{3}**: 815,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73. — **1**^{3}**: 838,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 415. — **1**^{3}**: 842,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 243 — **1**^{3}**: 855,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8. S. 73. — **1**^{3}**: 857,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73; **9**$_3$, 1908/9, S. 243—244. — **1**^{3}**: 859, 862, 863,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 73—74. — **1**^{3}**: 867,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74, 187. — **1**^{3}**: 869, 875—876, 877, 878,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 74—76. — **1**^{3}**: 881,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 415—416. — **1**^{3}**: 882, 889, 893,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 77—78. — **1**^{3}**: 900,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78, 187—188. — **1**^{3}**: 901,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 145—146. — **1**^{3}**: 902,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 78—79. — **1**^{3}**: 906,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 188—189; **9**$_3$, 1908/9, S. 244. — **1**^{3}**: 908,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79; **9**$_3$, 1908/9, S. 146—147. — **1**^{3}**: 909,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79. — **1**^{3}**: 910,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79, 416. — **1**^{3}**: 911,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 79—80.

---

2 : 5, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 286; **8**$_3$, 1907/8, S. 80. — **2 : 7,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351 — **2 : 8,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 501; **6**$_3$, 1905, S. 309. — **2 : 9,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 147. — **2 : 10,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **9**$_3$, 1908/9, S. 147—148. — **2 : 11,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 14—15,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **5**$_3$, 1904, S. 200; **6**$_3$, 1905, S. 208—209. — **2 : 17,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 189. — **2 : 20,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **3**$_3$, 1902, S. 239. — **2 : 25,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 274; **9**$_3$, 1908/9, S. 148. — **2 : 26,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 244—245. — **2 : 30,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 31,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 351—352; **3**$_3$, 1902, S. 239—240; **6**$_3$, 1905, S. 309—310. — **2 : 32,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 34,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 144; **6**$_3$, 1905, S. 310; **8**$_3$, 1907/8. S. 190. — **2 : 37,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 105. — **2 : 38,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **9**$_3$, 1908/9, S. 148. — **2 : 39,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 209; **9**$_3$, 1908/9, S. 245. — **2 : 41,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352; **8**$_3$, 1907/8, S. 80—81; **9**$_3$, 1908/9, S. 72—73. — **2 : 45,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 148—150. — **2 : 46,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 81. — **2 : 51,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 106; **9**$_3$, 1908/9, S. 150. — **2 : 52,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 190—191. — **2 : 53,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201. — **2 : 57,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 352. — **2 : 59,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 207—208. — **2 : 59—60,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 502; **6**$_3$, 1905, S. 310—311 — **2 : 61,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 85—86, 208—

209, 286—287; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 150. — **2:63,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 206. — **2:65,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 151. — **2:67,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 209—210. — **2:70,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 417. — **2:73,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502. — **2:77,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 152. — **2:82,** 87, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 502.

2: 87. In der Fußnote 2 behauptet Herr Cantor, daß Vossius und Kästner „in dem Todesjahre 1256 [Sacroboscos] übereinstimmen". Dies ist indessen nicht der Fall, denn nur Vossius gibt 1256 als Sacroboscos Todesjahr an, während bei Kästner zwar (S. 310 Z. 20) die Jahreszahl 1256 steht, aber nicht als Todesjahr; Kästner erwähnt nämlich nach E. Vinetus, Sacrobosco habe vier Traktate „geschrieben, um 1256, wie aus einem Gedichte erhellt, mit welchem dieses Buch de computo beschlossen wird". Freilich ist die Cantorsche Ungenauigkeit an sich ziemlich bedeutungslos, aber wenn er sich die Mühe gegeben hätte, nachzusehen, was Kästner wirklich sagt, so hätte er vermeiden können, im Texte unrichtig 1256 als Sacroboscos Todesjahr anzugeben.

G. Eneström.

2:88, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{6}_3$, 1905, S 395. — **2:89,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 245—246. — **2:90,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503. — **2:91—92,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 409—410; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 395—396; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 191; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 152. — **2:97,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:98—99,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 269—270; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 106—107; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 210. — **2:100,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 81; $\mathbf{9}_3$, 1908, S. 73—74. — **2:101,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 396; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 152—153. — **2:104—105,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503; $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 397—398; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153. — **2:106,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 380. — **2:111,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2:114,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153. — **2:116,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 153—154. — **2:117—118,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 107, 311. — **2:122,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 503—504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397. — **2:126,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S 406; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 210. — **2:127,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 406. — **2:128,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 191—192. — **2:129,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:132,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 515—516. — **2:143,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2:144,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381. — **2:145,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 287. — **2:148,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 381—382. — **2:150—151,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288.

2: 155. Ich bin jetzt im Besitz einer photographischen Kopie des *Introductorius liber qui et pulveris dicitur in mathematicam disciplinam*, und durch die Untersuchung derselben hat es sich ergeben, daß dieser Traktat eine gekürzte Redaktion des von Boncompagni 1857 herausgegebenen *Liber algorismi de pratica arismetrice* ist. Um den Lesern der Bibliotheca Mathematica einen Vergleich der zwei Traktate zu ermöglichen, drucke ich hier aus dem Cod. Vatic. Reg. Su. 1285 ein Kapitel (Bl. 20a Sp. 1—2) ab, das dem Kapitel „Item de inuenienda radice integrorum numerorum alio modo per circulos" der Boncompagnischen Ausgabe (S. 86—90) entspricht.

> Cum radicem cuiuslibet numeri volueris invenire ei per differentias suas disposito quot volueris circulos tamen pares prepone quia quanto plures apposueris tanto amplius melius invenies. Deinde invenias radicem eius cum prepositis circulis sicut supra docuimus et si aliquid superius remanserit pretermitte non curans de eo et scias numerum illum non habere certam radicem. si autem nichil remanserit erit radix. Postea computa ab inicio differenciarum radicis inuente secundum medietatem circulorum

super positorum. et que ultra remanserint differencias per se alibi nota. delens eas de loco suo. Verbi gracia. si preposuisti quatuor circulos pretermittes duas differencias versus dexteram. et que ultra remanserint differencias notabis alibi. et si preposuisti sex circulos pretermittes tres differencias et que ultra fuerint signabis semotim. deinde si quis numerus fuerit in pretermissis differenciis multiplica bis(!) eum in ·LX· Postea pretermittes differencias secundum medietatem circulorum et accipies numerum qui fuerit ultra et pones eum sub numero alibi notato. et erunt minuta totus numerus superpositus erit integer. et iterum numerum qui remanserit in pretermissis differenciis secundo multiplica in ·LX· deinde pretermittes similiter differencias secundum medietatem circulorum et numerum qui fuerit ultra pones sub numeris primis et erunt secunda. et ita facies usque ad quarta et quinta et sexta et sic in ceteris donec nichil remaneat preter circulos. Verbi gratia. cum vellemus inuenire radicem duorum, preposuimus illi sex circulos fuitque binarius in septima differencia que est milium milium differencia. et si preposuissemus octo circulos vel .X· aut etiam XII· esset conveniens. Facta ad (!) dispositione invenimus radicem numeri cum prepositis circulis et fuit mille ·CCCC·XIIIJ et remansit aliquid modicum quod pretermisimus non curantes de eo. deinde pretermittentes tres differencias secundum medietatum circulorum et invenimus unitatem in quarta differencia quam delevimus de loco illo et notauimus eam alibi. et est numerus integer. deinde multiplicauimus numerum qui fuerat in differenciis pretermissis tribus id est ·CCCC·XIIIJ in ·LX· et fuerunt ·XXIIIJ· milia ·DCCC·XL· pretermissis itaque tribus differenciis primis accepimus numerum qui erat in sequentibus differenciis et remouimus eum de loco suo et posuimus eum sub unitate alibi notata. et fuerunt ·XXIIIJ· minuta Iterum multiplicauimus numerum trium remanencium differenciarum id est ·DCCC·XL in ·LX· et habuimus quinquaginta milia ·CCCC· pretermittentes iterum tres primas differencias accepimus numerum qui erat in sequentibus id est ·L· secunda quem notauimus sub unitate et minutis remouentes ea de loco suo. deinde multiplicauimus etiam residuum numerum id est ·CCCC· in ·LX· et fuerunt ·XXIIIJ milia. pretermisimus et differencias tres in quibus nullus erat numerus et accepimus numerum qui erat in sequentibus differenciis id est ·XXIIIJ· tercia quas adiunximus numero superiori scribentes eas sub secundis et nichil remansit quod iterum multiplicaremus in ·LX· inuenimus quod radicem duorum est unus integer et ·XXIIII· minuta et ·L· secunda atque ·XXIIII· tercia.

Im *Introductorius liber* sind also ganze Stücke des *Liber algorismi* ausgelassen, z. B. die Berechnung von $\sqrt{2000000} = 1414$, die eigentlich unnötig war, da sie auf Grund des früher (S. 75—79 der Boncompagnischen Ausgabe) gelehrten ausgeführt werden konnte; überdies sind rein stilistische Änderungen und Kürzungen so häufig, daß sie fast als regelmäßig betrachtet werden können. Unter solchen Umständen ist es ja eine Geschmackssache, ob man den *Introductorius liber* als eine neue Redaktion oder als eine Bearbeitung des *Liber algorismi* bezeichnen soll; persönlich möchte ich jene Benennung vorziehen, da es mir nicht möglich gewesen ist, Änderungen oder Zusätze aufzufinden, die aus anderen Quellen geschöpft sind. Freilich hat schon Narducci darauf hingewiesen, daß Bl. 20b des Cod. Vatic. Reg. Su. 1285 15 Zeilen über römische Bruchterme

enthält, aber man hat keinen Grund anzunehmen, daß diese Zeilen vom Redaktor des *Introductorius liber* herrühren. Aus den ziemlich zahlreichen Fehlern der Handschrift geht nämlich hervor, daß sie von einem nicht sachkundigen Abschreiber angefertigt ist, und dieser wollte offenbar den noch freien Raum der letzten Seite benutzen. Er fügte darum einen (von Narducci veröffentlichten) Absatz hinzu, der eigentlich aus zwei nicht zusammengehörenden Stücken besteht; ferner schrieb er ein anderes Stück (21 Zeilen) ab, das sich auf die Berechnung von $A\left(1 \pm \frac{1}{a} \pm \frac{1}{b}\right)$ bezieht, und das ich hier unten zum Abdruck bringe.

> Si volueris a quolibet numero quaslibet subtrahere partes. numerum easdem habentem partes quere et diminuendas partes illi subtrahe. in remanenti vero numerum a quo partes reducere proposueram. multiplica. provenientem summam per integrum numerum divide. et quod provenerit ex divisione erit residuum numeri subtractis removendis partibus. ut si uelles a ·XXX· (!) removere terciam et quartam. accipe ·XII· et terciam et quartam illi subtrahe id est septem. in remanenti numero id est ·V· multiplica ·XX· et fient ·C· diuide igitur centum per XII· et prouenient octo. et remanebunt ·IIII· id est tercia duodecim. (!) Igitur si a ·XX· reduxeris terciam et quartam remanebunt octo et tercia. et si uolueris XX· addere eius terciam et quartam adde XII· terciam et quartam ejus id est ·VII· et habebis ·XVIIIJ· Multiplica igitur viginti in ·XVIIIJ· et provenient 380 quem divides per ·XII· et exibunt ex divisione ·XXXI· et due tercie unius. et sic habebis ·XX· cum sua tercia et quarta.' sibi addita et sic in omnibus . . . (?) oportet.

Endlich fügte der Abschreiber am Ende der 2. Spalte des Bl. 20b die zwei Tafeln hinzu, die S. 103 der Boncompagnischen Ausgabe stehen.

G. Eneström.

---

2 : 155—156, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 410—411; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 86—87. — **2 : 157, 158,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352. — **2 : 160—162,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 311—312; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 87—88; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 154. — **2 : 163,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 312. — **2 : 164,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 165,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 246—247. — **2 : 166,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504. — **2 : 175,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 140. — **2 : 178—179,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 192—193. — **2 : 206,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 313. — **2 : 208,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 247. — **2 : 210,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 352—353. — **2 : 218,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 284. — **2 : 219,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 222,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 397—398. — **2 : 224—226,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155. — **2 : 228,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 193. — **2 : 229,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 504—505; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 194. — **2 : 230,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 195—196; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 155—157. — **2 : 232, 234, 237, 238, 240,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 196—199. — **2 : 242,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 199—200. — **2 : 243,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 398; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 382; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200. — **2 : 245,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383. — **2 : 246,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 283; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200. — **2 : 247,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 383—384; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 247. — **2 : 249,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 200—201. — **2 : 250,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 253,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353. — **2 : 272,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 247. — **2 : 273,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 505. — **2 : 274,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 325. — **2 : 281,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 411. — **2 : 282, 283,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 353—354. — **2 : 284,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 157—158. — **2 : 286, 287, 289, 290, 291.** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 506—507. — **2 : 296.** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 354. — **2 : 304,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 201. — **2 : 305,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 88. — **2 : 306, 308,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 248. — **2 : 313,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 507. — **2 : 314,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 288—289. — **2 : 317,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 69; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 318,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 158.

— **2 : 319**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 201—202. — **2 : 320**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 88—89; **9**$_3$, 1908/9, S. 248. — **2 : 322**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399; **8**$_3$, 1907/8, S. 202—203. — **2 : 325**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 313—314. — **2 : 327**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 248—249. — **2 : 328**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140; **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 334**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 339**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 351**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399. — **2 : 353**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 355, 357**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 399—400. — **2 : 358**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87; **8**$_3$, 1907/8, S. 203. — **2 : 360**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 87. — **2 : 371**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314. — **2 : 375**, siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 75. — **2 : 379**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400; **7**$_3$, 1906/7, S. 384. — **2 : 380**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 400—401. — **2 : 381**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 385**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 81; **4**$_3$, 1903, S. 207; **7**$_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 386**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507; **5**$_3$, 1904, S. 306. — **2 : 388**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 289. — **2 : 392**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 395**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507—508. — **2 : 396**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 82. — **2 : 397**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 211. — **2 : 398**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 204; **9**$_3$, 1908/9, S. 158—160. — **2 : 399**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 107—108; **8**$_3$, 1907/8, S. 204—205. — **2 : 401, 405**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 410**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 290. — **2 : 411, 412**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 89. — **2 : 413**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 205. — **2 : 419**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 205—206; **9**$_3$, 1908/9, S. 249—250. — **2 : 420**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 83, 206. — **2 : 421, 422**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 206. — **2 : 425**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 507. — **2 : 426**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 427**, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 314—315; **8**$_3$, 1907/8, S. 207. — **2 : 428**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 208; **9**$_3$, 1908/9, S. 160. — **2 : 429**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 201—202; **8**$_3$, 1907/8, S. 208—209. — **2 : 430**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 434**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 160—161. — **2 : 437—438**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 209—210. — **2 : 440**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 441**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 161. — **2 : 442**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 325. — **2 : 444**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 446**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 250. — **2 : 449**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140. — **2 : 452**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 210. — **2 : 454**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 242. — **2 : 457**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 250—251. — **2 : 471**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 161. — **2 : 474**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 140—141; **9**$_3$, 1908/9, S. 161, 251. — **2 : 476**, siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 75. — **2 : 479—480**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141; **7**$_3$, 1906/7, S. 290—291, 385; **9**$_3$, 1908, S. 75, 251. — **2 : 481**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **8**$_3$, 1907/8, S. 83. — **2 : 482**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 508; **2**$_3$, 1901, S. 354; **3**$_3$, 1902, S. 240; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 483**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 291. — **2 : 484**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 486, 489**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 490**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 385—386. — **2 : 497**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **4**$_3$, 1903, S. 87; **7**$_3$, 1906/7, S. 291, 386. — **2 : 503, 505**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 292. — **2 : 506, 507**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 162—163. — **2 : 509**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270, 509. — **2 : 510**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 512**, siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 514, 516, 517**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 524**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 90. — **2 : 527**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 529**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91. — **2 : 530**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 354—355; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 531**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212. — **2 : 532**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509; **7**$_3$, 1906/7, S. 292; **8**$_3$, 1907/8, S. 84; **9**$_3$, 1908/9, S. 163—164. — **2 : 535**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 536**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 212—213. — **2 : 537**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 539**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 293; **9**$_3$, 1908/9, S. 252. — **2 : 541**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 509. — **2 : 547**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 84. — **2 : 548**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2 : 549**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **6**$_3$, 1905, S. 401. — **2 : 550**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355; **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2 : 554**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 555**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285; **6**$_3$, 1905, S. 322. — **2 : 558**, siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 76. — **2 : 561**, siehe BM **7**$_3$, 1906, S. 91. — **2 : 565**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 285. — **2 : 566**, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 85. — **2 : 567, 568**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 569**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 572—573**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510; **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 576**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 355—356. — **2 : 579**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 145. — **2 : 580—581**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 207; **8**$_3$, 1907/8, S. 85—86.

2 : 581. Ich kann jetzt meine frühere Bemerkung über das kleine Rechenbuch Simon Jacobs (BM **8**$_3$, 1907/8, S. 85—86) ergänzen. Freilich ist es mir nicht gelungen, die Auflage von 1557 aufzufinden, aber seit einiger Zeit

bin ich im Besitz einer späteren Auflage, die ebenfalls sehr selten zu sein scheint, und deren Titel ich hier zum Abdruck bringe:

> Rechen= || buch auff den Linien vnd mit || Ziffern/ sampt allerley vor= theilen/ frag= || weise/ Jetzt von neuwem vnd zum neuntenmal || mit vielen gründtlichen anweisungen/ oder Demon= || stration/ sampt derselben Vnderrichtung gemeh= || ret. Der gestalt vormals nicht || getruckt. || Sampt angehengtem gründtlichen vnd || kurtzen Bericht/ wie man auff ein jede Eich/ Vi= || sier= ruthen zurichten vnd bereyten soll. || Jetzt neuw hinzu gethan: || Durch Simon Jacob von Koburgk/ || weilandt Rechenmeister zu Franck= || fort am Mayn. || Im Jahr 1600.
>
> Oktav, (24) S. + 175 numerierten Blättern. — Druckort fehlt.

Unmittelbar nach dem Titelblatte kommt eine Vorrede (20 Druckseiten), die vom 23. Februar 1557 datiert ist, und die die Richtigkeit meiner Deutung der Vorrede Pankraz Jacobs durchaus bestätigt. Simon Jacob berichtet nämlich, daß er aus gewissen Gründen bisher verhindert worden sei, das ganze Rechenbuch herauszugeben; dann setzt er fort:

> hab ich darum̄ noht halben für mich genom̄en den anfang vnnd erstē theil mehr gemelts meins buchs, denselben an orten, da es von nöthē, gebessert, Vnd ... in Fragen gestelt.

Die Angabe (Z. 29—30) der *Vorlesungen:* „der Druck begann 1557, wurde aber unterbrochen“ sollte also entweder gestrichen oder modifiziert werden.

Aus dem oben abgedruckten Titel geht hervor, daß die Auflage 1600 des kleinen Rechenbuches Jacobs die neunte ist, und alle vorigen Auflagen scheinen sehr selten zu sein — keine einzige findet sich in der Plimptonschen Bibliothek in New York (siehe D. E. Smith, *Rara arithmetica*, Boston 1908, S. 298). Von diesen älteren Auflagen verzeichnet Murhard (*Litteratur der mathematischen Wissenschaften* I, Leipzig 1797, S. 171) vier (1557, 1589, 1590, 1599); ein Exemplar der Auflage 1599 war im Besitz des Fürsten B. Boncompagni (siehe *Catalogo della insigne biblioteca ... del principe B. Boncompagni* Roma 1895, S. 463), aber ob die Auflagen 1589 und 1590 wirklich existieren, weiß ich nicht. Dagegen existieren Auflagen von 1565 (Frankfurt a. M.) und 1574 (Getruckt zu Franckfort am Mayn, bey Christian Egenolffs Erben. In Verlegung D. Adami Loniceri, M. Johannis Cnipij vnd Pauli Steinmeyers, M. D. LXXIIII, (32) S. + 174 Bl. 8°), von denen Exemplare vor einigen Jahren in Antiquariatskatalogen ausgeboten wurden.

G. Eneström.

---

2 : 582, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 510. — **2 : 583,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270; **2**$_3$, 1901, S. 356. — **2 : 585,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 69—70. — **2 : 592,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 593,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 387. — **2 : 594,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 597,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S 270; **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 599—600,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 146. — **2 : 602,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270. — **2 : 603—604,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 270—271; **6**$_3$, 1905, S. 108; **8**$_3$, 1907/8, S 211. — **2 : 605,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 86. — **2 : 610,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 388. — **2 : 611,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 356—357. — **2 : 612,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **8**$_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 612—613,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 91—92. — **2 : 613,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357; **5**$_3$, 1904, S. 306; **7**$_3$, 1906/7, S. 294, 388—389. — **2 : 614,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 617, 619,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 108—109. — **2 : 620,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 141. — **2 : 621,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146; **6**$_3$, 1905, S. 402; **7**$_3$, 1906/7, S. 214, 389; **8**$_3$, 1907/8, S. 86—87; **9**$_3$, 1908, S. 77. — **2 : 622,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87 — **2 : 623,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 277; **2**$_3$, 1901, S. 146—147. — **2 : 624, 625,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 87—88. — **2 : 626,** siehe BM **7**$_3$,

1906/7, S. 389—390. — **2 : 632,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109. — **2 : 634, 637,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 315—316. — **2 : 638,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147. — **2 : 639,** siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 77. — **2 : 641,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 253. — **2 : 642,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 643,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 644,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 402—403. — **2 : 655,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 656,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 286. — **2 : 659, 660,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 147—148. — **2 : 661,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403. — **2 : 665,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 666,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 88—89; **9**$_3$, 1908/9, S. 164—165. — **2 : 667,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 89. — **2 : 669,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203. — **2 : 670,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 403; **7**$_3$, 1906/7, S. 391. — **2 : 674,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 683,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148.

---

2 : 683. Die Worte (Z. 5—6): „von dem er sich in algebraischen Dingen unterrichten ließ“ sollten meines Erachtens gestrichen werden. Soweit bekannt ist, stammen alle Berichte über Descartes' Verkehr mit Faulhaber unmittelbar oder mittelbar aus D. Lipstorps *Specimina philosophiae Cartesianae* (Leiden 1653, S. 78—80), und die betreffende Stelle ist im 10. Bande von Descartes' *Oeuvres* (Paris 1908, S. 252—253) wieder abgedruckt. Nach Lipstorps Darstellung hat Descartes gar nichts von Faulhaber gelernt, sondern dieser hat nur gewisse ziemlich schwierige Fragen gestellt, die Descartes sofort beantworten konnte. — Die Angabe (Z. 6): „1628 nahm er an der Belagerung von La Rochelle teil“ soll ebenfalls gestrichen werden; man weiß jetzt, daß sich Descartes zu dieser Zeit (Oktober 1628) in Holland befand (siehe *Oeuvres de Descartes* **10**, Paris 1908, S 35), so daß die alte Angabe unrichtig sein muß.

G. Eneström.

---

2 : 687, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 294. — **2 : 689,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 391; **8**$_3$, 1907/8, S. 89; **9**$_3$, 1908/9, S. 253. — **2 : 693,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **7**$_3$, 1906/7, S. 394—395. — **2 : 699,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 165—166. — **2 : 700, 701,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271. — **2 : 703,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 271—272; **8**$_3$, 1907/8, S. 212. — **2 : 704, 705,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 272—273. — **2 : 712,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 212—213. — **2 : 713,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 254. — **2 : 714,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 89—90. — **2 : 715,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 412. — **2 : 716,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 717, 718,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 92—93. — **2 : 719,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 357. — **2 : 720,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 287; **6**$_3$, 1905, S. 404. — **2 : 721,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **6**$_3$, 1905, S. 404—405. — **2 : 726,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90. — **2 : 727,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 392. — **2 : 741,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 395—396. — **2 : 742,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273; **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : 746,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 273. — **2 : 747,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 173; **2**$_3$, 1901, S. 225. — **2 : 749,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 88. — **2 : 753—754, 758,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 254—255. — **2 : 763,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S 166. — **2 : 765,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 90—91. — **2 : 766,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142; **5**$_3$, 1904, S. 412—413. — **2 : 767,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148, 357—358. — **2 : 770,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 208. — **2 : 772,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358; **7**$_3$, 1906/7, S. 392—393. — **2 : 773,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 213; **9**$_3$, 1908/9, S. 167. — **2 : 775,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 358—359. — **2 : 777,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **3**$_3$, 1902, S. 204. — **2 : 780,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 78, 167. — **2 : 783,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **4**$_3$, 1903, S. 88—89. — **2 : 784,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 787,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405; **7**$_3$, 1906/7, S. 296. — **2 : 790,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 393; **9**$_3$, 1908/9, S. 255. — **2 : 791,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 405. — **2 : 793—794,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307; **6**$_3$, 1905, S. 316—317, 405—406. — **2 : 795,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 797—798,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S 307; **6**$_3$, 1905, S. 317. — **2 : 799,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 802,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S 208. — **2 : 812,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 37. — **2 : 820,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148; **5**$_3$, 1904, S. 307. — **2 : 825,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148. — **2 : 827, 830,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 256—257. — **2 : 832,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 203—204; **6**$_3$, 1905, S. 211. — **2 : 840,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 148—149. — **2 : 843,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 328. — **2 : 850,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 109

—110. — **2**:**856, 865,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 149. — **2**:**876, 878, 879,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511. — **2**:**891,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 273. — **2**:**897,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 406. — **2**:**898,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 37, 208. — **2**:**901,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 511.

2: 902. Es ist buchstäblich richtig, daß WALLIS, wie Herr CANTOR (Z. 8—9) angibt, in der *Arithmetica infinitorum* nicht „ausdrücklich $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ schreibt", aber wer in den *Vorlesungen* Aufschlüsse über die Geschichte der mathematischen Zeichensprache sucht, kann kaum umhin, durch die CANTORsche Angabe irregeführt zu werden. Die zwei letzten Verweise des Stichwortes „Potenzgrößen" des Registers beziehen sich nämlich auf die Seiten 794 und 902 und S. 794 bemerkt Herr CANTOR richtig, daß DESCARTES noch nicht allgemeine Exponenten wie a^n schrieb; da nun bei der Bemerkung über die Bezeichnungsweise der *Arithmetica infinitorum* ohne weiteres a^p benutzt wird, liegt es sehr nahe anzunehmen, daß daselbst wirklich allgemeine Exponenten vorkommen. Dies ist indessen nicht der Fall; solche Exponenten kommen überhaupt nicht in der WALLISschen Arbeit vor. Statt „$a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$ schreibt" sollte also „Bruchexponenten anwendet" gesetzt werden.

Bekanntlich wurden allgemeine Exponenten von NEWTON und LEIBNIZ in Übung gebracht, aber in Wirklichkeit hat WALLIS dieselben schon früher im Vorübergehen benutzt, freilich nicht in der *Arithmetica infinitorum*, sondern in der ein Jahr später erschienenen Arbeit: *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum, tum numerosam arithmeticam tum speciosam complectens* (*Operum mathematicorum pars prima,* Oxonii 1657). Beispielsweise kommt S. 292 die Formel $\sqrt{{}^d R^d} = R$ (WALLIS setzt den Wurzelindex oben nach dem Wurzelzeichen) und S. 293 die Formel $AR^m \times AR^n = A^2 R^{m+n}$ vor.

Die obige Bemerkung ist anscheinend von geringem Belang, aber jedermann, der weiß, wie große Rolle die Bezeichnungsweise in der Geschichte der Mathematik spielt, muß der Ansicht beipflichten, daß in den mathematisch-historischen Handbüchern die Angaben in betreff der mathematischen Zeichensprache nicht unnötigerweise irreführend sein sollen.

G. ENESTRÖM.

---

2 : 902. Herr CANTOR stellt selbst die Frage: „Wie wird nun die Sache, wenn m [in der zweiten Auflage der *Vorlesungen* steht ganz wie in der ersten n, das natürlich ein Schreib- oder Druckfehler ist] aus den positiven Zahlen ausscheidet?", beantwortet aber dieselbe nur für $m = -1$; der Fall $0 > m > -1$ wird gar nicht erwähnt, und in betreff des Falles $m < -1$ deutet Herr CANTOR auf ein „Mißverständnis" von WALLIS hin. Ich werde zuerst den letzten Fall in Betracht ziehen und wähle als Beispiel $m = -2$, so daß die Frage wird: hat WALLIS wirklich behauptet, daß

$$\lim_{n=\infty} \sum_{h=0}^{h=n} h^{-2} : n^{-1} = 1 : -1?$$

Anscheinend ist diese Gleichung unsinnig, denn wir wissen ja, daß das linke Glied $\lim_{n=\infty} \frac{n\pi^2}{6}$ ist, also unendlich groß, und der letzte Umstand war WALLIS sehr wohl bekannt, aber dennoch behauptete er, daß seine Formel auch für

$m < -1$ richtig sei. Für ihn bedeutete nämlich $1 : -1$ nicht die negative Zahl -1, sondern eine überunendliche Größe („ratio plusquam infinita“). Selbstverständlich ist es sehr unangebracht, solche Größen, die in Wahrheit unendlich sind, als endliche negative Verhältnisse zu bezeichnen, aber von einem „Mißverständnis“ kann man meines Erachtens nicht reden (vgl. H. G. Zeuthen, *Geschichte der Mathematik im XVI. und XVII. Jahrhundert*, Leipzig 1903, S. 280).

Den Fall $0 > m > -1$ behandelt Wallis mehr im Vorübergehen, indem er bemerkt (prop. 105), daß wenn

$$\lim_{n=\infty} \sum_{h=0}^{h=n} h^{-m} : n^{-m+1} \qquad (m > 0)$$

eine überunendliche Größe ist, so ist

$$\lim_{n=\infty} \sum_{h=0}^{h=n} h^{-\frac{1}{m}} : n^{-\frac{1}{m}+1}$$

eine endliche Größe. Daß diese Größe gerade $\dfrac{1}{-\frac{1}{m}+1}$ ist, hat Wallis meines Wissens nicht ausdrücklich angegeben, aber sicherlich nur, weil er die Sache als selbstverständlich betrachtete.

Wallis hat also wirklich behauptet, daß die Formel

$$\lim_{n=\infty} \sum_{h=0}^{h=n} h^m : n^{m+1} = \frac{1}{m+1}$$

für alle Werte von m gültig ist, freilich so, daß er für $m < -1$ das zweite Glied $\dfrac{1}{m+1}$ als Zeichen einer überunendlichen Größe benutzt.

Als Ergänzung der von Herrn P. Stäckel (BM **8**$_3$, 1907/8, S. 40, Fußnote 2) zitierten Angabe von Meldercreutz, bemerke ich, daß Wallis nicht versucht hat, die Reihe der reziproken Quadratzahlen zu summieren, sondern nur behauptet (siehe oben), daß

$$\lim_{n=\infty} n\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

eine überunendliche Größe $\dfrac{1}{-1}$ sei, was ja eigentlich nichtssagend ist.

G. Eneström.

---

2 : 911, siehe BM **9**$_3$, 1908, S. 78—79. — **2 : 919**, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 204. — **2 : VIII** (Vorwort), siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 142. — **2 : IX, X** (Vorwort), siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 511—512.

---

3 : 9, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359. — **3 : 10**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518; **6**$_3$, 1905, S. 211; **7**$_3$, 1906/7, S. 393—394. — **3 : 11**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 12**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3 : 14—15**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 296—297. — **3 : 17**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512. — **3 : 18**, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 168. — **3 : 22**, siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512; **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 23**, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 297—298; **8**$_3$, 1907/8, S. 91. — **3 : 24**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209. — **3 : 25**, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209, 399; **9**$_3$, 1908/9, S. 168. — **3 : 26**, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 359; **7**$_3$, 1906/7, S. 394.

3 : 29. Die Annahme, zu jedem Dreieck könne ein ihm ähnliches mit beliebiger Veränderung der einzelnen Ausmessungen erzielt werden, ist schon mehr als 1000 Jahre vor WALLIS von AGANIS benutzt worden, um den Punkt zu konstruieren, wo sich zwei nicht parallele Gerade schneiden (siehe oben die Bemerkung zu **1** : 500).

G. ENESTRÖM.

---

3 : 37, siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 91—92. — **3 : 39,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 407. — **3 : 40,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 45—48, 49, 50,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 512—513. — **3 : 57,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 298—299. — **3 : 63,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 93—94. — **3 : 68,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 299; **9**$_3$, 1908/9, S. 257—258. — **3 : 70,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 360; **9**$_3$, 1908/9, S. 258. — **3 : 78,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92. — **3 : 82,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 97,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 394. — **3 : 100,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149; **7**$_3$, 1906/7, S. 299—300. — **3 : 102,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S 318; **7**$_3$, 1906/7, S. 300; **9**$_3$, 1908/9, S. 169.

---

3 : 104. Dem Berichte über ROLLES Verfahren, die unbestimmte Gleichung $ax - by = c$ $(a < b)$ zu lösen, könnte hinzugefügt werden, teils daß ROLLE in gewissen Fällen empfiehlt, $x = \left[E\left(\frac{b}{a}\right) + 1\right] y - t$ statt $x = E\left(\frac{b}{a}\right) y + t$ zu setzen, teils daß er die BACHETsche Kettenbruchmethode kennt, obgleich er aus formalen Gründen sein eigenes Verfahren vorzieht (*Traité d'algèbre*, Paris 1690, S. 77—78).

Wenn J. TROPFKE (*Geschichte der Elementar-Mathematik* **1**, Leipzig 1902, S. 300) ROLLES Verfahren „ein heute überholtes Lösungsverfahren" nennt, so ist dieser Ausspruch meines Erachtens nicht ganz berechtigt. Im wesentlichen stimmt nämlich das Verfahren mit dem jetzt gewöhnlich in den Elementarbüchern gelehrten überein, nur daß ROLLE die Gleichungskonstante nicht durch Division vermindert. Von der ursprünglichen Methode EULERS (Comment. acad. sc. Petrop. **7**, 1734/5, gedruckt 1740, S. 46—66) unterscheidet es sich nur dadurch, daß es in gewissen Fällen, ganz wie das Verfahren, das TROPFKE (a. a. O. S 300) „Methode von EULER" nennt, zu unnötigen Divisionen Anlaß gibt. Beispielsweise erfordert die ursprüngliche Methode EULERS bei der Lösung der Gleichung

$$111x - 301y = 222$$

nur die Transformation

$$x = \frac{301}{111}y + 2,$$

denn hieraus erhält EULER sofort die einfachste Lösung $y = 0$, $x = 2$ und dann unmittelbar die allgemeine Lösung $y = 111k$, $x = 301k + 2$. Dagegen muß man nach ROLLE unnötigerweise die Rechnungen $301 = 2 \cdot 111 + 79$, $111 = 1 \cdot 79 + 32$, $79 = 2 \cdot 32 + 15$, $32 = 2 \cdot 15 + 2$, $15 = 7 \cdot 2 + 1$ ausführen und gelangt dann zuletzt zur Lösung $y = 111k$, $x = 301k + 2$. Freilich wird in diesem Fall die Rechnung etwas vereinfacht, wenn man nach ROLLES oben angeführter Bemerkung nicht $301 = 2 \cdot 111 + 79$, sondern $301 = 3 \cdot 111 - 32$ setzt.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 112, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 209—210; **6**$_3$, 1905, S. 318. — **3 : 113,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 258—259. — **3 : 116,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513. — **3 : 117,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 518; **9**$_3$, 1908/9, S. 259—260 — **3 : 118,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 92—93. — **3 : 122,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 301. — **3 : 123,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 513; **4**$_3$, 1903, S. 399; **7**$_3$, 1906/7, S. 301—302. — **3 : 124,** siehe BM **3**$_3$, 1902,

S. 407—408; **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 126,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 288. — **3 : 129—130,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 93. — **3 : 131,** siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 210. — **3 : 151,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 326.

---

3 : 166. Z. 4 ist „25. Oktober" statt „26. Oktober" zu setzen (vgl. C. I. Gerhardt, *Die Entdeckung der höheren Analysis,* Halle 1855, S. 117). Der Ausdruck „Cavalierische Gesamtheiten" (Z. 4) für omn. w, omn. wx etc. kann natürlich sehr gut verteidigt werden, aber soviel ich weiß, treten Bezeichnungen wie „omn. w" erst 1670 bei Wallis auf (siehe *Mechanica sive de motu tractatus geometricus, pars secunda,* Londini 1670, S. 214 = *Opera mathematica* I, Oxoniae 1695, S. 710), und es ist meines Erachtens nicht ohne Interesse zu untersuchen, woher Leibniz seine ersten Bezeichnungen entnommen hat. Beiläufig bemerke ich, daß das Gleichheitszeichen ⊓, das Leibniz in seinen Aufzeichnungen vom Oktober 1675 anwendet, fast identisch ist mit dem 1667 von F. Dulaurens (*Specimina mathematica duobus libris comprehensa*, Parisiis CIↃ·IↃC·LXVII) benutzten. Bei Dulaurens ähnelt das Zeichen am meisten dem griechischen Kapitälchen für pi (Π).

G. Eneström.

---

3 : 167, 172—173, siehe BM **4**$_3$, 1903, S. 400. — **3 : 174,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 149—150. — **3 : 183,** siehe BM **1**$_3$, 1900, S. 432. — **3 : 188,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S 241.

---

3 : 195. Die Angabe (Z. 32—33), daß „in Craigs *Methodus figurarum quadraturas determinandi* das Newtonsche Binomialtheorem erstmalig gedruckt erschien" ist vielleicht nicht nachweislich unrichtig, aber ich bin überzeugt, daß kein wirklicher Kenner der Geschichte der Mathematik der zweiten Hälfte des 17. Jahrhunderts eine solche Angabe gebracht hätte. Erstens kommt in der 1685 erschienenen *Methodus* Craigs nicht das allgemeine Theorem, sondern nur die Spezialfälle $m = \frac{1}{2}$, $m = \frac{1}{3}$ und zwar ganz im Vorübergehen vor, während J. Wallis in seiner *Algebra*, die auf dem Titelblatt die Jahreszahl 1685 trägt, das allgemeine Theorem in einem besonderen Kapitel behandelt (siehe Chap. XCI: „The doctrine of infinite series, further prosecuted by Mr. Newton", S. 331). An der ersten Stelle, wo Craig das Binomialtheorem andeutet (S. 14), lauten seine Worte: „$z = \sqrt{r^2 - y^2} \cdots$ resolvo in seriem secundum methodum celeberrimi D. Isaaci Newtoni, et invenio $z = r - \frac{y^2}{2r} - \frac{y^4}{8r^3} - \frac{y^6}{16r^5} - \ldots$" [auf Grund eines Druckfehlers steht bei Craig $r\frac{y^2}{2r}$ stets $r - \frac{y^2}{2r}$] und S. 19 gibt er ohne weiteres an, daß $\sqrt[3]{d^3 - y^3} = d - \frac{y^3}{3d^2} - \frac{y^6}{9d^5} - \cdots$ Aus Craigs Ausführungen geht also höchstens hervor, das Newton eine Formel für $(a+b)^{\frac{1}{r}}$ gefunden hatte. Dagegen findet sich bei Wallis die allgemeine Formel:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \text{etc.}$$

Zweitens ist es gar nicht sicher, daß die Arbeit Craigs vor der *Algebra* Wallis' erschien. Wallis gibt nämlich im Vorworte der lateinischen Ausgabe (1693) der *Algebra* an, daß das englische Original schon 1684 herausgegeben

wurde, obgleich der Verleger auf das Titelblatt die Jahreszahl 1685 setzen ließ. Nun endete bekanntlich das *englische* Jahr 1684 im März 1685, so daß die *Algebra* jedenfalls vor Ende März 1685 erschien. Ist Herr CANTOR imstande nachzuweisen, daß CRAIGS Arbeit nicht später herausgegeben wurde?

Auffälligerweise fehlt im Register unter dem Stichwort „Binomialreihe" ein Verweis auf S. 195, und in diesem Falle ist die Unvollständigkeit des Registers eigentlich nicht zu bedauern.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 196. Die Worte (Z. 19): „hervorgerufen durch eine Abhandlung vom Mai 1684" sollten meines Erachtens gestrichen werden. Die *Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi* CRAIGS enthält nichts, das darauf hindeutet, daß sie durch die Abhandlung LEIBNIZENS im Mai-Heft der Acta eruditorum 1684 hervorgerufen wurde. Dagegen beruft sich der kurze Anhang (S. 38—44) „Animadversio in methodum figuras dimetiendi, a clarissimo quodam germano editum in Actis Eruditorum Lipsiae publicatis" ausdrücklich auf die fragliche Abhandlung LEIBNIZENS.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 201, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 207,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 519. — **3 : 215,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 260—262. — **3 : 218,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 513. — **3 : 220,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326.

---

3 : 221. Die Angaben der Zeilen 14—19 sind nicht überall korrekt. Im Januarheft der Acta eruditorum 1691 bemerkte JAKOB BERNOULLI (S. 14): „qui calculum BARROVianum . . . intellexerit, alterum a Dn. L. inventum ignorare vix poterit; utpote qui in priori illo fundatus est, et nisi forte in differentialium notatione, et operationis aliquo compendio ab eo non differt". Der Anfang des Ausspruches JAKOB BERNOULLIS im Juniheft der Acta eruditorum 1691 lautet (S. 290): „Quanquam enim, ut nuper innui, ansam huic dedisse credam calculum BARROVII", und er hat also erst hier deutlich die Meinung ausgesprochen, „LEIBNIZ dürfte wohl seine grundlegenden Gedanken aus BARROW haben". Diesen Ausspruch hat er also nicht, wie Herr CANTOR angibt, zurückgenommen. Dagegen ist es richtig, daß JAKOB BERNOULLI im Juniheft LEIBNIZ hoch über BARROW stellte, denn das „compendium", worüber er sich im Januarheft mit Geringschätzung äußerte, und welches Wort man wohl mit „Algorithmus" übersetzen darf, beurteilte er im Juniheft auf folgende Weise (S. 290): „compendium isthoc tale est, quod naturam rei prorsus mutat, facitque ut infinita per hunc praestari possunt, quae per alterum [d. h. durch die Methode BARROWS] nequeunt."

G. ENESTRÖM.

---

3 : 224, siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 225, 228,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 150.

---

3 : 228. Die Angabe der zweiten Fußnote: „Der volle Inhalt [des Briefwechsels zwischen LEIBNIZ und JOHANN BERNOULLI] wurde aus LEIBNIZENS brieflichem Nachlasse durch C. I. GERHARDT 1855 wiederhergestellt" ist nicht ganz genau. GERHARDT hebt selbst (S. 132 des 3. Bandes der *Werke* LEIBNIZENS) hervor, daß die Briefe LEIBNIZENS in dem Nachlasse sehr unvollständig vor-

handen waren, so daß dieselben größtenteils so wiedergegeben werden mußten, wie sie in der Ausgabe von 1745 sich finden. Glücklicherweise wurden die Lücken schon 1860 von P. Merian ausgefüllt nach den in Basel aufbewahrten Originalbriefen (siehe *Die Mathematiker Bernoulli,* Basel 1860, S. 56—61), ein Umstand, der Herrn Cantor entgangen zu sein scheint. Merian bringt Ergänzungen zu etwa 30 Briefen von Leibniz 1695—1716.

Daß die Ergänzungen, die Gerhardt selbst 1855 bot, nicht so bedeutend waren, wie dieser selbst behauptete, hat schon F. Giesel (Zeitschr. für Mathem. **10**, 1865; Hist. Abt. S. 11) hervorgehoben. G. Eneström.

---

3 : 230, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 211—212. — **3 : 232,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 212; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303; $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 94.

---

3 : 232. Bei dem Berichte über die sogenannte Bernoullische Differentialgleichung erwähnt Herr Cantor, daß das Problem von Jakob Bernoulli 1695 gestellt wurde, aber was sonst mitgeteilt wird, bezieht sich ausschließlich auf die Lösung Johann Bernoullis in den Acta eruditorum 1697. Auch an den späteren Stellen (S. 459, 880), wo die Bernoullische Differentialgleichung im Vorübergehen erwähnt ist, wird nur das Verfahren Johann Bernoullis genannt, und der nicht sachkundige Leser bekommt dadurch leicht die Ansicht, daß die Differentialgleichung zuerst von Johann Bernoulli integriert worden ist. In Wirklichkeit hatte aber nicht nur Jakob Bernoulli selbst, sondern auch Leibniz vor 1697 die Lösung gefunden. Der betreffende Artikel Jakob Bernoullis *(Problema Beaunianum universalius conceptum sive solutio aequationis nupero decembri propositae* $ady = ypdx + by^n qdx$*; cum aliis quibusdam annotatis)* erschien im Juliheft 1696 der Acta eruditorum (S. 332—337; *Opera,* Genevae 1744, II S. 731—739). Jakob Bernoulli behauptet erst ohne weiteres, daß die Gleichung auf die Form $ady = ydx + qdx$ gebracht werden könne, und gibt dann das Integral dieser Gleichung in geometrischer Form aber ohne Herleitung; in unsere analytische Sprache übersetzt lautet seine Lösung

$$y = \frac{e^{\frac{x}{a}}}{a}\int \frac{q\,dx}{e^{\frac{x}{a}}}.$$

Wie Jakob Bernoulli bei der Integration verfuhr, kann man mit großer Wahrscheinlichkeit aus einem nachgelassenen Artikel (*Opera* II, S. 1053) schließen; hier wird die Gleichung $dy = ydx + bx^n dx$ integriert, indem $y = pq$ gesetzt wird und die neuen Veränderlichen so bestimmt werden, daß $pdq = pqdx$ und $qdp = bx^n dx$. Dasselbe Verfahren kann natürlich auch benutzt werden, wenn man statt bx^n eine beliebige Funktion von x setzt, und dies ist eben die Methode Johann Bernoullis.

Der Artikel Leibnizens über die Bernoullische Differentialgleichung *(Notatiuncula ad Acta decembr. 1695 pag. 537. seqq.)* erschien schon im Märzheft 1696 der Acta eruditorum (S. 145—147; *Leibnizens Mathematische Schriften,* herausgeg. von C. I. Gerhardt **5**, Halle 1858, S. 329—331). Leibniz gibt nicht das Resultat an, sondern sagt nur, daß er die Gleichung auf die Form

$$\cdots dv + \cdots vdz + \cdots dz = 0$$

gebracht habe, wo die Punktereihen Funktionen von z bedeuten, und daß er die reduzierte Gleichung durch ein Verfahren, das früher seinen Freunden mitgeteilt worden sei, erledigt habe. In der Tat hatte LEIBNIZ schon 1694 in einem Brief an HÔPITAL (vom 27. November oder 27. Dezember) als Lösung der Gleichung $\frac{dy}{dx} + A(x) + B(x) \cdot y = 0$ die Gleichung

$$\int A(x) e^{\int B(x) dx} dx + y e^{\int B(x) dx} = 0$$

angegeben und durch Differentiation die Richtigkeit seiner Behauptung dargelegt (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften,* herausgeg. von C. I. GERHARDT **2**, Berlin 1850, S. 257; vgl. das Wort „soleo" in LEIBNIZENS Brief an G. MANFREDI vom 10. April 1708, Abhandl. zur Gesch. der Mathem. **9**, 1899, S. 274). Man könnte also die Gleichung $\frac{dy}{dx} + A(x) + B(x) \cdot y = 0$, die ja nur eine einfachere Form der BERNOULLIschen ist, die LEIBNIZsche Gleichung nennen, und das Verdienst JOHANN BERNOULLIS besteht eigentlich darin, daß er zuerst eine Methode veröffentlicht hat, die sicherlich sowohl LEIBNIZ wie JAKOB BERNOULLI vor ihm angewandt hatten.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 233. In betreff der von JOHANN BERNOULLI ausgeführten Integration der Gleichung $ady = ypdx + by^n qdx$ erlaube ich mir zu bemerken, daß das Verfahren tatsächlich dasselbe ist, das bei der Anwendung der Methode der Variation der Konstanten stattfindet. Sieht man nämlich vorläufig von dem letzten Gliede ab, so wird die Gleichung $ady = ypdx$, woraus $y = ke^{\frac{1}{a}\int pdx}$, wo k eine arbiträre Konstante ist. Läßt man nun k variieren, so daß das gefundene Integral der ursprünglichen Gleichung genügt, erhält man

$$ke^{\frac{1}{a}\int pdx} \cdot pdx + ae^{\frac{1}{a}\int pdx} dk = ke^{\frac{1}{a}\int pdx} \cdot pdx + bk^n e^{\frac{n}{a}\int pdx} dx$$

also

$$ae^{\frac{1}{a}\int pdx} dk = bk^n e^{\frac{n}{a}\int pdx} dx$$

oder

$$a\frac{dk}{k^n} = be^{\frac{n-1}{a}\int pdx} dx,$$

so daß die von JOHANN BERNOULLI eingeführten neuen Variablen m und z tatsächlich mit k und $e^{\frac{1}{a}\int pdx}$ identisch sind In diesem Sinne bietet also das Verfahren JOHANN BERNOULLIS einen kleinen Beitrag zur Vorgeschichte der Methode der Variation der Konstanten.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 244—245, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 205, 413; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 303—304. — **3 : 246,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514; $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 151. — **3 : 250,** siehe BM $\mathbf{1}_3$, 1900, S. 514. — **3 : 270,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 395. — **3 : 276,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 304.

---

3 : 279. Hier wäre es sehr angebracht, Z. 17 nach „Analysis per aequationes" die Worte „und Methodus differentialis" hinzuzufügen. Nach dem

Register wird diese Schrift Newtons S. 372—376 und 647 des 3. Bandes der *Vorlesungen* erwähnt, und S. 372 wird bemerkt, daß sie 1711 durch William Jones mit Genehmigung des Verfassers herausgegeben wurde, aber auf welche Weise dies bewerkstelligt wurde, wird in den *Vorlesungen* nicht angegeben. Wenn man nun in einer Bibliothek die Originalausgabe der *Methodus differentialis* studieren will, wird es sich zeigen, daß die ungenaue bibliographische Angabe der *Vorlesungen* recht unangenehm ist, denn dadurch wird man veranlaßt, „Newton, *Methodus differentialis,* Ausgabe 1711" zu verlangen, und es ist höchstwahrscheinlich, daß der Bibliothekar antwortet: „Die Schrift besitzen wir nicht", auch wenn sie wirklich vorhanden ist. G. Eneström.

---

3 : 303, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 155. — **3 : 306,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304. — **3 : 330—331,** siehe BM **3**$_3$, 1902, S. 241—242. — **3 : 337,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 206.

---

3 : 350. Herr Cantor behauptet (Z. 30—33), daß die zweite Auflage des *Essay d'analyse* Montmorts von der *Ars conjectandi* Jakob Bernoullis unmöglich mehr stark beeinflußt werden konnte, weil jene, als diese herauskam, selbst schon nahezu im Drucke vollendet war, und als Grund seiner Behauptung gibt er (Z. 26—29) an, daß die *Ars conjectandi* im September 1713 erschien, während die zweite Auflage des *Essay d'analyse* am 9. November 1713 gutgeheißen ist. Dabei ist er offenbar von der Voraussetzung ausgegangen, daß das Gutheißen erst gleichzeitig mit der Beendigung des Druckes erfolgte, aber bevor Herr Cantor irgendeinen Beleg für die Richtigkeit dieser Voraussetzung bietet, möchte ich dieselbe in Abrede stellen. Soviel ich weiß, erfolgte damals in Frankreich sehr oft das Gutheißen einer Arbeit auf Grund der Lesung des Manuskriptes. Beispielsweise ist die *Méthode pour la mesure des surfaces* (1700) Carrés am 26. August 1699 gutgeheißen, während das Werk ganz gewiß nach dem 9. Juni 1700 erschien; ebenso ist der 1. Band des *Traité du calcul intégral* (1754) Bougainvilles am 17. Januar 1753 gutgeheißen, erschien aber erst nach dem 29. März 1754.

Die zweite Auflage des *Essay d'analyse* trägt auf dem Titelblatt das Druckjahr M D CC XIII, aber sie erschien höchstwahrscheinlich erst im April oder Mai 1714, denn am 25. Mai 1714 schreibt Varignon an Leibniz: „M. de Montmort vous aura envoyé sans doute un exemplaire de son *Essay d'analyse sur les jeux de hazard,* qu'il vient de faire réimprimer fort augmenté", und er fügt hinzu: „On vous aura aussi envoyé de Basle le traité *De arte conjectandi* de feu M. Jacq. Bernoulli imprimé depuis plus de six mois" (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften,* herausgeg. von C. I. Gerhardt, **4**, Halle 1859, S. 197).

Es ist also an sich sehr wohl möglich, daß der Druck des *Essay d'analyse* erst etwa drei Monate nach dem Erscheinen der *Ars conjectandi* begann. Freilich scheint aus einer Bemerkung S. XXV des „Avertissement", als ob die Seiten 1—72 schon im April 1713 gedruckt gewesen wären.

G. Eneström.

---

3 : 364, siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 304—305. — **3 : 365,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 94. — **3 : 367,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 215. — **3 : 370—371,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 308. — **3 : 382,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 384,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 319. — **3 : 397,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 94. — **3 : 398,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 305—306;

8$_3$, 1907/8, S. 94—95. — **3 : 406,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 262. — **3 : 408,** siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 213. — **3 : 412,** siehe BM **7**$_3$, 1906/7, S. 306. — **3 : 427,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 169. — **3 : 447, 455,** siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151.

---

3 : 461. Da hier zum erstenmal eine historische Notiz über die Integration homogener Differentialgleichungen erster Ordnung gebracht wird, erlaube ich mir zu bemerken, daß LEIBNIZ diese Gleichungen vor 1693 integriert hatte. In einem undatierten Briefe aus dem Anfange dieses Jahres schreibt LEIBNIZ an HÔPITAL (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften,* herausgeg. von C. I. GERHARDT **2**, Berlin 1850, S. 219—220): „Toutes les fois, que dans l'équation tangentielle (ou différentielle de premier degré . . .) on ne trouve point de droite constante employée pour remplir la loix des homogènes, je puis réduire l'équation tangentielle aux quadratures; par exemple si . . . dx à dy estoient comme yy à $yy + bxy + cxx$". Daß JOHANN BERNOULLI dasselbe Verfahren unabhängig von LEIBNIZ entdeckt hatte, geht aus dem Briefwechsel zwischen ihnen deutlich hervor (siehe den Brief JOHANN BERNOULLIS vom 9. Mai 1694 und den Brief LEIBNIZENS vom 7. Juni 1694; a. a. O. **3** : 1, Halle 1855, S. 138, 141), und man hat keinen Anlaß zu bezweifeln, daß JOHANN BERNOULLI das Verfahren schon 1692 dem Marquis DE L'HÔPITAL mitgeteilt hatte (vgl. Biblioth. Mathem. **2**$_3$, 1901, S. 151—152).

G. ENESTRÖM.

---

3 : 473, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 154—155; **4**$_3$, 1903, S. 401. — **3 : 476,** siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 169—170.

---

3 : 476. Da die RICCATIsche Differentialgleichung in unseren Tagen ein besonderes Interesse bekommen hat, erlaube ich mir zu bemerken, daß sich JAKOB BERNOULLI lange Zeit vor RICCATI mit dieser Gleichung beschäftigt hatte, wie aus vielen Stellen seines Briefwechsels mit LEIBNIZ 1697—1704 hervorgeht (siehe *Leibnizens Mathematische Schriften,* herausgeg. von C. I. GERHARDT **3** : 1, Halle 1855, S. 50, 65, 68, 75, 80, 85, 87). Freilich scheinen alle Versuche JAKOB BERNOULLIS, die Gleichung auch nur in einem einzigen Spezialfalle zu integrieren, erfolglos gewesen zu sein (siehe seinen nachgelassenen Artikel hierüber in den *Opera,* Genevae 1744, II S. 1053—1054). Der Grund dazu war vielleicht, daß er glaubte, der Spezialfall $\frac{dy}{dx} = y^2 + x^2$ sei leichter zu integrieren als die übrigen, und darum seine Anstrengungen auf diesen Fall konzentrierte.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 477, 479, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 151—152. — **3 : 480,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 95.

---

3 : 496. Hier sollte die Bemerkung (Z. 4—5): „Die 86 Jahre des VOSSIUS sind also ohne Umrechnung wiederhergestellt" gestrichen werden. Der Fehler bei HEILBRONNER ist wahrscheinlich nicht der von Herrn CANTOR angegebene, sondern besteht vielmehr darin, daß er die Angabe des VOSSIUS mißverstand. VOSSIUS sagt: „Haec cum ille [d. h. VERTRANIUS MAURUS] jam ante an. LXXXVI scripserit, mirum sane necdum lucem videre", und hier bedeutet „an." vermutlich „annos"; die fragliche Schrift von MAURUS erschien nämlich nach BRUNET (*Manuel du libraire* **5**, Paris 1864, Sp. 1092) in Lyon 1563, also mehr als 86 Jahre vor

1650, wie Vossius behauptet. Heilbronner dagegen schreibt, wie Herr Cantor richtig angibt: „haec cum ille anno 86. scripserit, mirum sane necdum lucem videre“; er hat also wahrscheinlich „an.“ als „annum“ sowie „ille“ als Varro gedeutet, und „ante annum LXXXVI“ (d. h. vor dem Jahre 86) in „anno 86“ verwandelt. Nach Heilbronner hat also Varro, der 116 v. Chr. geboren ist, eine Arithmetik im Jahre 86 geschrieben, und bei dieser Angabe brauchen natürlich nicht die 86 Jahre umgerechnet zu werden. Anderseits wird bei Heilbronner die Bemerkung „mirum sane necdum lucem videre“ durchaus sinnlos, und schon aus diesem Grunde ist man berechtigt, die Heilbronnersche Angabe zu beanstanden, selbst wenn man von der unbestätigten Behauptung absieht, Varro habe die Schrift im Jahre 86 verfaßt.

Auch die Worte (Z. 14—15): „Leonardo von Pisa im 15. Jahrhundert, wofür Blancanus als Quelle angeführt ist“ sollten gestrichen werden, weil sie eine unberechtigte Ausstellung gegen Heilbronner enthalten, nämlich daß er in betreff des Leonardo Pisano unglücklich in seiner Wahl von Gewährsmännern war. In Wirklichkeit gab man bis gegen das Ende des 18. Jahrhunderts allgemein an, daß Leonardo dem 15. Jahrhundert angehörte (siehe z. B. B. Baldi, *Cronica de matematici*, Urbino 1707, S. 88—89; G. I. Vossius, *De universae mathesios natura et constitutione*, Amsterdam 1650, S. 313—314; vgl. J. E. Montucla, *Histoire des mathématiques* éd. 2, **2**, Paris 1799, S. 714), und Heilbronner hätte in diesem Falle nicht den geringsten Anlaß bekommen, die Zuverlässigkeit seiner Quelle in Verdacht zu haben, auch wenn er andere Gewährsmänner zu Rate gezogen hätte. G. Eneström.

---

3 : 497, 498, siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 309. — **3 : 507,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 71—72.

---

3 : 507—509. Herr Cantor behandelt hier zweimal (S. 507 Z. 6 v. u.— S. 508 Z. 8, S. 508 Z. 3 v. u. — S. 509 Z. 9) die Frage, wer den 1745 erschienenen Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli herausgab, ohne zu einem sicheren Resultate zu gelangen. Aber in Wirklichkeit ist diese Frage nur eine Wortfrage, und in einem gewissen Sinne kann Cramer, in einem anderen Castillon als Herausgeber bezeichnet werden. In dem von Herrn Cantor S. 508 zitierten Nachruf heißt es wörtlich (Mémoires de l'académie de Berlin 1792 et 1793, Berlin 1798, Histoire S. 42): „Mon père [d. h. Castillon der Ältere] fut encore l'éditeur du Commercium epistolicum Leibnitzii et Bernoulli, dont M. Cramer lui fournit le manuscrit“, und die Erklärung der letzten Worte findet man in einem von Johann III Bernoulli herrührenden Artikel eines folgenden Bandes der Berliner Abhandlungen (Mémoires de l'académie de Berlin 1799 et 1800, Berlin 1803, Histoire S. 37—38), dessen Zuverlässigkeit kaum angezweifelt werden kann. Die große Arbeit, den Briefwechsel zwischen Leibniz und Johann Bernoulli für den Druck fertig zu stellen, hat Cramer ausgeführt, während Castillon nur „éditeur“ des Cramerschen Manuskriptes und höchstwahrscheinlich Verfasser des kurzen und inhaltslosen Vorwortes war. Persönlich bin ich geneigt, Cramer als den wirklichen Herausgeber zu betrachten, aber, wie gesagt, ist dies nur eine Wortfrage. — S. 509 Z. 7—9 sollte meines Erachtens der Passus: „De Castillon übernahm damit öffentlich die Verantwortung für die stattgehabten Kürzungen“ gestrichen werden; aus den von Herrn Cantor herangezogenen Worten geht nur hervor, daß der Verfasser des Vorwortes die

Streichungen billigte, oder daß er auf Grund seines Auftrages als „éditeur“ des CRAMERschen Manuskriptes genötigt war, diese zu billigen.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 509. Die Angabe: „EULER selbst ging, wie wir wieder aus dem mehrerwähnten Nachrufe [CASTILLONS] wissen, von Berlin aus DE CASTILLON an, den Druck [der *Introductio*] zu überwachen“ ist höchst überraschend. Erstens habe ich nach genauem Durchsehen des Nachrufes nicht die leiseste Andeutung hierüber auffinden können; CASTILLON sagt nur (a. a. O. S. 42—43): „Mon père fut . . . l'éditeur . . de l'*Introductio in analysin infinitorum* de l'illustre M. EULER, qui lui avoit envoyé lui-même son manuscrit“. Zweitens hat man meines Wissens keinen Grund anzunehmen, daß EULER überhaupt während des Druckes der *Introductio* (also etwa 1746 bis April 1748) in Lausanne war, und drittens scheint EULER über die Herausgabe der Arbeit direkt mit dem Verleger BOUSQUET briefwechselt zu haben (siehe z. B. den Brief von EULER an d'ALEMBERT vom 28. September 1748; Bullett. di bibliogr. d. sc. matem. **19**, 1886, S. 145).

G. ENESTRÖM.

---

3 : 521, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 527,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 95. — **3 : 535,** siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401. — **3 : 536,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206. — **3 : 560,** siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 319—321. — **3 : 565,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 326—327. — **3 : 571,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 72; $\mathbf{9}_3$. 1908/9, S. 170. — **3 : 575,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 578,** siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 582,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S 307. — **3 : 586,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309. — **3 : 593,** siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 214. — **3 : 609,** siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 309—310. — **3 : 612,** siehe BM $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 307—308.

---

3 : 612. Hier berichtet Herr CANTOR ziemlich ausführlich über den Inhalt der drei Seiten 48—50 der Abhandlung EULERS *Solutio problematis arithmetici de inveniendo numero qui per datos numeros divisus, relinquat data residua,* obgleich das Verfahren im wesentlichen mit dem von ROLLE übereinstimmt (vgl. oben die Bemerkung zu **3** : 104); ferner erwähnt Herr CANTOR eine gelegentliche Bemerkung EULERS (S. 58—59 der betreffenden Abhandlung). Daß aber EULER hier in mathematischer Sprache genau die Regel angibt, die GAUSS später im Art. 36 seiner *Disquisitiones arithmeticae* entwickelt hat und die schon bei den Chinesen unter dem Namen „Ta yen“ bekannt war, übergeht Herr CANTOR stillschweigend. Die Regel findet sich am Ende (S. 66) der EULERschen Abhandlung und ich bringe dieselbe hier unten wörtlich zum Abdruck:

> Inveniendus sit numerus, qui per divisores $a, b, c, d, e,$ quos numeros intet se primos esse pono, divisus relinquat respective haec residua $p, q, r, s, t.$ Huic quaestioni satisfacit iste numerus $Ap + Bq + Cr + Ds + Et + mabcde$, in qua expressione A est numerus, qui per factum $bcde$ divisus nihil relinquat, per a vero divisus relinquat unitatem; B est numerus, qui per $acde$ divisus relinquat nihil, per b vero unitatem; C est numerus qui per $abde$ divisus nihil relinquat, per c vero unitatem; D est numerus qui per $abce$ nihil relinquat, per d vero unitatem; atque E est numerus [qui] per $abcd$ divisus nihil relinquat, per e vero unitatem, qui ergo numeri per regulam pro duobus divisoribus datam inveni possunt.

Das soeben zum Abdruck gebrachte Stück besagt ja genau, daß die Zahl x, die den Bedingungen

$$x \equiv a (\mathrm{mod}\ p),\ x \equiv b (\mathrm{mod}\ q),\ x \equiv c (\mathrm{mod}\ r),\ x \equiv d (\mathrm{mod}\ s),\ x \equiv e (\mathrm{mod}\ t)$$

genügt, sich unmittelbar durch die folgende Beziehung

$$x \equiv Ap + Bq + Cr + Ds + Et (\mathrm{mod}\ abcde)$$

ergibt, wenn die Zahlen A, B, C, D, E die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$A \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ a),\ A \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ bcde),\ B \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ b),\ B \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ acde),$$
$$C \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ c),\ C \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ abde),\ D \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ d),\ D \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ abce),$$
$$E \equiv 1\ (\mathrm{mod}\ e),\ E \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ abcd).$$

Wie die Hilfszahlen zu finden sind, hat Euler am Anfange seiner Abhandlung gelehrt.

G. Eneström.

---

3 : 614—615, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 89—90; $\mathbf{7}_3$, 1906/7, S. 308. — **3 : 616**, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 214, 408; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 617**, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 263. — **3 : 636—637**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 646—647**, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 206—207. — **3 : 652**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207. — **3 : 660**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441. — **3 : 667**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 441—442; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 207—208, 310.

---

3 : 675. Hier sollten etwa 14 Zeilen (Z. 15—28: „während es ihm abermals ... über die Begriffe von Reihenconvergenz und Divergenz befand") gestrichen werden, weil es sich um eine Ausstellung handelt, die in diesem Zusammenhang kaum berechtigt ist. Wie Herr Cantor richtig angibt, spricht Euler den Satz aus, daß alle geometrischen Progressionen nach vorwärts und rückwärts ins Unendliche fortgesetzt die Summe 0 haben, so daß

$$\cdots \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} + 1 + n + n^2 + \cdots = 0.$$

Aber wie Herr Cantor zweimal (S. 692, 734) im 3. Bande seiner *Vorlesungen* hervorgehoben hat, ist für Euler die Summe einer Reihe eben der geschlossene Ausdruck, aus welchem sie durch Entwickelung hervorgebracht werden kann. Nun kann ja die Reihe $1 + n + n^2 + \cdots$ aus $\frac{1}{1-n}$ und die Reihe $\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \cdots$ aus $\frac{1}{n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = \frac{1}{n-1}$ hervorgebracht werden, und solange n eine endliche Größe $\lesseqgtr 1$ ist, wird $\frac{1}{1-n} + \frac{1}{n-1} = 0$; also ist der von Herrn Cantor beanstandete Ausspruch von Euler nur eine unmittelbare Folge der Definition und als solche formell richtig. Freilich könnte die Folgerung dem Historiker Anlaß geben, zu erörtern, ob die Definition an sich einwandfrei ist und ob es angebracht sein kann, dem Worte „Summe" eine Bedeutung beizulegen, die in gewissen Fällen mit der gewöhnlichen Bedeutung unvereinbar ist — die von Euler in Betracht gezogene Reihe besteht ja für $n > 0$ aus lauter positiven Gliedern, und ihre Summe im gewöhnlichen Sinne ist also gewiß nicht Null. Aber eine solche Erörterung findet sich nicht in den fraglichen Zeilen, und man ersieht daraus nicht einmal, daß Euler von seinem Standpunkte aus zu dem von Herrn Cantor beanstandeten Satze kommen mußte.

Übrigens ist die EULERsche Bemerkung in betreff der geometrischen Reihe hier nur eine Nebensache. Von viel größerem Interesse ist der von EULER geführte Nachweis, daß man nur mit Vorsicht mit divergenten Reihen rechnen darf, weil man sonst zu offenbar unrichtigen Resultaten gelangt, z. B. zu der im allgemeinen nicht zutreffenden Formel

$$\overset{n=\infty}{\underset{n=0}{S}} f(n) + \overset{n=\infty}{\underset{n=1}{S}} f(-n) = 0,$$

wo S die Summe im EULERschen Sinne bezeichnet. G. ENESTRÖM.

---

3 : 682, siehe BM **6**$_3$, 1905, S. 408. — **3 : 686,** siehe BM **5**$_3$, 1904, S. 208.

---

3 : 688. Ob wirklich (Z. 13—15) DANIEL BERNOULLI selbst in dem fraglichen Briefe den Buchstaben e in der Bedeutung der Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems gebrauchte, ist meines Erachtens gar nicht sicher; es ist sehr wohl möglich, daß der Brief ursprünglich deutsch geschrieben war, und daß EULER bei der Übersetzung desselben teilweise seine eigene Bezeichnungsweise einführte. Noch in dem Briefe an EULER vom 20. September 1741 benutzt DANIEL BERNOULLE c (nicht e) als Grundzahl des natürlichen Logarithmensystems, vorausgesetzt, daß der Abdruck bei FUSS (*Correspondance mathématique* II, St. Pétersbourg 1843, S. 477) korrekt ist, und erst anderthalb Jahre später bedient er sich des Zeichens e (a. a. O. S. 518). Daß der von Herrn CANTOR erwähnte Brief DANIEL BERNOULLIS vor dem 20. September 1741 geschrieben ist, vermute ich aus dem Grunde, daß BERNOULLI nach seiner eigenen Aussage damals noch nicht die Preisschrift EULERS über Ebbe und Flut gesehen hatte; diese Schrift dürfte Mitte 1741 erschienen sein (vgl. FUSS, a. a. O. II, S. 463).

G. ENESTRÖM.

---

3 : 689, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442; **8**$_3$, 1907/8, S. 215. — **3 : 692,** siehe BM **8**$_3$, 1907/8, S. 215.

---

3 : 693. Der zweite Absatz (Z. 11—20) sollte meines Erachtens vollständig gestrichen werden; ich kann nämlich nicht damit einverstanden sein, daß es überhaupt möglich ist, die von Herrn CANTOR Z. 3—10 zitierten Worte DANIEL BERNOULLIS zu mißverstehen. Bezeichnen wir das n. Glied einer Reihe durch $f(x, n)$, so will BERNOULLI offenbar sagen, daß man $f(x, n)$ nicht ohne weiteres als eine kontinuierliche Funktion von n betrachten darf, und daß also eine Differentiation oder Integration in bezug auf n nicht erlaubt sei. Dagegen kann es natürlich nicht BERNOULLI eingefallen sein, zu behaupten, daß man nicht die Reihe $\Sigma f(x, n)$ in bezug auf x differentiieren oder integrieren darf, vorausgesetzt, daß sie konvergent ist und daß die neue Reihe ebenfalls konvergiert. Bekanntlich hatte EULER das allgemeine Glied der Reihe $f(1, n) = 1.2.3 \ldots n$ als eine kontinuierliche Funktion von n behandelt, und BERNOULLI wollte die Richtigkeit dieser Behandlung in Abrede stellen. G. ENESTRÖM.

---

3 : 695, siehe BM **2**$_3$, 1901, S. 442.

---

3 : 700. Da Herr Cantor das Vorwort der *Introductio* „umfangreich" nennt, kann es vielleicht von Interesse sein, mitzuteilen, daß dasselbe 214 Druckzeilen beträgt. Jede Zeile enthält im Durchschnitt etwa 45 Buchstaben, so daß der Abdruck in den *Vorlesungen* etwas weniger als vier Druckseiten erfordern würde, also etwa $^2/_3$ des Vorwortes des Herrn Cantor zum 3. Bande der 2. Auflage der *Vorlesungen*, und nicht einmal dieses Vorwort dürfte besonders umfangreich genannt werden können.

Von den 214 Druckzeilen des Vorwortes der *Introductio* enthalten die 28 ersten allgemeine Bemerkungen über den Nutzen einer Einleitung in die Höhere Analysis und die neun folgenden Zeilen einige Worte über die Verteilung der Arbeit auf zwei Bände. Dann kommt ein Selbstbericht über den Inhalt des 1. Bandes (94 Zeilen), ein ähnlicher Bericht in betreff des 2. Bandes (71 Zeilen) und zuletzt ein Abschluß (12 Zeilen), worin Euler hervorhebt, daß er zwar vieles aus älteren Arbeiten entnommen, aber selbst noch mehr hinzugefügt habe.

Da nun Herr Cantor in den *Vorlesungen* 38 Druckseiten (700—721, 802—818) den zwei Bänden der *Introductio* gewidmet hat, versteht man nicht recht den Sinn seiner Bemerkung, daß das Vorwort „allzu umfangreich [sei], um es hier abzudrucken, was sein Wortlaut eigentlich verdiente". Was in erster Linie verdienen würde, abgedruckt zu werden, ist wohl der Anfang des Vorwortes (28 Zeilen, also etwa $^1/_2$ Druckseite der *Vorlesungen*) und vielleicht überdies einige sehr kurze Bemerkungen der zwei Selbstberichte, die freilich ebensogut an betreffenden Stellen des Cantorschen Berichtes untergebracht werden konnten.

Z. 16 steht ganz wie in der 1. Auflage „13. Kapitel" statt „18. Kapitel".

G. Eneström.

---

3 : 700, 702, siehe BM 9_3, 1908/9, S. 171.

---

3 : 703. Die Angabe (Z. 29—30): „deren Namen und erste Untersuchung nach Eulers Aussage De Moivre angehöre" (es handelt sich um rekurrente Reihen) ist nicht ganz genau. Eulers Aussage lautet wörtlich (S. 50 der Originalausgabe): „vocari autem hae series a celeb. Moivraeo, qui earum naturam maxime est scrutatus, solent recurrentes". Euler sagt also gar nicht, daß Moivre die rekurrenten Reihen zuerst untersucht hat, und daß Moivre den Namen zu benutzen pflegte, bedeutet nicht notwendigerweise, daß der Name ihm angehörte. In diesem Falle ist freilich die Cantorsche Ungenauigkeit unschädlich, denn man weiß, unabhängig von Eulers Aussage, daß der Name „rekurrente Reihe" und die erste Untersuchung dieser Reihen auf Moivre zurückgeht. Aber als Beleg hierfür soll nicht auf die *Introductio* verwiesen werden.

G. Eneström.

---

3 : 705. Am Ende des 5. Kapitels des 1. Bandes der *Introductio* wird ausdrücklich der Satz aufgestellt, den Herr Cantor (S. 813) in das 18. Kapitel des 2. Bandes hineingelesen hat (siehe unten S. 348), nämlich (S. 66 der Originalausgabe der *Introductio*): „Functio integra homogenea duarum variabilium y et z, resolvi potest in tot Factores simplices formae $\alpha y + \beta z$, quot habuerit dimensiones."

Das Wort „unbewiesenen" (Z. 10) ist vielleicht nicht ganz gut gewählt, denn Euler scheint selbst der Ansicht zu sein, daß er einen Beweis bringt. Er sagt

nämlich (S. 74): „nisi enim numerus alius b fuerit Potestas basis a, ejus Logarithmus numero rationali exprimi non poterit. Neque vero enim Logarithmus ipsius b erit numerus irrationalis; si enim foret $lb = \sqrt{n}$, tum esset $a^{\sqrt{n}} = b$; id quod fieri nequit, si quidem numeri a et b rationales statuantur". Freilich muß zugegeben werden, daß der Beweis sehr unvollständig ist. G. Eneström.

---

3 : 705. Aus der Bemerkung Z. 28—35 („Der Gedankengang ... Gebrauch machen dürfte") scheint hervorzugehen, daß Herr Cantor den Schluß des Vorwortes der *Introductio* nicht gelesen hat, denn sonst hätte er wohl die Bemerkung auf andere Weise redigiert. Euler sagt nämlich selbst (S. XIII der Originalausgabe): „De cetero, cum non paucae res hic occurrant ab aliis jam tractatae, veniam rogare me oportet, quod non ubique honorificam mentionem eorum, qui ante me in eodem genere elaborarunt, fecerim. Cum enim mihi propositum esset omnia quam brevissime tractare, Historia cujusque Problematis magnitudinem operis non mediocriter auxisset." Wenn Herr Cantor überhaupt die Frage, inwieweit der Inhalt der *Introductio* von Euler selbst herrührt, behandeln wollte, sollte er nicht unterlassen, auf diesen Ausspruch Eulers hinzuweisen, entweder S. 705 oder S. 700, wo er über den Inhalt des Vorwortes berichtet. G. Eneström.

---

3 : 722, siehe BM **9**$_3$, 1908/9, S. 172.

---

3 : 726—728. Der eigentliche Bericht über die Abhandlung Kuhns: *Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis* gibt zu keinen wichtigeren Bemerkungen Anlaß, aber was Herr Cantor selbst hinsichtlich der Abhandlung sagt, ist meines Erachtens so unzutreffend, daß es viel besser gewesen wäre, wenn er dieselbe stillschweigend übergangen hätte. In erster Linie möchte ich die folgende Bemerkung (S. 726 Z. 20—25) beanstanden:

> Das Imaginäre galt nach wie vor [die Zeitangabe bezieht sich auf eine Abhandlung von Euler] als unmögliche Schöpfung einer ungezügelten Einbildungskraft. Man hatte gelernt, alle ersinnlichen Rechnungsarten an imaginären Zahlen auszuüben, aber man hatte nicht gelernt, sie selbst zu versinnlichen. Den ersten Versuch dieser Art machte Heinrich Kuhn.

Hier wird also behauptet: a) daß wenigstens bis zur Mitte des 18. Jahrhunderts das Imaginäre als unmögliche Schöpfung einer ungezügelten Einbildungskraft galt; b) daß Kuhn den ersten Versuch machte, imaginäre Zahlen zu versinnlichen. Aber die erste Behauptung ist meiner Ansicht nach höchst irreleitend, die zweite durchaus falsch. Schon A. Girard hatte darauf hingewiesen, daß die Einführung imaginärer Wurzeln einen ganz bestimmten Zweck hatte (vgl. was Herr Cantor selbst S. 788 des Bandes **2**^{2} der *Vorlesungen* angibt), und es ist mir nicht recht verständlich, wie Herr Cantor dazu gekommen ist, von einer „unmöglichen Schöpfung einer ungezügelten Einbildungskraft" zu sprechen. Mit ebenso gutem Rechte könnte man behaupten, daß für einen Mathematiker des 20. Jahrhunderts die Dreizahl der Wurzeln der Gleichung $x^3 = 0$ als unmögliche Schöpfung einer ungezügelten Einbildungskraft gilt, denn tatsächlich hat ja die Gleichung nur eine einzige Wurzel, nämlich Null.

Daß die Behauptung, Kühn habe den ersten Versuch gemacht, imaginäre Zahlen zu versinnlichen, falsch ist, habe ich schon in der Biblioth. Mathem. 7_3, 1906/7, S. 263—269 nachgewiesen. Aber die Behauptung enthält zwei Unrichtigkeiten, denn Kühn hat überhaupt keinen Versuch gemacht, imaginäre Zahlen zu versinnlichen. Freilich findet sich im Titel seiner Abhandlung der Ausdruck: „de quantitatibus imaginariis construendis" und am Anfange der Abhandlung spricht er „de constructione quantitatum imaginariarum", aber in Wirklichkeit macht er gar keinen Versuch, imaginäre Größen zu konstruieren. Wie Herr Cantor S. 727 richtig angibt, versucht Kühn nachzuweisen, daß negative Quadrate geometrisch versinnlicht werden können, also wirklich vorhanden sind, und da die Quadratwurzel eines wirklichen Quadrates natürlich existieren muß, so folgt hieraus nach Kühn, daß z. B. $\sqrt{-9}$ wirklich existiert. Dagegen spricht Kühn nicht direkt von der Seite eines negativen Quadrates (im Cantorschen Berichte ist S. 727 Z. 22 „Wurzeln" statt „Seiten" zu setzen); nur im Vorübergehen bemerkt er S. 176 seiner Abhandlung, daß, wenn man das Wort „Seite" statt „Wurzel" benutzen wollte, so könnte man sagen, daß die Seite eines negativen Quadrates wirklich existiert („Latus . . . facile exprimi potest, modo notetur, per latus quadrati in hoc negotio perpetuo radicem quadratam areae quadratae intelligendum esse").

Nach dem Berichte über den wesentlichen Inhalt der Abhandlung bemerkt Herr Cantor (S. 728 Z. 5—9):

> Eine Frage stellte Kühn nie und nirgend, . . . : wenn das . . . Quadrat β einen negativen Flächeninhalt besitzt, wo liegt dessen zur Versinnlichung der imaginären Zahl geeignete Seite?

Aber aus dem Vorangehenden ersieht man, daß Kühn keinen Anlaß hatte, sich mit dieser Frage zu beschäftigen, da er nur zeigen wollte, daß imaginäre Wurzeln wirklich existieren, ohne sich mit deren geometrischer Versinnlichung abzugeben. Anderseits übergeht Herr Cantor stillschweigend den besonders schwachen Punkt der Abhandlung Kühns, nämlich daß die Fläche β entweder den Inhalt $+9$ haben muß oder kein Quadrat im gewöhnlichen Sinne des Wortes ist. Denn wenn die Fläche wirklich quadratisch ist, so müssen natürlich alle Seiten gleich groß sein, also entweder $+3$ oder -3, und in jedem Falle ist dann der Inhalt $+9$. Ist dagegen, wie Kühn behauptet, die eine Seite $+3$, die andere -3, so ist die Fläche offenbar kein Quadrat im gewöhnlichen Sinne des Wortes, und die Kühnschen Folgerungen werden dadurch hinfällig.

Kühns Versuch, negative Flächen zu versinnlichen, ist folglich ein so schwaches Produkt, das er kaum verdient, in einer Geschichte der Mathematik erwähnt zu werden. Aber wenn man den Versuch wirklich erwähnt, sollte man nicht, wie Herr Cantor, unterlassen anzugeben, daß dieser Versuch schon 1693 von Wallis in der lateinischen Ausgabe seiner Algebra (S. 287) gemacht worden ist, und zwar auf dieselbe Weise wie bei Kühn.

G. Eneström.

---

3 : 736, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 111. — **3 : 749,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172. — **3 : 750,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446. — **3 : 753,** siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 172—174.

---

3 : 754. Die Bemerkung Z. 28—36 („Euler macht dann darauf aufmerksam . . . ein neues Glied φx hinzu") könnte etwas besser redigiert worden

sein. Erstens sagt EULER nicht, daß die zwei Summen leicht auseinander gefunden werden können — in der Tat wäre es ja zwecklos, Σx^n aus Σx^{n+1} herleiten zu wollen —, und die folgenden Ausführungen des Herrn CANTOR beziehen sich ganz wie die EULERschen ausschließlich auf die Herleitung von Σx^{n+1} aus Σx^n. Zweitens wäre es angebracht, statt der Worte: „so heißt der letzt erscheinende Zahlenfaktor $\frac{1}{3}$“ etwa: „so kommen dieselben Zahlenfaktoren zur Anwendung mit Ausnahme des letzten, der nicht $\frac{1}{2}$, sondern $\frac{1}{3}$ heißt“ zu setzen. Das Wort „alsdann“ (Z. 31) weist nämlich ausdrücklich auf den Fall hin, daß n gerade ist, und wie man verfahren soll, wenn n ungerade ist, wird nicht gesagt, obgleich es natürlich nicht besonders schwer ist, es zu erraten. — Bei EULER ist die Darstellung durchaus korrekt.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 758, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446.

---

3 : 758. Aus den Worten (Z. 31—32): „wir finden [in den *Institutiones calculi differentialis*] ein erstes Symbol partieller Differentiation mittels Einklammerung“ könnte man glauben, daß vor 1755 für diesen Zweck keine Symbole angewandt worden waren. Indessen hatte LEIBNIZ schon 1694 in einem Brief an HÔPITAL (nach LEIBNIZENS Konzept ist das Datum des Briefes 27. November 1694, nach HÔPITALS Antwort aber ist das Datum 27. Dezember 1694) solche Symbole, nämlich δm für $\frac{\partial m}{\partial x}$ und ϑm für $\frac{\partial m}{\partial y}$ benutzt (siehe *LEIBNIZENS Mathematische Schriften*, herausgeg. von C. I. GERHARDT **2**, Berlin 1850, S. 261), und da der betreffende Passus auch von einem anderen Gesichtspunkte aus von Interesse ist, bringe ich denselben hier unten zum Abdruck:

> ubi $dy:dx$ non assurgit ultra primum seu simplicem gradum, . . . aequatio generaliter sic exprimi potest $b\,dx + c\,dy$, posito b et c haberi per x et y utcumque. Sit quaesita aequatio $m = 0$, ita ut m similiter habeatur per x et y quomodocunque. Hanc differentiando fiet $\delta m\,dx + \vartheta m\,dy = 0$. Ergo fiet $b:c = \delta m : \vartheta m$ seu $b\vartheta m = c\delta m$.

Hier hat sich also LEIBNIZ mit der Frage beschäftigt, welche Relation zwischen den Größen $A(x, y)$ und $B(x, y)$ stattfinden müsse, damit die Gleichung $A(x, y)dx + B(x, y)dy = 0$ integrierbar sei. Ist $r = 0$ das Integral der Gleichung, so ist nach LEIBNIZ $A(x, y)\frac{\partial r}{\partial y} = B(x, y)\frac{\partial r}{\partial x}$ die gesuchte Relation. Dagegen ist LEIBNIZ nicht auf den Gedanken gekommen, aus dieser Relation die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial [R \cdot A(x, y)]}{\partial y} = \frac{\partial [R \cdot B(x, y)]}{\partial x}$$

herzuleiten, wo R der integrierende Faktor ist.

G. ENESTRÖM.

---

3 : 758. Die Behauptung, daß EULER in den Kapiteln 5—9 des ersten Teiles seiner Differentialrechnung „Dinge lehrt, welche zumeist schon in allen vorhandenen Lehrbüchern der Differentialrechnung vorhanden waren“ ist unzutreffend, und vermutlich hat Herr CANTOR nicht einmal versucht, von dem Inhalt aller 1755 vorhandenen Lehrbücher der Differentialrechnung Kenntnis

zu bekommen, bevor er mit seiner Behauptung fertig war. Wenn man die Worte „in allen vorhandenen Lehrbüchern der Differentialrechnung" sieht, denkt man wohl zunächst an die Lehrbücher, die Herr Cantor selbst in den *Vorlesungen* erwähnt, und ich habe darum mit Hilfe des Stichwortes „Differentiren" des Registers versucht, diese Lehrbücher ausfindig zu machen; sie sind, abgesehen von dem Eulerschen, nur zwei, nämlich die *Analyse des infiniment petits* Hôpitals (erwähnt S. 412) und das *Treatise of fluxions* Maclaurins (erwähnt S. 680).

Hôpital setzt in der „Section I" seines Buches (S. 1—10 der Originalausgabe) etwa dieselben Regeln auseinander, die bei Euler in den §§ 152—174 des 5. Kapitels stehen, aber was Euler sonst in den fünf Kapiteln lehrt, findet sich nicht bei Hôpital.

In Maclaurins *Treatise of fluxions* entsprechen die §§ 707—722 (S. 581—591 der Originalausgabe) ungefähr dem 5. Kapitel und der ersten Hälfte des 6. Kapitels bei Euler; der Schluß dieses Kapitels deckt sich zum Teil mit den §§ 192—195 bei Maclaurin (S. 184—187 der Originalausgabe). Die Kapitel 7—9 der Eulerschen Differentialrechnung beschäftigen sich mit Sachen, die Maclaurin, so viel ich weiß, nicht oder wenigstens nicht direkt behandelt hat, und auch in den übrigen vor 1755 erschienenen Lehrbüchern der Differentialrechnung, die mir zugänglich sind, habe ich keine oder wenigstens keine besondere Behandlung dieser Gegenstände gefunden.

G. Eneström.

---

3 : 759, siehe BM $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 208. — **3 : 760,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447.

---

3 : 762. Die wenig gut redigierte Behauptung (Z. 8—9), daß die gefundene Reihe stärker als die gegebene konvergiert, weil bei positivem x unter allen Umständen $\frac{x}{1+x} < 1$ ist, rührt nicht von Euler her. Aus der Ungleichung $\frac{x}{1+x} < 1$ folgert Euler ganz richtig, daß die gefundene Reihe konvergiert, auch wenn dies nicht der Fall ist in betreff der gegebenen. Um zu beweisen, daß, wenn die gegebene Reihe konvergent ist, die gefundene noch schneller konvergiert, setzt Euler $x = \frac{1}{n}$, woraus $\frac{x}{1+x} = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n+1}$, und hieraus folgert er ganz richtig, daß die gefundene Reihe stärker als die gegebene konvergiert. Offenbar hätte er ebensogut die Ungleichung $\frac{x}{1+x} < x$ aufstellen und daraus dieselbe Folgerung ziehen können.

G. Eneström.

---

3 : 766, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 446.

---

3 : 773. Der Bericht über Eulers Methode, um $\frac{P}{Q}$ in Partialbrüche zu zerlegen, wenn $f + gx$ ein einfacher Faktor von Q ist, ist richtig, aber genau dieselbe Methode, mit Ausnahme der Herleitung des Wertes von $\frac{P(f+gx)}{Q}$ durch Differentiation, hatte Euler schon in der *Introductio* gelehrt, wie aus der folgenden Zusammenstellung hervorgeht:

Introductio (1748).

Ponatur fractio ex Factore $p-qz$ orta $=\frac{A}{p-qz}$, et sit fractio ex altera Factore denominatoris S oriunda $=\frac{P}{S}$, ita ut ... futurum sit $\frac{M}{N}=\frac{A}{p-qz}+\frac{P}{S}$ $=\frac{M}{(p-qz)S}$; hinc erit $\frac{P}{S}=\frac{M-AS}{(p-qz)S}$; quae fractiones cum congruere debeant, necesse est ut $M-AS$ sit divisibile per $p-qz$; quoniam Functio integra P ipsi quoto aequatur. Quando vero $p-qz$ Divisor existit ipsius $M-AS$, haec expressio posito $z=\frac{p}{q}$ evanescit. Ponatur ergo utique loco z hic valor constans $\frac{p}{q}$ in M et S, erit $M-AS$ $=0$, ex quo fiet $A=\frac{M}{S}$.

Calculus differentialis (1755).

Sit fractio simplex ex isto factore orta $=\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}$; et complementum hujusmodi formam habebit $\frac{V}{S}$, ita ut sit $\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}+\frac{V}{S}=\frac{P}{Q}$. Erit ergo $\frac{V}{S}=\frac{P}{Q}$ $-\frac{\mathfrak{A}}{f+gx}=\frac{P-\mathfrak{A}S}{(f+gx)S}$; ideoque $V=\frac{P-\mathfrak{A}S}{f+gx}$. Cum igitur V sit functio integra ipsius x, necesse est ut $P-\mathfrak{A}S$ sit divisibile per $f+gx$; ac propterea si ponatur $f+gx=0$ seu $x=\frac{-f}{g}$, expressio $P-\mathfrak{A}S$ evanescet. Fiat ergo $x=\frac{-f}{g}$, et cum sit $P-\mathfrak{A}S=0$, erit $\mathfrak{A}=\frac{P}{S}$.

Wenn man über den Inhalt der *Introductio* berichtet hat, genügt es also, die Herleitung des Wertes von $\frac{P(f+gx)}{Q}$ durch Differentiation zu erwähnen. Aber in den *Vorlesungen* ist wirklich der ausführliche Bericht nützlich, denn bei der Behandlung der *Introductio* hat Herr Cantor nicht die oben zum Abdruck gebrachte Eulersche Methode auseinandergesetzt, sondern eine verschlimmerte Bearbeitung derselben gegeben (vgl. BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 171).

Daß Euler selbst auf sein Verfahren großen Wert legte, scheint daraus hervorzugehen, daß er es nicht nur im Druck zweimal lehrte, sondern auch in seinem Brief an Nikolaus I Bernoulli vom 1. September 1742 auseinandergesetzt hat (siehe *Opera postuma* **1**, St. Petersburg 1862, S. 524).

G. Eneström.

---

3 : 773, siehe BM $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 174—175. — **3 : 774,** siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 442—443.

---

3 : 792. Um die Worte Maclaurins (siehe Fußnote 1): „In 1727 I added to a chapter of my Algebra, which is very publick in this place" zu erklären, genügt der folgende Passus aus dem Vorworte seiner posthumen *Algebra:* „Mr. Maclaurin composed a system of Algebra, soon after his being chosen Professor of Mathematicks in the University of Edinburgh; which he, thenceforth, made use of in his ordinary Course of Lectures" (siehe *A treatise of algebra*, ed. 5, London 1788, Bl. A 5[a]). Eine handschriftliche Algebra existierte also 1727, und der Inhalt derselben war aus Maclaurins Universitätsvorlesungen bekannt.

G. Eneström.

---

3 : 798, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443.

---

3 : 813. Der Passus (Z. 26—29): „Das ist also der Satz, daß jede homogene rationale ganze Funktion n^{ten} Grades von zwei Veränderlichen in n reelle oder imaginäre Faktoren 1^{ten} Grades zerfällt" soll gestrichen werden; dieser Satz ist nämlich hier von Herrn Cantor in die *Introductio* hineingelesen worden. Euler selbst bemerkt nur ganz im Vorübergehen (S. 236 der Originalausgabe) in betreff der fraglichen homogenen Gleichung: „Supra autem jam vidimus hujusmodi aequationem ad lineam curvam non pertinere, sed aliquot rectas se invicem in eodem puncto intersecantes exhibere"; das Wort „supra" bezieht sich vielleicht auf S. 224 Z. 2—4. Nun kann ja jede homogene Gleichung zwischen x und y auf die Form $F\left(\frac{x}{y}\right) = 0$ gebracht werden, und wenn man $\frac{x}{y} = \alpha$ setzt, so stellt die ursprüngliche Gleichung so viele verschiedene Geraden $x = \alpha y$ dar, als es ungleiche Werte von α gibt. Euler behauptet also nur, daß die Gleichung n^{ten} Grades $F(\alpha) = 0$ „einige" Wurzeln hat. Daß die Zahl der Wurzeln genau n ist, sagt er nicht hier, und er hatte ja keinen Anlaß, dies zu bemerken, da eigentlich nur die ungleichen Wurzeln für seinen Zweck von Interesse waren; daß eine Funktion n^{ten} Grades n lineare Faktoren enthält, deutet er nicht einmal an. Anderseits hat Euler wirklich im zweiten Bande der *Introductio* im wesentlichen den von Herrn Cantor angegebenen Satz ausgesprochen (vgl. was Herr Cantor S. 807, Z. 22—24 bemerkt), nämlich am Anfange des 7. Kapitels (S. 83 der Originalausgabe): „quae expressio resolubilis erit in factores simplices formae $Ay + Bx$"; der Umstand, daß Euler nicht ausdrücklich die Zahl der Faktoren angibt, dürfte kaum von irgendeinem Belang sein. Bekanntlich findet sich der Satz auch im 1. Bande der *Introductio* (S. 17 und 66 der Originalausgabe, vgl. oben S. 342).

G. Eneström.

---

3 : 819, siehe BM $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 321. — **3 : 845**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 327—328. — **3 : 848**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443. — **3 : 880**, siehe BM $\mathbf{8}_3$, 1907/8, S. 95—96. — **3 : 881**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 443; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 264—265. — **3 : 882**, siehe BM $\mathbf{2}_3$, 1901, S. 447; $\mathbf{5}_3$, 1904, S. 414. — **3 : 890**, siehe BM $\mathbf{4}_3$, 1903, S. 401.

---

3 : 890. Es verdient bemerkt zu werden, daß Euler in einem Briefe an Goldbach vom 17. August 1750 die Gleichung

$$y - x\frac{dy}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

durch Differentiation integriert hatte, und zwar auf ganz dieselbe Weise wie Clemm 1752 (siehe P. H. Fuss, *Correspondance mathématique* I, St. Pétersbourg 1843, S. 533). Nun ist ja diese Übereinstimmung nicht besonders überraschend, denn sowohl Euler wie Clemm könnte das Verfahren aus d'Alemberts 1750 erschienener Abhandlung *Méthodes pour intégrer quelques équations différentielles* (Mém. de l'acad. d. sc. de Berlin 1748, gedruckt 1750, S. 275—291) entnommen haben. Anderseits weiß man, daß Euler und Clemm miteinander wissenschaftlich verkehrten, denn Euler hat eine Einleitung zum *Examen temporum mediorum secundum principia astronomica et chronologica* (Berlin 1752) Clemms geschrieben, und Clemm hat 1752 eine *Lettre à Mr. Euler sur quelques paradoxes du calcul analytique* veröffentlicht. Es ist darum anzunehmen, daß

EULER und CLEMM nicht durchaus unabhängig voneinander ein und dieselbe Differentialgleichung auf ein und dieselbe Weise integrierten. Wer der eigentliche Urheber des Verfahrens war, dürfte ziemlich gleichgültig sein, da es im Jahre 1750 als allgemein bekannt betrachtet werden konnte, und meiner Ansicht nach ist es kaum nötig, CLEMMS Namen in einer Geschichte der Theorie der singulären Solutionen zu nennen.

G. ENESTRÖM.

3:892, siehe BM $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 143; $\mathbf{9}_3$, 1908/9, S. 265.

3:894. In betreff der Geschichte der Integration der vollständigen linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sollte auch auf die Abhandlung EULERS *Inquisitio physica in causam fluxus et refluxus maris* (Pièces qui ont remporté le prix de l'académie royale des sciences en M.DCC.XL. sur le flux et reflux de la mer, Paris 1741, S. 235—350) Rücksicht genommen werden. Hier integriert EULER (S. 300—304) eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = X$$

auf folgende Weise. Erst wird ein partikuläres Integral der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ mit einen arbiträren Konstanten ermittelt, und dann untersucht EULER, welche Funktion von x diese Konstante sein muß, damit der gefundene Wert von y der ursprünglichen Differentialgleichung genüge. Dies ist, soviel ich weiß, das erste Beispiel einer selbständigen Anwendung der Methode der Variation der Konstanten, die bekanntlich später von LAGRANGE und LAPLACE ausgebildet wurde, und als deren Erfinder gewöhnlich jener angegeben wird (siehe z. B. J. G. HAGEN, *Synopsis der höheren Mathematik* **3**, Berlin 1900 — 1905, S. 162; C. R. WALLNER in den *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* **4**, Leipzig 1908, S. 919).

Daß EULER die Methode der Variation der Konstanten schon Anfang 1739 kannte, geht aus einem Briefe vom 5. Mai 1739 an JOHANN BERNOULLI (siehe Biblioth. Mathem. $\mathbf{6}_3$, 1905, S. 32—33) hervor. Die Methode wird auch in der Abhandlung EULERS *De novo genere oscillationum* (Comment. acad. sc. Petrop. **11** [1739], gedruckt 1750, S. 137—139) benutzt, und nach P. H. FUSS wurde diese Abhandlung schon am 4. Dezember 1733 der Petersburger Akademie vorgelegt (siehe STÄCKEL und AHRENS, *Der Briefwechsel zwischen C. G. J. JACOBI und P. H. VON FUSS über die Herausgabe der Werke LEONHARD EULERS,* Leipzig 1908, S. 134), aber diese Angabe ist höchstwahrscheinlich unrichtig. Aus dem Anfang der Abhandlung geht nämlich hervor, daß sie durch eine Arbeit KRAFFTS im **10**. Bande der Petersburger Commentarii („ad annum MDCCXXXVIII") veranlaßt wurde, und man hat nicht den geringsten Anlaß, anzunehmen, daß diese Arbeit schon 1733 verfaßt wurde.

Auch DANIEL BERNOULLI hat unabhängig von EULER die Methode der Variation der Konstanten schon etwa 1741 benutzt, wie aus den *Excerpta ex litteris à DANIELE BERNOULLI ad LEONHARDUM EULER* (Comment. acad. sc. Petrop. **13** [1741/3], gedruckt 1751, S. 3—15) hervorgeht. Hier integriert BERNOULLI (S. 5—6) eine Differentialgleichung von der Form

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ky = X$$

im wesentlichen auf dieselbe Weise wie Euler. Der einzige Unterschied ist, daß Bernoulli von dem vollständigen Integral der Gleichung $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = 0$ ausgeht und dann eine der zwei arbiträren Konstanten als Funktion von x betrachtet.

G. Eneström.

3 : IV (Vorwort), siehe BM 2_3, 1901, S. 448.

Anfragen.

141. Über die Anwendung des Wortes „articulus" bei den ersten Algorithmikern. In die Biblioth. Mathem. 8_3, 1907/8, S. 150—151 habe ich das Resultat einer Untersuchung über das Vorkommen des Wortes „articulus" bei den Algorithmikern eingefügt, woraus hervorzugehen scheint, daß dies Wort erst am Anfang des 13. Jahrhunderts zur Anwendung gekommen ist. Indessen hat mir Herr Suter mitgeteilt, daß das entsprechende arabische Wort „'iqd" schon bei Alkhwarismi vorkommt, und zwar in zwei Bedeutungen, nämlich teils als Zehner, teils als zusammengesetzte aber durch 10 teilbare Zahl. Es liegt also sehr nahe anzunehmen, daß einige der ersten Algorithmiker, die direkt aus arabischen Quellen schöpften, das Wort „articulus" wirklich benutzt haben, und eine genauere Untersuchung über diese Frage wäre also erwünscht.

G. Eneström.

142. Über die Geschichte des Problems des Körpers kleinsten Widerstandes. In seiner *Dictionnaire universel de mathématique et de physique* (II, Paris 1753, S. 406) gibt Saverien an, daß Parent in einem „Supplément à plusieurs problèmes publiés à différentes occasions" am Ende der „Arithmétique théorie-pratique" eine Herleitung des Körpers kleinsten Widerstandes veröffentlicht hat. Ich besitze selber ein Exemplar des *Traité d'arithmetique théori-pratique, en sa plus grande perfection* (Paris 1714, (14) + 240 S.) Parents und S. 239 erwähnt der Verfasser in einem Verzeichnis seiner Schriften einen Artikel in den Mémoires de Trevoux, *Sur la route et la vitesse d'une surface plate verticale mûë dans l'eau* mit dem Zusatz: „corrigé ci-après". Leider fehlt in meinem Exemplare das Supplement (54 Druckseiten), worauf Parent durch diese Worte hinweist, nur aus einem Antiquariatskatalog weiß ich, daß darin u. a. ein Artikel „Sur le mouvement d'un vaisseau" vorkommt, der vielleicht gerade der von Saverien gemeinte ist.

Enthält das fragliche „Supplément à plusieurs problèmes publiés à différentes occasions" die Herleitung des Körpers kleinsten Widerstandes, und wenn dies der Fall ist, bringt die Herleitung etwas damals Neues in betreff dieses Problems?

G. Eneström.

Rezensionen.

Felix Auerbach. Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung von FR. AUERBACH, O. KNOPF, H. LIEBMANN, E. WÖLFFING u. a. herausgegeben. Leipzig, Teubner 1909. XLIV + 450 S. + Bildnis. — M. 6.

Wenn ich dieses Buch in der Bibliotheca Mathematica anzeige, so ist es eigentlich nur, weil die Seiten 370—431 Angaben literarischer Art enthalten, nämlich: Zeitschriften für Mathematik und Physik (S. 370—373), Gesellschaftsschriften mathematisch-naturwissenschaftlicher Richtung (S. 373—378), Neu erschienene mathematische Bücher (S. 378—385), Neu erschienene physikalische Bücher (S. 386—393), Totenliste (S. 394—399), Verzeichnis der Hochschullehrer (S. 400—408), Wissenschaftlich arbeitende Lehrer der Mathematik und Physik im Deutschen Reiche (S. 409—431).

Mit dem Plane, in ein Buch, dessen jährliches Erscheinen in Aussicht genommen ist, Angaben wie die oben erwähnten einzufügen, bin ich durchaus einverstanden, denn wir bekommen ja auf diese Weise einen kleinen Ersatz für den noch fehlenden Mathematikerkalender (vgl. Biblioth. Mathem. $\mathbf{3}_3$, 1902, S. 226—234). Ob gerade die Angaben, die im 1. Jahrgang des *Taschenbuches* vorkommen, in erster Linie in Betracht kommen sollten, ist zum großen Teil eine Geschmacksfrage, die ich hier stillschweigend übergehen werde; dagegen erlaube ich mir einige spezielle Bemerkungen in betreff der fraglichen Angaben hinzuzufügen.

S. 370—371. Das Verzeichnis der mathematischen Zeitschriften ist ziemlich vollständig, aber der Bearbeiter hat nicht überall die nötige Sachkunde zur Verfügung gehabt, und nicht einmal eine so leicht zugängliche Quelle wie die „Erklärung der Zitate" des Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik scheint er zu Rate gezogen zu haben. Sonst hätte er z. B. nicht angegeben, daß von der Revue de mathématiques PEANOS der 18. Band 1908 erschien; in Wirklichkeit wurde der 8. Band erst 1906 abgeschlossen, und meines Wissens ist später kein Heft erschienen. Offenbar ist der Bearbeiter von der Jahreszahl eines älteren Bandes ausgegangen und hat ohne weiteres angenommen, daß nachher jährlich ein Band erschienen ist. Auf ganz dieselbe Weise gibt er für das Bollettino (nicht „Bolletino") des Herrn LORIA: „10 (1907), 11 (1908)" an, während in Wahrheit der 10. Band erst 1908 abgeschlossen wurde und das erste Heft des 11. Bandes erst 1909 erschien, so daß es hier heißen sollte: „10 (1907—1908)". Aus demselben Grunde wird für die Zeitschrift Il Pitagora als Erscheinungsort „Avellino" angegeben, während die Zeitschrift schon seit zehn Jahren in Palermo herausgegeben wird.

S. 371—378. Auch in betreff des Verzeichnisses der physikalischen Zeitschriften und der Gesellschaftsschriften mathematisch - naturwissenschaftlicher

Richtung wird der Sachkundige leicht Ungenauigkeiten entdecken können. Beiläufig bemerke ich nur, daß das S. 371 erwähnte „Arkiv for (!) Matematik, Astronomi och Fysik, Stockholm, Bd. 4" mit dem S 377, Z. 7—8 v. u. zitierten „Arkif (!) för Matematik, Astronomi och Fysik" identisch ist, und daß zwei andere Gesellschaftsschriften sowohl unter „Bruxelles" als unter „Louvain" aufgeführt sind.

S. 378—385. Hier wäre eine bessere Korrekturlesung dringend zu empfehlen; besonders sind die Verfassernamen allzuoft verstümmelt. Fehler wie z. B. „Akkens" und „Fedo" statt AHRENS und FEHR sollten nicht vorkommen. Auch Angaben wie z. B. S. 382 Z. 17: „J. A. da G. Lazzeri", was wohl „Italienische Ausgabe, besorgt von G. LAZZERI" bedeutet, sollten in der Korrektur verbessert werden, ebenso wie die Angabe S. 385: „Wangerin, A. Franz Neumann" — Franz ist ja der Vorname von NEUMANN, nicht von WANGERIN.

S. 394—399. Die meisten Angaben der „Totenliste" sind richtig, aber auch hier sieht man, daß es dem Bearbeiter an hinreichender Sachkunde gefehlt hat. Der 1908 gestorbene Professor HERTZER hieß nicht Heinrich, sondern HUGO und war nicht 1822 in „Nornburg" (! Druckfehler für Hornburg), sondern 1831 in Aschersleben geboren. Vermutlich hat der Bearbeiter den 1. Band von POGGENDORFFS *Handwörterbuch* eingesehen, wo ein HEINRICH HERTZER aufgeführt ist, aber aus dem 4. Bande des *Handwörterbuches* geht hervor, daß dieser schon 1897 starb. Hier hätte das Mitgliederverzeichnis des 16. Bandes (1907) des Jahresberichts der deutschen Mathematiker-Vereinigung sofort die nötige Auskunft gebracht. In anderen Fällen wäre es ratsam gewesen, die „Wissenschaftliche Chronik" der Bibliotheca Mathematica zu benutzen, denn auf diese Weise würde der Bearbeiter vermieden haben, z. B. für P. CURIE „c. 1860—1907" statt „15. 5. 1859—19. 4. 1906" und für G. A. MÜTTRICH „1833—1907 (!)" statt „23. 10. 1833—16. 12. 1904" anzugeben; ebenso wäre es leicht gewesen, einige unvollständige Angaben (z. B. für L. L. LINDELÖF) zu ergänzen.

S. 400—431. Ob es nicht angebracht sein könnte, die zwei Verzeichnisse in ein einziges zusammenzuarbeiten? Jedenfalls sollten für die folgenden Jahrgänge Maßregeln ergriffen werden, um zu vermeiden, daß Personen, die schon vor vielen Jahren gestorben sind (siehe z. B. S. 430: „H. E. WAPPLER", der am 6. Oktober 1899 hinschied), als lebend aufgeführt werden.

Die vorangehende Kritik bezieht sich nur auf Einzelheiten der literarischen Abteilung, die kaum $\frac{1}{8}$ des *Taschenbuches* füllt. Im übrigen enthält das Buch teils eine kurze Biographie WILLIAM THOMSONS (nebst Bildnis), teils eine Menge von Angaben, die für den täglichen Gebrauch der Mathematiker und Physiker bestimmt sind. Die rein mathematische Abteilung ist von E. WÖLFFING bearbeitet und enthält auf 160 Seiten eine Zusammenstellung von Definitionen der gewöhnlichsten mathematischen Begriffe nebst den wichtigsten Sätzen, die sich auf diese Begriffe beziehen. Den Wert dieser $\frac{7}{8}$ zu beurteilen gehört den Sachkundigen auf den betreffenden Gebieten.

Stockholm. G. ENESTRÖM.

G. Loria. Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche. Terza edizione accresciuta di uno sguardo allo sviluppo della geometria in quest'ultimo decennio. Torino, Clausen 1907. XXIII + 475 S. 8 Lire.

Die besonders paginierten Seiten enthalten zwei Vorreden, Inhaltsverzeichnis und eine Liste der Abkürzungen der zitierten Zeitschriftentitel. Dann kommen die Druckbogen 1—21 (= S. 1—336) der 1896 herausgegebenen zweiten Auflage, d. h. der ganze Text dieser Auflage mit Ausnahme der letzten Seite. Diese Seite, die dem Bogen 22 gehört, ist hier neugedruckt und weiter folgt: 1. Das auf dem Titelblatt erwähnte „Sguardo allo sviluppo della geometria in quest'ultimo decennio" (S. 339—459); 2. Verbesserungen und Zusätze (S. 460—462), von denen einige schon am Ende der 2. Auflage zu finden sind; 3. Namenregister (S. 463—475).

Da die Hauptabteilung, abgesehen von den 17 Druckzeilen der Seite 337, aus den Druckbogen der 2. Auflage besteht, verweise ich in betreff derselben auf meine Anzeige dieser Auflage in der Biblioth. Mathem. 1896 (S. 87—89). Ohne Zweifel würde der Verfasser das 1. Kapitel („Sguardo alle origini ed allo sviluppo della geometria sin verso il 1850") unter Bezugnahme auf die neuesten Forschungen ergänzt und verbessert haben, wenn es ihm möglich gewesen wäre, dasselbe 1907 zu revidieren; auch wenn man nur seine eigenen mathematisch-historischen Arbeiten 1896—1907 zu Rate zieht, wird man für diesen Zweck wertvolles Material bekommen können. Einen anderen kleinen Beitrag zu solchen Verbesserungen erlaube ich mir hier im Vorübergehen zu bieten.

S. 15 (Fußnote 3) beschäftigt sich Herr Loria mit Omerique und bemerkt: „Che l'*Analysis geometrica* ... di Hugo de Omerique ... basti a far apparire il suo autore per il precursore della moderna geometria analitica ... è questione non ancora risoluta, perchè a ciò sarebbe necessario conoscere la 2ª parte di quell'opera la quale invece non vide ancora la luce". Aber in Wirklichkeit genügt es, den ersten Teil einzusehen, um sofort die Frage erledigen zu können, denn a) dieser Teil ist gar keine analytische Geometrie, sondern enthält Methoden (zum Teil rein geometrische, zum Teil algebraische) zur Lösung elementargeometrischer Probleme; b) in seiner „Introductio" hebt Omerique ausdrücklich hervor (S. 4), daß der zweite Teil nicht eine Geometrie des Raumes bieten sollte, sondern solche Probleme, die nicht durch die Elementargeometrie gelöst werden können, zu behandeln hätte. Er sagt nämlich: „ad problemata solida spectantia ... speciali tractationi solidorum reservabimus. Hoc tamen animadversum volumus, problema planum ideo vocari, non quia in illo de planis agitur; sed quia illius constructio una ad summum media proportionali indiget. Solidum vero non quia solida tractantur, quod in problemate plano contingere solet; sed quoniam duas saltem medias proportionales oportet invenire." Mit der Koordinatengeometrie hat sich Omerique gar nicht beschäftigt und es wäre sinnlos, ihn einen Vorläufer der modernen analytischen Geometrie zu nennen, auch wenn man davon absieht, daß eine solche Geometrie (in der Ebene) im Jahre 1698 schon existierte.

Der neue Abschnitt der 3. Auflage hat dieselben Abteilungen wie die 2. Auflage und ist nach demselben Plane bearbeitet. Inwieweit die Auswahl der Literaturangaben gut und die Klassifikation derselben richtig ist, bin ich nicht kompetent zu beurteilen; ich muß mich darum begnügen, zu konstatieren, daß die Darstellung, soweit ein Laie sich darüber eine Meinung bilden kann, von Sachkunde zu zeugen scheint, daß Herr Loria eine sehr große Anzahl von Arbeiten aus dem letzten Jahrzehnte erwähnt und daß die Titel, sofern sie in italienischer oder französischer Sprache abgefaßt sind, fast überall richtig

wiedergegeben werden. Daß in betreff der übrigen Titel (besonders der deutschen) kleinere Fehler allzu oft vorkommen, beruht wohl auf dem Korrekturleser. Besonders lehrreich in dieser Hinsicht ist eine Berichtigung (S. 462) zur Seite 293, wo Herr LORIA eine 1893 in Paderborn (der Name ist wirklich richtig gedruckt) erschienene Arbeit zitiert. Die Berichtigung lautet wörtlich: „invece di Pateborn (!) 1,893 si legga Padeborn (!!), I Bd. 1893, II Bd. 1898". — Die Verfassernamen sind nicht so oft wie in der Hauptabteilung unrichtig geschrieben, nur ziemlich selten findet man Verstümmelungen wie z. B. „Gallestrand" (S. 360; auch im Register!) „Grandhaudt" (S. 365; im Register „Grandhaut"!) und „Kawkes" (S. 456; auch im Register!)

Der Preis des Buches ist billig, aber es ist erwünscht, daß die Besitzer der 2. Auflage nicht gezwungen werden, zum zweiten Mal die Bogen 1—21 zu kaufen. Vielleicht könnte es ihnen gestattet sein, die „Terza edizione" für etwa 4 Lire zu bekommen, wenn sie ihre Exemplare dieser 21 Bogen dem Verleger überließen?

Stockholm. G. ENESTRÖM.

Neuerschienene Schriften.

Das Zeichen * bedeutet, daß die betreffende Schrift der Redaktion nicht vorgelegen hat.

Autoren-Register.

a) Zeitschriften. Allgemeines.

Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften **25** (1907). [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. **33**$_2$, 1909, 85. (J. G.) — Mathesis **9**$_3$, 1909, 64—65. (P. M.) [1

Atti del IV° congresso internazionale dei matematici (Roma 6—8 Aprile 1908). Pubblicati per cura di G. Castelnuovo. Volume I. Relazione sul congresso. Discorsi e conferenze. Roma, Loescher 1909. [2

8°, IV + 218 + (1) S. — [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 62.

Bibliotheca Mathematica. Zeitschrift für Geschichte der mathematischen Wissenschaften. Herausgegeben von G. Eneström. Leipzig (Stockholm). 8°. [3

9$_3$ (1909): 3.

Bollettino di bibliografia e storia delle scienze matematiche pubblicato per cura di G. Loria. Torino (Genova). 8°. [4

10 (1907/8): 3—4. — **11** (1909): 1.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Herausgegeben von E. Lampe. Berlin. 8°. [5

37 (1906): 3.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la société mathématique d'Amsterdam par H. de Vries, J. Cardinaal, J. C. Kluyver, W. Kapteyn, P. H. Schoute. Amsterdam. 8°. [6

17: 1 (avril—octobre 1908).

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung von Fr. Auerbach, O. Knopf, H. Liebmann, E. Wölffing u. a. herausgegeben von Felix Auerbach. Leipzig, Teubner 1909. [7

8°, XLIV + 450 S. + Bildnis. — [6 Mk.]

Zeuthen, H. G., Quelques traits de la propagation de la science de génération en génération. [8

Rivista di scienza „Scientia" (Bologna) 5, 1909. 17 S.

Cantor, M., Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. 1² (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 1—2. (G. L.) — [Kleine Bemerkungen.] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 237—244. (A. Rüstow, F. Rudio, H. Suter, G. Eneström.) — 2² (1900). [Kleine Bemerkungen:] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 244—257. (G. Eneström, H. Suter, H. Bosmans, G. Junge.) — 3² (1901). [Kleine Bemerkungen.] Biblioth. Mathem. 9_3, 1908/9, 257—265. (G. Eneström, G. Junge, A. Loewy.) [9

Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, herausgegeben von M. Cantor. Vierter Band. Von 1759 bis 1799 (1908). [Rezension.] *New York,* Americ. mathem. soc., 15_2, 1909, 352—357. (D. E. Smith.) [10

Fazzari, G., Breve storia della matematica dai tempi antichi al medio evo (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 10. (G. L.) — The mathem. gazette 4, 1908, 270—271. [11

Günther, S., Geschichte der Mathematik. I (1908). [Rezension:] L'enseignement mathém. 11, 1909, 153. [12

Müller, Felix, Führer durch die mathematische Literatur (1908). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, *65—66.* (H. Wieleitner.) — *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 403—405. (G. A. Miller.) — Arch. der Mathem. 14_3, 1909, 348—350. (W. Ahrens.) — Bullet. d. sc. mathém. 33_2, 1909, 70. (G. J.) [13

Smith, D. E., Rara arithmetica (1908). [Rezension:] Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 267—280. (G. Eneström.) [14

Boutroux, P., Les origines du calcul des probabilités. [15
La revue du mois 5, 1908, 641—654.

Loria, G., Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche (1907). [Rezension:] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 402—403. (E. Kasner.) — Bullet. d. sc. mathém. 33_2, 1909, 69. (G. D.) [16

Böttcher, J. E., Beweise für die Heronsformel aus zwei Jahrtausenden. Leipzig 1909. [17
4°, 22 + (2) S. + Taf. — Festschrift als Beilage zum Jahresbericht der Petrischule 1909.

Aubry, A., Essai sur l'histoire de la géométrie des courbes. [18
Porto, Academia polytechnica, Annaes 4, 1909, 65—112.

Teixeira, F. G., Traité des courbes spéciales remarquables (1908). — [Rezension.] Giorn. di matem. 46, 1908, 244—246. (G. Pirondini.) [19

Bonola, R., Die nichteuklidische Geometrie. Deutsche Ausgabe von H. Liebmann (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 6. (G. L.) [20

***Darmstädter, L.,** Handbuch der Geschichte der Naturwissenschaften und der Technik. In chronologischer Darstellung. Zweite umgearbeitete und vermehrte Auflage. Unter Mitwirkung von R. du Bois-Reymond und C. Schaefer. Berlin, Springer 1909. [21
8°, X + 1262 S. — [Rezension.] Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 216. (P. R.)

Vailati, G., La scoperta della condizione d'equilibrio d'un grave scorrevole lungo un piano inclinato. [22
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 65—72.

Vailati, G., A proposito di una recente pubblicazione sulla storia della statica. [23
Il nuovo cimento 15_5, 1908, 45—56.

Ibel, Th., Die Wage im Altertum und Mittelalter. Inauguraldissertation. Erlangen 1908. [24
8°, (3) + 187 + (1) S.

Berry, A., Compendio di storia dell'astronomia, tradotto da D. Gambioli. Riveduto da E. Millosevich (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 79—80. (G. L.) [25

***Bryant, W. W.,** A history of astronomy. London, Methuen 1907. [26
8°, 343 S.

Arrhenius, S., Die Vorstellung vom Weltgebäude im Wandel der Zeiten (1908). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 762—764. (F. M. Exner.) [27

Voss, A., Über das Wesen der Mathematik (1908). [Rezension:] Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, *63—64.* (H. Liebmann.) — *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 405—409. (F. Cajori.) — Bullet. d. sc. mathém. 33_2, 1909, 102. (J. T.) — Science 29_2, 1909, 392. (G. A. Miller.) [28

b) **Geschichte des Altertums.**

Schiaparelli, G., I primordi dell'astronomia presso i Babilonesi. [29
Rivista di scienza „Scientia" 3, 1908, 213—259.

Schiaparelli, G., I progressi dell'astronomia presso i Babilonesi. [30
Rivista di scienza „Scientia" 4, 1908, 24—51.

Schmidt, M. C. P., Zur Entstehung und Terminologie der elementaren Mathematik (1906). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 5—6. (G. L.) [31

Junge, G., Wann haben die Griechen das irrationale entdeckt? (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 121. [32

Ebeling, R., Mathematik und Philosophie bei Plato. Münden 1909. [33
4°, (18) S. — Gymnasialprogramm.

Rudio, F., Notiz zur griechischen Terminologie. [34
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 53, 1908, 481—484. — Über die Bedeutung des Termes τμῆμα bei Aristoteles.

Heath, T. L., The thirteen books of Euclid's Elements translated (1908). [Rezension.] *New York,* Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 386—391. (D. E. Smith.) [35

Heiberg, J. L., Archimedes, seine Entwicklung und die Wirkung seiner Schriften. [36
Das Weltall 9, 1909, 161—168, 184—187.

Smith, D. E., A Greek multiplication table. [37
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 193—195 + Taf.

Rudio, F., Der Bericht des Simplicius über die Quadratur des Antiphon und des Hippokrates (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 1340—1341. (A. A. Björnbo.) [38

c) Geschichte des Mittelalters.

Wiedemann, E., Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften. XIV. [39
Erlangen, Physik.-mediz. Sozietät, Sitzungsber. 40, 1908, 1—64. — Über die Geometrie und Arithmetik nach dem Mafatih al 'Ulûm. — Über die Arithmetik nach Ibn al Akfânî. — Nachrichten über Zahlzeichen. — Über das Schachspiel und dabei vorkommende Zahlenprobleme. — Nachträge.

Suter, H., Eine indische Methode der Berechnung der Kugeloberfläche. [40
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 196—199.

Wiedemann, E., Über die Entstehung der Farben nach Nasîr al Dîn al Tûsî. [41
Jahrbuch für Photographie (Halle) 1908. 8 S.

Smith, D. E., An ancient english algorism. [42
Teachers college, Columbia university, New York, Department of mathematics, Courses 1909—1910, 11—19. — Der betreffende Traktat scheint etwa 1300 geschrieben zu sein.

Lange, Gerson, Sefer Maassei Choscheb. Die Praxis des Rechners. Ein hebreisch-arithmetisches Werk des Levi ben Gerschon aus dem Jahre 1321. Zum ersten Male herausgegeben und ins Deutsche übersetzt. Frankfurt a. M. 1909. [43
8°, XIV + 139 + 100 + (2) S. — [3.50 Mk.]

Eneström, G., Über die Geschichte der quadratischen und kubischen Reste im christlichen Mittelalter. [44
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 265—266. — Anfrage.

Duhem, P., Etudes sur Léonard de Vinci. Ceux qu'il a lus et ceux qui l'ont lu. Seconde série. Paris, Hermann 1909. [45
8°, IV + 474 S. — [Rezension:] Bullet. d. sc. mathém. 33_2, 1909, 107—112. (J. T.)

d) Geschichte der neueren Zeit.

Smith, D. E., History of modern mathematics (1906). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 4. (G. L.) [46

Björnbo, A. A., Ioannis Verneri de triangulis sphaericis libri quatuor (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 124. [47

Amodeo, F., Albrecht Dürer precursore di Monge (1907). [Résumé:] *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto 46, 1907, 322—323. [48

Gravelaar, N. L. W. A., Cardano's Transmutatiemethoden. [49
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1909, 407—443.

***Gigalski, N.,** Coppernikus und Allenstein. Sein Studium, seine Tätigkeit als Statthalter in Allenstein, sein Entwickelungsgang zum Entdecker des neuen Weltsystems. Allenstein 1907. [50
8°, VIII + 91 S. + Bildnis.

Friis, F. R., Tychonis Brahei et ad eum doctorum virorum epistolae ex anno 1588 et sequentibus annis. Nunc primum collectae et editae. Fasc. XI. Hauniae, Gad 1909. [51
4°, S. 321—352. — [1.60 Mk.]

Friis, F. R., Om Tyge Brahes Brevvexling. [52
Friis, F. R., *Kulturhistoriske Studier* 2, Köbenhavn 1909, 65—98.

Mansion, P., Esquisse de l'Histoire des mathématiques en Belgique (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 119. [53

Favaro, A., Regesto biografico Galileiano (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 121. [54

***Müller, Adolf,** Galileo Galilei und das kopernikanische Weltsystem. Freiburg i. B., Herder 1909 [55
8°.

Favaro, A., Amici e corrispondenti di Galilei. XXI. Benedetto Castelli (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 121. [56

***Closs, O.,** Kepler und Newton und das Problem der Gravitation in der Kantischen, Schellingschen und Hegelschen Naturphilosophie. Heidelberg, Winter 1908. [57
8°, IV + 121 S.

Del Gaizo, M., Evangelista Torricelli e Giovanni Alfonso Borelli. Appunti raccolti nel compiersi il terzo secolo della loro nascita. [58
Rivista di fisica (Pisa) 17, 1908, 385—402.

Mezzetti, P., Nel terzo centenario della nascita di Evangelista Torricelli. [59
Rivista di fisica (Pisa) 17, 1908, 516—527.

Janssen van Raaij, W. H. L., Iets over de rechte centrale botsing. [60
Amsterdam, Wisk. genoots., Nieuw archief 8_2, 1907, 69—103.

Oeuvres de Blaise Pascal publiées par L. Brunschwicg et P. Boutroux. I—III (1908). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 1029—1033. (Ph. A. Becker.) — L'enseignement mathém. 11, 1909, 156—157. (A. Buhl.) [61

Bosscha, J., Note relative a la remarque de Huygens sur les démonstrations géométriques de la dioptrique de Descartes. [62
Archives néérland. d. sc. exactes 13_2, 1908, VIII—XV.

Bloch, L., La philosophie de Newton (1908). [Rezension:] Revue de métaphysique et de morale 1908, 492—506. [63

Eneström, G., Die erste Herleitung von Differentialen trigonometrischer Funktionen. [64
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 200—205.

Eneström, G., Jakob Bernoulli und die Jacobischen Thetafunktionen. [65
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 206—210.

Lietzmann, W., Eine geometrische Aufgabensammlung aus dem Ende des 17. Jahrhunderts. [66
Mathematisch-naturwissenschaftliche Blätter 6, 1909. 4 S.

Mikami, Y., A question on Seki's invention of the circle-principle. [67
Tôkyô, Sûgaku-Buturigakkwai, Kizi 4_2, 1908, 442—446.

***Langenkamp, O.,** Über Saccheris Untersuchungen des Parallelenaxioms. Münster 1907. [68
8°, 30 S.

Dingeldey, F., Zur Erzeugung der Kegelschnitte nach Braikenridge und Maclaurin. [69
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 99—107.

Müller, Felix, Leonhard Euler. [70
Leopoldina 43, 1907, 91—94.

Müller, Felix, Bibliographisch-Historisches zur Erinnerung an Leonhard Euler (1907—1908). [Rezension:] Mathesis 9_3, 1909, 66—67. (P. M.) [71

Alasia, C., Leonardo Eulero (il bi-centenario della sua nascita). [72
Rivista di fisica (Pisa) 17, 1908, 74—83.

Rudio, F., Leonhard Euler. Vortrag gehalten im Rathaus in Zürich am 6. Dezember 1883. [73
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 53, 1908. 15 S. — Neue Auflage der 1884 erschienenen Schrift.

Stäckel, P., Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen (1907). [Rezension:] Mathesis 9_3, 1909, 67—68. (P. M.) [74

Stäckel, P., Eulers Verdienste um die elementare Mathematik (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 121—122. — Mathesis 9_3, 1909, 66—67. (P. M.) [75

Du Pasquier, L. G., Leonhard Eulers Verdienste um das Versicherungswesen. [76
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 54, 1909. 27 S.

Stäckel, P. und Ahrens, W., Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss über die Herausgabe der Werke Leonhard Eulers (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 9. (G. L.) — Deutsche Literaturz. 30, 1909, 695—696. (E. Lampe.) — Mathesis 9_3, 1909, 64—66. (P. M.) [77

Müller, Felix, Über Pläne zur Herausgabe von Abhandlungen Leonhard Eulers (1908). [Rezension:] Mathesis 9_3, 1909, 67—68. (P. M.) [78

R[udio], F., Der Plan einer Gesamtausgabe von Eulers Werken. [79
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, *47—50, 82—85*. — Nach „Neuer Zürcher Zeitung" 17. Februar und 8. Mai 1909.

Rudio, F., Der Plan einer Gesamtausgabe von Eulers Werken. (Fortsetzung.) [80
Zürich, Naturf. Ges., Vierteljahrsschr. 53, 1908, 605—611.

Vivanti, G., Sulla seconda edizione (1787) del „Calcolo differenziale" di Eulero. [81
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 266. — Antwort auf eine Anfrage.

White, H. S., Bézouts theory of resultants and its influence on geometry. Presidential address delivered before the American mathematical society december 30, 1908. [82
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 325—338.

Cajori, F., On the transformation of algebraic equations by E. S. Bring (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 119. [83

Alasia, C., Essai d'une bibliographie sur la théorie des groupes. [84
Rivista di fisica (Pisa) 17, 1908, 630—638.

Darboux, G., Les origines, les méthodes et les problèmes de la géométrie infinitésimale (1908). [Wieder abgedruckt:] Atti del IV° congresso internazionale dei matematici 1, Roma 1909, 105—122. — Revue génér. d. sc. 19, 1908, 846—855. [85

Cerruti, V., Le matematiche pure e miste nei primi dodici congressi della Società Italiana per il progresso delle scienze. [86
Atti della società Italiana per il progresso delle scienze 1 (1907), 1908, 94—107. — [Wieder abgedruckt:] Annali di matem. 15_3, 1908, 1—20.

Jourdain, Ph. E. B., The development of the theory of transfinite numbers. II. [87
Arch. der Mathem. 14_3, 1909, 289—311.

C. F. Gauss Werke. Siebenter Band (1906). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 89—90. (G. L.) [88

Stäckel, P., Vier neue Briefe von Gauss (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 122. [89

Wangerin, A., Franz Neumann (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 3—4. (G. L.) [90

Ahrens, W., Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und M. H. Jacobi (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 8—9. (G. L.) — The mathem. gazette 4, 1908, 269—270. [91

Ahrens, W., C. G. J. Jacobi als Politiker (1907). [Rezension:] Deutsche Literaturz. 30, 1909, 1033. (E. Lampe.) [92

Gundelfinger, S., Aus Jacobis Vorlesungen über elliptische Funktionen 1835—1836. [93
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 211—226.

Neumann, C., Einige Äußerungen C. G. J. Jacobis über die Prinzipien der analytischen Mechanik. [94
Leipzig, Sächs. Ges. d. Wiss., Berichte 60, 1908, 80—84.

d'Adhémar, R., Evariste Galois. [95
La revue du mois 6, 1908, 426—439.

Walter, A., William Whewells Abhandlungen zur natürlichen Geometrie der Kurven (1907). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 118—119. [96

Tannery, J., Correspondance entre Liouville et Dirichlet. [97
Bullet. d. sc. mathém. 32_2, 1908, 47—62, 88—95; 33_2, 1909, 47—64.

Engel, F., Hermann Grassmann. [98
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 344—356 + Porträt.

Volterra, V., Le matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX. [99
Atti del IV° congresso internazionale dei matematici 1, Roma 1909, 55—65.

Schlesinger, L., Bericht über die Entwicklung der Theorie der linearen Differentialgleichungen seit 1865. [100
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 133—266.

Marcolongo, R., Progressi e sviluppo della teoria matematica della elasticità in Italia (1870—1907). [101
Il nuovo cimento 14_5, 1907, 371—410.

Schlesinger, L., Drei Briefe von K. Weierstrass an L. Fuchs. [102
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 93—99.

Wentscher, M., Weierstrass und Sonja v. Kowalewsky. [103
Deutsche Mathem.-Verein., Jahresber. 18, 1909, 89—93.

Picard, E., La mathématique dans ses rapports avec la physique (1908). [Wieder abgedruckt:] Atti del IV° congresso internazionale dei matematici 1, Roma 1909, 183—195. — Revue génér. d. sc. 19, 1908, 602—609. — Il nuovo cimento 16_5, 1908, 165—183. [104

Poincaré, H., L'avenir des mathématiques (1908). [Wieder abgedruckt:] Atti del IV° congresso internazionale dei matematici 1, Roma 1909, 167—182. — Revue génér. d. sc. 19, 1908, 930—939. — Rivista di scienza „Scientia" 4, 1908, 1—23. [105

B. G. Teubners Verlag auf dem Gebiete der Mathematik (1908). [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 127. [106

e) Nekrologe.

Wilhelm **von Bezold** (1837—1907). [107
Berlin, Deutsche Physik. Ges. 9, 1907, 258—288. (G. Hellmann.) — Nature 75, 1907, 396.

Ludwig **Boltzmann** (1844—1906). [108
London, Royal soc., Proceedings 80, 1908, XI—XIII. (G. H. B.)

Pietro **Cassani** (1832—1905). [109
Venezia, Istituto Veneto, Atti 66, 1907, 175—186. (G. Ricci.)

Ernesto **Cesàro** (1859—1906). [110
Napoli, Accad. Pontaniana, Atti 13_2, 1908, Nr. 2. 5 S. (G. Torelli.) — Wiskundig tijdschrift 3, 1907, 152—153. (N. Quint.)

Agnes Mary **Clerke** (1842—1907). [111
Nature 75, 1907, 299—300.

Ralph **Copeland** (1837—1905). [112
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 42, 1907, 230—238. (J. L. E. Dreyer.)

Siegfried **Czapski** (1861—1907). [113
Berlin, Deutsche Physik. Ges., Verhandl. 9, 1907, 741—748. (F. F. Martens.) — Zeitschr. für Instrumentenkunde 27, 1907, 237—241. (M. von Rohr.)

Giovanni Battista **Favero** (1832—1906). [114
Torino, Accad. d. sc., Atti 42, 1907, 318—320. (C. Guidi.)

Asaph **Hall** (1829—1907). [115
Nature 77, 1907, 154—155.

Alexander Stewart **Herschel** (1836—1907). [116
London, Royal soc., Proceedings 80, 1908, XIX—XXIII. (H. H. T.)

Yosiziro **Homma** (1870—1908). [117
Tokyo, Sugaku-Buturigakkwai, Kizi 4_2, 1908, 440—441. (A. Tanakadate.)

Friedrich **Hultsch** (1833—1906). [118
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 32.

Heinrich **Kreutz** (1854—1907). [119
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 42, 1907, 314—323. (H. Kobold.)— Astron. Nachr. 175, 1907, 241—244. (H. Seeliger.) — Naturwiss. Rundschau 22, 1907, 450—451. (A. Berberich.)

Samuel Pierpont **Langley** (1834—1906). [120
Washington, Philos. soc., Bulletin 15, 1907, 1—26. (C. Adler.)

Gaston **de Longchamps** (1842—1906). [121
Wiskundig tijdschrift 3, 1907, 106—107. (N. Quint.)

Maurice **Loewy** (1833—1907). [122
Astron. Nachr. 176, 1907, 265—267. (P. Puiseux.) — Nature 76, 1907, 666—667. — Leopoldina 43, 1907, 115.

Amédée **Mannheim** (1831—1906). [123
Nouv. ann. de mathém. 7_4, 1907, 97—111. (R. Bricard.) — Wiskundig tijdschrift 3, 1907, 198—199. (N. Quint.)

Antonino **Mascari** (1862—1906). [124
Nature 75, 1907, 373—374. (W. E. Rolston.)

Elie **Mascart** (1837—1908). [125
St. Pétersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 2_6: 2, 1908, 1032—1038. (M. Rykatscheff.)

Junius **Massau** (1852—1909). [126
L'enseignement mathém. 11, 1909, 142. — Mathesis 9_3, 1909, 57, 89—91. (P. Mansion.)

Adolph **Mayer** (1839—1908). [127
Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 117.

Hermann **Minkowski** (1864—1909). [128
New York, Americ. mathem. soc., Bulletin 15_2, 1909, 319. — L'enseignement mathém. 11, 1909, 140—141. (G. Dumas.) — Mathem. Ann. 66, 1909, 417—418.

Jean Abraham Chrétien **Oudemans** (1827—1906). [129
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 42, 1907, 243—253. (A. A. Nijland.)

Arthur William **Panton** (1846—1906). [130
Wiskundig tijdschrift 3, 1907, 152—153. (N. QUINT.)

Josef Maria **Pernter** (1848—1908). [131
Naturwiss. Rundschau 24, 1909, 154—155. (C. KASSNER.)

Giuseppe **Picciati** (1868—1908). [132
Il nuovo cimento 15_2, 1908, 363—368. (T. LEVI-CIVITA.)

Wilhelm **Ritter** (1847—1906). [133
Torino, Accad. d. sc., Atti 42, 1907, 163—166. (C. GUIDI.)

Edward John **Routh** (1831—1907). [134
Nature 76, 1907, 200—202. (J. LARMOR.) — Wiskundig tijdschrift 3, 1907, 198—199. (N. QUINT.)

Henry Chamberlain **Russell** (1836—1907). [135
London, Royal soc., Proceedings 80, 1908, LX—LXIII. (F. W. D.) — Nature 75, 1907, 442—443. (W. E. PLUMMER.)

Alfonso **Sella** (1865—1907). [136
Il nuovo cimento 14_5, 1907, 489—501. (A. POCHETTINO.)

Francesco **Siacci** (1839—1907). [137
Torino, Accad. d. sc., Atti 43, 1908, 568—578. (G. MORERA.) — Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 10, 1907/8, 107—116 [mit Schriftenverzeichnis]. (R. MARCOLONGO.) — Giorn. di matem. 46, 1908, 375—380 [nur Schriftenverzeichnis]. (R. MARCOLONGO.)

George Gabriel **Stokes** (1819—1903). [138
LARMOR, J., *Memoir and scientific correspondance of G. G. STOKES. Selected and arranged.* 1—2. Cambridge, University press 1907. 8°. 1: XII + 475 S. — 2: VI + 507 S. — [Rezension:] Bollett. di bibliogr. d. sc. matem. 11, 1909, 6—8. (G. L.)

Charles E. **Stuyvaert** (1851—1908). [139
Nature 78, 1908, 256.

Anton **Sucharda** (1854—1907). [140
Časopis pro pěstov. matem. 37, 1907/8, 353—359. (J. SOBOTKA.)

Charles **Taylor** (1840—1908). [141
London, Mathem. soc., Proceedings 6_2, 1909, XX—XXI. (A. E. H. LOVE.)

William **Thomson**, Lord **Kelvin** (1824—1907). [142
Göttingen, Ges. d. Wiss., Nachr. (Geschäftl. Mitt.) 1908, 85—94. (W. VOIGT.) — *London*, Royal soc., Proceedings 81, 1908, I—LXXII. (J. L.) — *London*, Mathem. soc., Proceedings 6_2, 1909, XV—XIX. (H. LAMB.) — *Napoli*, Accad. d. sc., Rendiconto 46, 1907, 365—367. (L. PINTO.) — La revue du mois 5, 1908, 257—271. (M. BRILLOUIN.) — Rivista di fisica (Pisa) 17, 1908, 61—70. (C. NEGRO.) — Taschenbuch für Mathematiker 1, 1909, VII—XIV [mit Porträt]. (F. AUERBACH.)

Joseph **de Tilly** (1837—1906). [143
Wiskundig tijdschrift 3, 1907, 106—107. (N. QUINT.)

Hermann Carl **Vogel** (1841—1907). [144
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 42, 1907, 323—339. (G. MÜLLER.) — *St. Pétersbourg*, Acad. d. sc., Bulletin 1_6: 2, 1907, 487—488. (A. A. BJELOPOLJSKIJ.) — Leopoldina 43, 1907, 80. — Nature 76, 1907, 446—447. (W. E. PLUMMER.)

August **Wellenmann** (1843—1906). [145
Meteorolog. Zeitschr. 23, 1906, 553—554. (J. MAURER.)

Viktor **Wellmann** (1861—1905). [146
Leipzig, Astron. Ges., Vierteljahrsschr. 42, 1907, 238—242. (M. BRENDEL.)

Georgij **Woronoj** (?—1908). [147
St. Pétersbourg, Acad. d. sc. Bulletin 2_6: 2, 1908, 1247—1248. (A. A. MARKOFF.)

f) Aktuelle Fragen.

Loria, G., Développements relatifs au projet d'un „Manuel pour les recherches sur l'histoire des mathématiques." [148
Biblioth. Mathem. 9_3, 1909, 227—236.

Tannery, P., Les sociétés savantes et l'histoire des sciences (1906). [Wieder abgedruckt:] *Bordeaux*, Soc. d. sc., Mémoires 4_6, 1908, 383—388. [149

Richter, A., Der Unterricht in der Geschichte der Mathematik auf den Gymnasien. [150
Zeitschr. für mathem. Unterr. 40, 1909, 87—91.

Fehr, H., Flournoy, Th., Claparède, Ed., Enquête sur la méthode du travail des mathématiciens (1908). [Rezension:] Revue de métaphysique et de morale 1908, Suppl. de septembre, 10. [151

Dyck, W. von, Die Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (1908). [Wieder abgedruckt:] Atti del IV° congresso internazionale dei matematici 1, Roma 1909, 123—134. [152

Karpinski, L. C., The program of the international commission on the teaching of mathematics. [153
Science 29_2, 1909, 605—606.

Lorey, W., Die mathematischen Wissenschaften und die Frauen. [154
Frauenbildung (Leipzig) 8, 1909, 161—178.

[Internationaler Mathematikerkongreß in Rom 1908.] [155
St. Pétersbourg, Acad. d. sc., Bulletin 2_6: 1, 1908, 709—710. (A. M. LIAPOUNOFF.) — Il nuovo cimento 15_5, 1908, 516—525. (G. GIANFRANCESCHI.) — La revue du mois 5, 1908, 735—737. (E. BOREL.) — Rivista di fisica (Pisa) 17, 1908, 499—504. (G. GIANFRANCESCHI.)

Wissenschaftliche Chronik.

Ernennungen.

— Privatdozent F. Åkerblom in Upsala zum Professor der Meteorologie an der Universität daselbst.

— Professor G. Bagnera in Messina zum Professor der Höheren Analysis an der Universität in Palermo.

— Privatdozent G. Berndt in Halle zum Professor der Physik an der Universität in Buenos Aires.

— Dozent E. Bose in Danzig zum Professor der Physik an der Universität in La Plata (Argentinien).

— Direktor H. Bourget in Marseille zum Professor der Astronomie an der Universität in Aix-Marseille.

— Dr. G. D. Brikhoff an der Universität von Wisconsin zum Professor der Mathematik an der Universität in Princeton.

— „Maître de conférences" A. Buhl in Montpellier zum Professor der rationellen Mechanik an der Universität in Toulouse.

— Privatdozent K. Caratheodory in Göttingen zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Hannover.

— Dr. S. Carrus in Toulouse zum Professor der Mathematik an der Universität in Lille.

— Professor G. Fubini in Genua zum Professor der Höheren Analysis an der Technischen Hochschule in Turin.

— Privatdozent E. Gehrcke in Berlin zum Professor der Physik an der Universität daselbst.

— Professor C. McC. Gordon in Danville, Ky. zum Professor der Physik am „Lafayette college" in Easton, Pa.

— Professor G. Herglotz in Wien zum Professor der Mathematik an der Universität in Leipzig.

— Astronom E. Hertzsprung in Kopenhagen zum Professor der Astronomie an der Universität in Göttingen.

— Dozent Z. Krygowski in Lemberg zum Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule daselbst.

— Professor W. M. Kutta in München zum Professor der Mathematik an der Universität in Jena.

— P. Langevin in Paris zum Professor der Physik am „Collége de France" daselbst.

— Professor E. Lecher in Prag zum Professor der Experimentalphysik an der Universität in Wien.

— Dr. E. E. Levi in Pisa zum Professor der Mathematik an der Universität in Genua.

— Dr. G. H. Ling in New York zum Professor der Mathematik an der „Columbia university" daselbst.

— Professor W. Ludwig in Braunschweig zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Dresden.

— J. B. G. G. Pérot in Meudon zum Professor der Physik an der „Ecole polytechnique" in Paris.

— Dr. W. de Sitter zum Professor der Astronomie an der Universität in Leyden.

— Professor H. Timerding in Straßburg zum Professor der darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

— Privatdozent S. Valentiner in Berlin zum Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Hannover.

— E. F. van de Sande Bakhuyzen zum Professor der praktischen Astronomie an der Universität in Leyden.

— Dr. H. C. Wilson zum Direktor des Goodseel-Observatoriums am „Charleton college“.

— Professor M. Wolf in Heidelberg zum Direktor der Sternwarte daselbst.

Todesfälle.

— Otto Biermann, Professor der Mathematik an der deutschen Technischen Hochschule in Brünn, geboren in Teschen den 5. November 1858, gestorben in Brünn den 28. April 1909.

— John J. Browne, Professor der Mathematik an der „Colorado school of mines“ in Golden, Colo., gestorben den 20. Februar 1909, 42 Jahre alt.

— Oskar Emil Meyer, früher Professor der Physik an der Universität in Breslau, geboren zu Varel a. d. Jahde den 15. Oktober 1834, gestorben in Breslau den 21. April 1909.

— James W. Moore, Professor der Physik am „Lafayette college“ in Easton, Pa., gestorben den 28. Februar 1909, 64 Jahre alt.

— Peter Muth, mathematischer Verfasser, geboren in Neumühle bei Westhofen den 10. Juni 1860, gestorben in Osthofen den 30. April 1909.

— Augustin Pánek, Professor der Mathematik an der böhmischen Technischen Hochschule in Prag, geboren in Prag den 3. Dezember 1843, gestorben daselbst den 10. Dezember 1908.

— Albert Brown Porter, früher Professor der Physik am „Armour institute“ in Chicago, geboren in Indianapolis den 16. März 1864, gestorben in Chicago den 17. April 1909.

— Richard Reiff, Oberstudienrat in Stuttgart, geboren in Tübingen den 26. Mai 1855, gestorben in Stuttgart den 10. Juli 1908.

— Hermann Stahl, Professor der Mathematik an der Universität in Tübingen, geboren zu Fränk. Krumbach im Odenwald den 14. Mai 1843, gestorben in Tübingen den 6. April 1909.

— Frank Leo Tufts, Professor der Physik an der „Columbia university“ in New York, geboren zu Findlay, Ohio, den 16. Januar 1871, gestorben in New York den 15. April 1909.

— Giovanni Vailati, Professor der Mathematik am „Istituto Tecnico Galileo Galilei“ in Florenz, geboren in Crema den 23. April 1863, gestorben in Rom den 14. Mai 1909.

Die geplante Euler-Ausgabe.

— Die Zahl der Abonnements beträgt schon etwa 220. Die Pariser Akademie der Wissenschaften hat auf 40 Exemplare und ebenso die Petersburger Akademie der Wissenschaften auf 40 Exemplare subskribiert. Auch die Sammlung freiwilliger Beiträge zu den Kosten der Euler-Ausgabe hat ein gutes Ergebnis gehabt; bisher sind in der Schweiz gegen 100 000 Francs und außerhalb der Schweiz über 30 000 Francs gezeichnet worden.

Vorlesungen über Geschichte der mathematischen Wissenschaften.

— An der Universität in Straßburg hat Professor M. Simon für das Sommersemester 1909 eine zweistündige Vorlesung über Hellenische Philosophie und Mathematik angekündigt.

Namenregister.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.